Konveks inverteerbare keëls en die Cohen-Lewkowicz interpolasiestelling

A Naude

orcid.org/0000-0001-8057-8301

Verhandeling voorgelê ter *gedeeltelike* nakoming vir die graad *Magister Scientiae* in *Wiskunde* aan die Noordwes-Universiteit

Supervisor: Prof S Ter Horst

Graduation May 2018

23436794

NORTH-WEST UNIVERSITY
NOORDWES-UNIVERSITEIT
UNIBESITI YA BOKONE-BOPHIRIMA

This work is based on the research supported by the National Research Foundation (NRF Grant UID: 103993). Any opinion, finding and conclusion or recommendation expressed in this material is that of the author and the NRF does not accept any liability in this regard.

Hierdie werk is gebaseer op navorsing wat deur die Nasionale Navorsingstigting ondersteun is (NNS Toekenning UID: 103993). Alle opinies, bevindings en gevolgtrekkings of aanbevelings wat in hierdie verhandeling voorkom, is dié van die outeur en die NNS aanvaar geen aanspreeklikheid in hierdie verband nie.

Convex invertible cones and the Cohen-Lewkowicz interpolation theorem

Summary

Convex cones, defined on any algebra with a unit element, which are closed under inversion (convex invertible cones or **cic**s for short) are studied. We establish that the intersection of **cic**s is a **cic**. For a set X contained in a unital algebra, we denote by $\mathscr{C}(X)$ the **cic** generated by X. To get $\mathscr{C}(X)$ from its generating set X, we provide an inductive construction. We set $X_0 = \mathbb{R}_+ \cdot X$, and X_{k+1} is obtained from X_k by taking convex combinations of members in X_k and their inverses. The union of this increasing sequence X_k produces $\mathscr{C}(X)$.

One of our main goals is to study the Lyapunov inequality in association with matrix **cic**s. We restrict ourselves to the real Lyapunov inequality, both nonstrict and strict, and to **cic**s of real matrices. We start by studying the structure of real matrix **cic**s, along with other related properties such as sub**cic**s, nonsingularity and similarity. Matrix inertia plays a major role in characterizing nonsigular **cic**s. Next we look at the various connections real matrix **cic**s have with the nonstrict and strict, real Lyapunov inequality. For a given real matrix A, we study the two sets of all possible solutions to the nonstrict and strict, real Lyapunov inequality, for this matrix A. Under certain conditions on A, we are able to determine all the possible solutions to the strict, real Lyapunov inequality, for this matrix A. We are particularly interested in the event where for two given real matrices A and B, it follows that all the solutions to the nonstrict, real Lyapunov inequality for A, are also solutions to the nonstrict, real Lyapunov inequality for B. This describes the Lyapunov order between two real matrices A and B. Among other things, we study the main properties of the Lyapunov order and introduce the **cic** of all real matrices satisfying the Lyapunov order with a fixed real matrix.

We also study various **cic**s in the algebra of real, rational functions $\mathcal{R}$. Thus $\mathcal{R}$ consists of all functions f that can be expressed as the ratio of two real polynomials in a complex variable, where inversion is given by involution $f \rightarrow \frac{1}{f}$. These **cic**s include the **cic** of positive, real rational functions ($\mathcal{PR}$) and the **cic** of positive, real, odd rational functions ($\mathcal{PRO}$). We make use of control theory to study the **cic** $\mathcal{PRO}$.

We end the study by showing that if a real matrix B belongs to the **cic** generated by a real matrix A, there is at least one $f \in \mathcal{PRO}$ such that $B = f(A)$. To find such an $f \in \mathcal{PRO}$ for two given real matrices A and B is a variation on Nevanlinna-Pick interpolation introduced by N. Cohen and I. Lewkowicz, which we shall refer to as the Cohen-Lewkowicz interpolation problem. Hereby we have established a connection between the matrix **cic**s and the function **cic**s we have studied.

Keywords: Convex invertible cones, Lyapunov order, Lyapunov inequality, Lyapunov regular matrices, positive real odd rational functions, interpolation.

Konveks inverteerbare keëls en die Cohen-Lewkowicz interpolasiestelling

Opsomming

Konvekse keëls, gedefineer op enige algebra met 'n eenheidselement, wat geslote is onder die neem van inverses (konveks inverteerbare keëls of kortliks skryf ons **kik**s) word bestudeer. Ons toon aan dat die snyding van **kik**s 'n **kik** is. Vir 'n versameling X wat bevat is in 'n algebra met eenheidselement, dui ons met $\mathscr{C}(X)$ die **kik** aan wat deur X voortgebring word. Om $\mathscr{C}(X)$ te bepaal vanuit sy voortbringende versameling X, voer ons 'n induktiewe konstruksie uit. Ons stel $X_0 = \mathbb{R}_+ \cdot X$, en verkry X_{k+1} van X_k deur konvekse kombinasies te neem van elemente in X_k en hul inverses. Die vereniging van hierdie stygende ry X_k lewer dan $\mathscr{C}(X)$.

Ons fokus op die verband tussen die Lyapunov ongelykheid en matriks **kik**s. Ons beperk onsself tot die reële Lyapunov ongelykheid, beide die nie-streng sowel as die streng ongelykheid en tot **kik**s van reële matrikse. Ons begin deur die struktuur van reële matriks **kik**s te bestudeer, tesame met ander verwante eienskappe soos deel**kik**s, nie-singuliere **kik**s en die geslotenheid van spesifieke versamelings onder gelykvormigheid. Die inersie van 'n matriks speel 'n groot rol in die karakterisering van nie-singuliere **kik**s. Voorts bespreek ons verskillende verwantskappe tussen reële matriks **kik**s en die reële Lyapunov ongelykheid, beide die nie-streng sowel as die streng ongelykheid. Vir 'n gegewe reële matriks A bestudeer ons die twee versamelings van alle moontlike oplossings van die reële Lyapunov ongelykheid: Die eerste versameling bestaan uit alle moontlike oplossings van die nie-streng, reële Lyapunov ongelykheid, vir hierdie matriks A, en die tweede versameling bestaan uit alle moontlike oplossings van die streng, reële Lyapunov ongelykheid, vir hierdie matriks A. Onder sekere voorwaardes op A, kan ons die versameling van alle moontlike oplossings van die streng, reële Lyapunov ongelykheid, vir hierdie matriks A, bepaal. Ons stel in die besonder belang in die geval waar vir twee gegewe reële matrikse A en B, al die oplossings van die nie-streng, reële Lyapunov ongelykheid vir A, ook oplossings van die nie-streng, reële Lyapunov ongelykheid vir B is. Hierdie beskryf die Lyapunov orde tussen twee reële matrikse A en B. Onder andere kyk ons na eienskappe rakende die Lyapunov orde en stel ons die **kik** bekend wat bestaan uit alle reële matrikse wat die Lyapunov orde met 'n vaste reële matriks bevredig.

Ons bestudeer ook verskeie **kik**s in die algebra van reële, rasionale funksies $\mathcal{R}$. Dus $\mathcal{R}$ bestaan uit alle funksies f wat uitgedruk kan word as die verhouding van twee reële polinome in 'n komplekse veranderlike, waar inversie gegee word deur involusie $f \to \frac{1}{f}$. Die funksie **kik**s waarna ons kyk sluit in die **kik** van positiewe, reële, rasionale funksies ($\mathcal{PR}$) en die **kik** van positiewe, onewe, reële, rasionale funksies ($\mathcal{PRO}$). Ons maak gebruik van beheerteorie om die **kik** $\mathcal{PRO}$ te bestudeer.

Ons eindig die studie af deur te wys as 'n reële matriks B aan die **kik** behoort wat voortgebring word deur 'n reële matriks A, dan bestaan daar ten minste een $f \in \mathcal{PRO}$ só dat $B = f(A)$. Die tegniek om so 'n $f \in \mathcal{PRO}$ te verkry vir twee gegewe reële matrikse A en B, is 'n variasie op Nevanlinna-Pick interpolasie wat deur N. Cohen en I. Lewkowicz bekend gestel is. Daarom verwys ons hierna as die Cohen-Lewkowicz interpolasieprobleem. Hiermee het ons 'n verband gekry tussen die matriks **kik**s en die funksie **kik**s wat ons bestudeer het.

Sleutelterme: Konveks inverteerbare keëls, Lyapunov orde, Lyapunov ongelykheid, Lyapunov reguliere matrikse, positiewe onewe reële rasionale funksies, interpolasie.

Erkennings

Aan my God en Hemelse Vader, daar is niks wat ek het wat U nie onverdiend vir my gee nie. Baie dankie vir U onvoorwaardelike liefde en krag wat ek elke dag sonder uitsondering ervaar en wat ek in die besonder in die laaste twee jaar ervaar het. Dankie vir die voorreg om te kan swot en meer nog, om te kan swot waarvoor ek lief is. Soos ek groei in kundigheid, mag U my lei. Dankie dat ek weet waar ek ook al gaan, daar gaan U met my saam. Aan U kom toe AL die lof en AL die eer en al my dank!

Aan my studieleier Prof Sanne ter Horst, dankie is nie genoeg nie. Baie dankie vir prof se konstante harde werk. Dankie ook in die besonder vir al prof se geduld met my en dat ek soveel by prof kan leer. Dis waarlik vir my 'n voorreg om al die laaste drie jaar saam prof te werk. Ek sou nie hierdie sonder prof kon doen nie. Baie dankie ook aan Prof Jan Fourie vir die taal-redigering van my werk.

Aan my wonderlike ouers en my broer, baie dankie dat julle alles is waarvoor enige mens ooit kan vra. Dankie dat my vreugdes en suksesse ook julle vreugdes en suksesse is en dat al my laste gedeelde laste is danksy julle. Dankie vir al die gebede wat my elke dag staande hou. Ek word hierdie voorreg gegun danksy julle harde werk en daarvoor kan ek nooit genoeg dankie sê nie. Al verloor ek alles, is ek nogtans skatryk solank ek julle het.

Inhoudsopgawe

1 Inleiding

'n Konveks inverteerbare keël (**kik**) kan gedefinieer word oor enige algebra met 'n eenheidselement. 'n **Kik** is 'n nie-leë deelversameling van die algebra waaroor hy gedefinieer is, wat geslote is onder optelling, nie-negatiewe skaling en die neem van inverses. Ons kyk na verskeie **kik**s in hierdie studie.

Daar is belangrike verwantskappe tussen matriks **kik**s en die Lyapunov ongelykheid, soos bespreek word in [7] en [9]. Die Lyapunov ongelykheid, tesame met ander matriksvergelykings, speel 'n belangrike rol in lineêre stelsel- en beheerteorie, soos gesien in [10]. Ons beperk onsself tot reëele matriks **kik**s en die reëele Lyapunov ongelykheid wat vir 'n gegewe reëele matriks A, 'n $S \in \mathbb{S}$ soek só dat

$$SA + A^H S \in \mathbb{P},$$

waar A^H die Hermitiese getransponeerde van A is, $\mathbb{S}$ die versameling reëele, simmetriese matrikse en $\mathbb{P}$ die versameling reëele, positief definiete matrikse. Ons brei die bespreking uit om die geval waar $\mathbb{P}$ met $\overline{\mathbb{P}}$ (die versameling reëele, positief semi-definiete matrikse) vervang word, in te sluit. Ons definieer die oplossingsversamelings van hierdie twee ongelykhede soos volg

$$\mathbb{S}(A) = \{S \in \mathbb{S} : SA + A^H S \in \mathbb{P}\} \quad \text{en} \quad \overline{\mathbb{S}}(A) = \{S \in \mathbb{S} : SA + A^H S \in \overline{\mathbb{P}}\}.$$

In [7] word die Lyapunov orde tussen twee reëele matrikse A en B, aangedui met $A \leq B$, gedefinieer as

$$S \in \mathbb{S}, \quad SA + A^H S \in \overline{\mathbb{P}} \quad \Rightarrow \quad SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}, \quad \text{oftewel} \quad \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B).$$

Die Lyapunov orde $A \leq B$, tussen twee reëele matrikse A en B, beteken dus dat al die oplossings van die nie-streng, reëele Lyapunov ongelykheid vir A, ook oplossings van die nie-streng, reëele Lyapunov ongelykheid vir B is. Vir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dui ons die **kik**, bestaande uit alle reëele $n \times n$ matrikse wat A in die Lyapunov orde domineer, aan met $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$, dus

$$\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \leq B\}.$$

Ons sê 'n matriks het reguliere inersie as dit geen eiewaardes op die imaginêre as het nie. Die deelversameling $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ van $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$, bestaande uit al die matrikse in $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ met reguliere inersie, vorm oor die algemeen nie 'n **kik** nie. Verder verwys ons na $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as Lyapunov regulier wanneer al die eiewaardes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ van A só is dat $\lambda_i + \overline{\lambda}_j \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Dit volg eenvoudig dat Lyapunov regulier, reguliere inersie impliseer.

Ons ondersoek die moontlike karakterisering van die kleinste **kik** wat 'n gegewe reëele matriks A bevat, of anders gestel die **kik** voortgebring deur A. Ons dui hierdie **kik** met $\mathscr{C}(A)$ aan. In die geval waar A reguliere inersie het, volg $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$, met $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ die reëele, dubbel kommutant van A. 'n Stelling wat in [7] sonder bewys gegee word, beweer dat in die geval waar A Lyapunov regulier is, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Ons bewys hierdie bewering vir verskeie spesiale gevalle.

Rasionale skalaarfunksies op $\mathbb{C}$, met 'n nie-negatiewe reëele deel op die regter-halfvlak, kom voor in die bestudering van elektriese netwerke, dissipatiewe stelsels en die Nevanlinna-Pick interpolasieprobleem, volgens [2] en [8]. Ons dui die versameling van rasionale skalaarfunksies op $\mathbb{C}$ met reëele koëffisiënte, aan met $\mathcal{R}$. Vervolgens dui $\mathcal{PR}$ die **kik** aan wat bestaan uit die funksies $f \in \mathcal{R}$ wat analities is in die oop regter-halfvlak Π_+, met 'n nie-negatiewe reëele deel daar, dus

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq 0, \quad z \in \Pi_+.$$

Ons verwys na hierdie funksies as positiewe, reële, rasionale funksies. Ons sien uit [2] dat elke funksie in $\mathcal{R}$ geskryf kan word as 'n direkte som van 'n ewe en 'n onewe deel. Verder volg ook uit [2] dat die versameling van alle onewe funksies in $\mathcal{R}$ ook 'n **kik** vorm en ons dui dit aan met $\mathcal{RO}$. Die deel**kik** $\mathcal{PR} \cap \mathcal{RO} = \mathcal{PRO}$ bestaan uit die reële, onewe, rasionale skalaarfunksies op $\mathbb{C}$, met nie-negatiewe reële deel op die regter-halfvlak. Ons verwys na hierdie funksies as positiewe, onewe, reële, rasionale funksies. In [8] word bewys dat alle funksies in $\mathcal{PRO}$ 'n Foster voorstelling aanneem en dat $f_\infty(z) = z$, vir $z \in \mathbb{C}$, die voortbringer van $\mathcal{PRO}$ is. Dus $\mathscr{C}(f_\infty) = \mathcal{PRO}$. Verder maak ons ook gebruik van beheerteorie om egte $\mathcal{PRO}$ matriksfunksies te bestudeer.

In [8] word ook bewys as 'n reële matriks B aan die **kik** behoort, wat voortgebring word deur 'n reële matriks A met reguliere inersie, dus $B \in \mathscr{C}(A)$, dan bestaan daar ten minste een $f \in \mathcal{PRO}$ só dat $f(A) = B$. Ons bewys ook hierdie stelling en kry sodoende 'n verwantskap tussen al bogenoemde **kik**s. Om 'n $f \in \mathcal{PRO}$ te kry só dat $B = f(A)$ vir twee gegewe reële matrikse A en B, verwys ons na as die Cohen-Lewkowicz interpolasieprobleem.

Vervolgens bespreek ons die struktuur van die studie. Ons verdeel hierdie studie in vier dele. In die eerste deel kyk ons na **kik**s in die algemeen. Hiervoor definieer ons in Hoofstuk 2 die begrip van 'n **kik** en bewys sekere eienskappe rakende **kik**s. Belangrike resultate in hierdie hoofstuk is die feit dat die snyding van **kik**s weer 'n **kik** is, asook die rekursiewe konstruksie van 'n **kik** vanuit sy voortbringende versameling.

Vir die tweede deel van die studie kyk ons na matriks **kik**s. Dit begin vanaf Hoofstuk 3 waar ons die nodige lineêre algebra begrippe definieer en ook alle nodige resultate, sonder bewys gee. In Afdeling 3.7 sluit ons wel die bewyse van die resultate in, omdat die eienskappe van Toeplitz matrikse deel vorm van die resultate in Hoofstuk 4. Die rede vir Hoofstuk 4 is om die resultaat te verkry dat die reële dubbel kommutant van 'n reële matriks dieselfde is as die versameling van alle reële polinome in die matriks. Aangesien ons metode van bewys vir hierdie resultaat, wat gegee word voor Afdeling 4.1, gebruik maak van die resultate vir die komplekse geval, wat reeds welbekend is, bespreek ons in Afdeling 4.3 eers die benodigde komplekse resultate, alvorens ons in Afdeling 4.4 die verlangde resultaat bewys. In Hoofstuk 5 word **kik**s van reële matrikse bestudeer. Ons vind die oplossingsversamelings van die Lyapunov ongelykhede in Afdeling 5.2. Die Lyapunov orde tussen twee reële matrikse kom voor in Afdeling 5.3. In Afdeling 5.4 word bewys ons kan die Lyapunov orde tussen twee Lyapunov reguliere matrikse herdefinieer. Ons sien ook hier waarom ons die reële resultaat van Hoofstuk 4 benodig.

In die derde deel van die studie kyk ons na **kik**s van reële, rasionale funksies op $\mathbb{C}$. Ons begin in Afdeling 6.1 deur positiewe, onewe, reële, rasionale skalaarfunksies op $\mathbb{C}$ bekend te stel. Ons bewys hierdie versameling $\mathcal{PRO}$ is 'n **kik**. Ons bepaal in Afdeling 6.2 die voortbringer van $\mathcal{PRO}$ en wys dat elke funksie in $\mathcal{PRO}$ 'n Foster voorstelling aanneem. Ons beperk onsself egter nie net tot skalaarfunksies nie, maar kyk ook na reële, rasionale matriksfunksies. Sodoende bewys ons met 'n alternatiewe metode dat alle egte funksies in $\mathcal{PRO}$ die Foster voorstelling aanneem, asook dat die versameling egte funksies in $\mathcal{PRO}$ 'n **kik** vorm. In Afdeling 6.5 bewys ons dat alle egte, reële, onewe, rasionale matriksfunksies met nie-negatiewe reële deel op die regter-halfvlak, die Foster voorstelling aanneem en 'n **kik** vorm. Om dit te kan bewys benodig ons onder andere die oordrag realisasiestelling wat in Afdeling 6.4 voorkom. Laasgenoemde benodig die realisasieteorie van Afdeling 6.3.

In die vierde en laaste deel sluit ons die studie af met die Cohen-Lewkowicz interpolasieprobleem. In Afdeling 7.1 stel ons die interpolasieprobleem bekend en verduidelik wat bedoel word met $f(A)$ waar $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguliere inersie het en $f \in \mathcal{PRO}$. Dan bewys ons $\mathscr{C}(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{PRO}\}$ deur gebruik te maak van die resultaat $\mathscr{C}(f_\infty) = \mathcal{PRO}$ uit Hoofstuk 6. In die oorblywende afdelings bewys ons die bewering wat vroeër genoem is en as 'n vermoede in Afdeling 5.4 gestel word, naamlik $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ vir alle moontlike gevalle van Lyapunov reguliere matrikse $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

2 Keëls en kiks

In hierdie hoofstuk bespreek ons basiese resultate oor konvekse keëls en konveks inverteerbare keëls (**kik**s).

2.1 Keëls

Die volgende basiese definisies in verband met keëls is verkry vanuit [1]. Hier dui L op 'n vektorruimte oor die liggaam $\mathbb{R}$.

Definisie 2.1. 'n Nie-leë deelversameling $\mathcal{K}$ van L word 'n *konvekse keël* genoem as $\mathcal{K}$ geslote is onder optelling en vermenigvuldiging met nie-negatiewe skalare, dus

(i) $\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$,

(ii) $\alpha\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ vir alle $\alpha \geq 0$.

Dit is eenvoudig om te sien dat 'n konvekse keël 'n konvekse versameling is.

Lemma 2.2. *Laat $\mathcal{K}$ 'n konvekse keël in L wees. Dan is $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ 'n deelruimte van L.*

Bewys. Neem $\alpha = 0$ in Definisie 2.1(ii). Hieruit sien ons $0 \in \mathcal{K}$ asook $0 = -0 \in -\mathcal{K}$. Dus $0 \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$.

Neem $u, v \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$, dus $u, v \in \mathcal{K}$ en $(-u), (-v) \in \mathcal{K}$. Dan $u + v \in \mathcal{K}$ en $-(u + v) = (-u) + (-v) \in \mathcal{K}$. Daarom volg $u + v \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$.

Vir $u \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ en c enige skalaar, volg $cu \in \mathcal{K}$ en $cu \in -\mathcal{K}$ as $c \geq 0$, of $cu = (-c)(-u) \in -\mathcal{K}$ en $cu = (-c)(-u) \in \mathcal{K}$ as $c < 0$. Ons kry dus in beide gevalle dat $cu \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$. Hiermee is bewys dat $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ 'n deelruimte van L is. $\square$

Wanneer $\mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}) = \{0\}$ word die konvekse keël 'n gepunte konvekse keël genoem.

Lemma 2.3. *Laat $\mathcal{K}$ 'n konvekse versameling in L wees en neem aan $\mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{K} = \mathcal{K}$. Dan is $\mathcal{K}$ 'n konvekse keël.*

Bewys. Vanuit $\mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{K} = \mathcal{K}$ sien ons dat $\mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Gevolglik is $\mathcal{K}$ geslote onder vermenigvuldiging met nie-negatiewe skalare. Om te sien dat $\mathcal{K}$ geslote is onder optelling neem $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$. Aangesien $\mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{K} = \mathcal{K}$ weet ons $2k_1, 2k_2 \in \mathcal{K}$ en omdat $\mathcal{K}$ konveks is volg $k_1 + k_2 = \frac{1}{2}(2k_1) + \frac{1}{2}(2k_2) \in \mathcal{K}$. Gevolglik is $\mathcal{K}$ geslote onder optelling. Hiermee is bewys dat $\mathcal{K}$ 'n konvekse keël is. $\square$

Lemma 2.4. *Vir konvekse keëls $\mathcal{K}_i$ in L, met i uit 'n indeksversameling I, is $\cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ ook 'n konvekse keël.*

Bewys. Definieer $\mathcal{K} := \cap_{i\in 1}\mathcal{K}_i$. Aangesien $0 \in \mathcal{K}_i$ vir elke $i \in I$ weet ons $0 \in \cap_{i\in 1}\mathcal{K}_i = \mathcal{K}$, dus $\mathcal{K}$ kan nie leeg wees nie.

Vir $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ sal $k_1 + k_2 \in \mathcal{K}$, omdat $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ beteken $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_i$ vir elke $i \in I$. Dus sal $k_1 + k_2 \in \mathcal{K}_i$ vir elke $i \in I$ aangesien elke $\mathcal{K}_i$ 'n konvekse keël is. Daarom volg $\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

Vir 'n $\lambda \geq 0$ en vir 'n $k \in \mathcal{K}$ sal $\lambda k \in \mathcal{K}$. Dit volg omdat $k \in \mathcal{K}$ beteken $k \in \mathcal{K}_i$ vir elke $i \in I$, gevolglik ook $\lambda k \in \mathcal{K}_i$ vir elke $i \in I$ omdat elke $\mathcal{K}_i$ 'n konvekse keël is. Daarom volg $\lambda\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Hiermee is bewys dat $\mathcal{K} = \cap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ 'n konvekse keël is. $\square$

Definisie 2.5. Laat $\mathcal{K}$ 'n gepunte konvekse keël in L wees. 'n Nie-leë konvekse deelversameling V van $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ is 'n basis vir $\mathcal{K}$ as daar vir elke $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, 'n $\lambda > 0$ bestaan en 'n $v \in V$, beide uniek bepaal, só dat $x = \lambda v$.

2.2 Kiks

Vir meer inligting oor wat hierna volg, sien [8]. Ons aanvaar deurgaans dat $\mathscr{A}$ 'n algebra oor die liggaam $\mathbb{R}$ is.

Definisie 2.6. Vir 'n versameling $X \subset \mathscr{A}$ definieer ons $X^{-1} := \{x^{-1} : x \in \mathscr{A} \text{ inverteerbaar}\}$. 'n Konvekse keël $\mathscr{C}$ van $\mathscr{A}$ word 'n *konvekse inverteerbare keël* (**kik**) genoem as dit geslote is onder die neem van inverses, dit wil sê $\mathscr{C}^{-1} \subseteq \mathscr{C}$.

Lemma 2.7. *Vir* **kik***s $\mathscr{B}_i$ in $\mathscr{A}$, met i uit 'n indeksversameling I, is $\cap_{i\in I}\mathscr{B}_i$ ook 'n* **kik**.

Bewys. Laat $\mathscr{B} := \cap_{i\in I}\mathscr{B}_i$. Vanuit Lemma 2.4 weet ons $\mathscr{B}$ is 'n konvekse keël. Ons moet dus net wys dat $\mathscr{B}$ geslote is onder die neem van inverses. Vir 'n inverteerbare $b \in \mathscr{B}$, sal $b \in \mathscr{B}_i$ en dus $b^{-1} \in \mathscr{B}_i$ vir elke $i \in I$. Gevolglik sal $b^{-1} \in \mathscr{B}$ wees. Hiermee is bewys dat $\mathscr{B} = \cap_{i\in I}\mathscr{B}_i$ 'n **kik** is. □

Definisie 2.8. Vir 'n versameling $X \subset \mathscr{A}$ skryf ons $\mathscr{C}(X)$ vir die **kik** wat voortgebring word deur X, naamlik die kleinste **kik** in $\mathscr{A}$ wat X bevat. In hierdie geval verwys ons na X as 'n voortbringende versameling vir die **kik**. As $X = \{x\}$ uit 'n enkel element bestaan, skryf ons $\mathscr{C}(x)$.

As $x \in \mathscr{A}$ nie inverteerbaar is nie, volg $\mathscr{C}(x) = \mathbb{R}_+ \cdot \{x\}$.

Gevolg 2.9. *Vir 'n versameling $X \subset \mathscr{A}$, laat I die indeksversameling wees wat bestaan uit alle* **kik***s wat X bevat. Dan $\mathscr{C}(X) = \cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B}$.*

Bewys. Dit is duidelik dat die indeksversameling I nie leeg is nie, aangesien $\mathscr{A}$ self 'n **kik** is wat X bevat. Aangesien $X \subseteq \mathscr{B}$ vir elke $\mathscr{B} \in I$, volg $X \subseteq \cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B}$. Dan weet ons vanuit $\mathscr{C}(X)$ se definisie en vanuit die feit dat $\cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B}$ 'n **kik** is wat X bevat, dat $\mathscr{C}(X) \subseteq \cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B}$. Ons sien dat $\cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B}$ die kleinste **kik** is wat X bevat, omdat ons weet daar bestaan 'n $\tilde{\mathscr{B}} \in I$ sodat $\mathscr{C}(X) = \tilde{\mathscr{B}}$. Aangesien $\cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}$ vir elke $\mathscr{B} \in I$, sal $\cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B} \subseteq \tilde{\mathscr{B}} = \mathscr{C}(X)$. Dus $\mathscr{C}(X) = \cap_{\mathscr{B}\in I}\mathscr{B}$. □

Definisie 2.10. Vir 'n versameling $X \subset \mathscr{A}$ dui ons die konvekse omhullende daarvan aan met $\mathrm{conv}(X)$. Dit is die kleinste konvekse versameling wat X bevat, naamlik die snyding van alle konvekse versamelings wat X bevat.

Die konvekse omhullende van 'n versameling X kan beskryf word as

$$\mathrm{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \ n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \geq 0,\ x_i \in X \ \text{ vir } \ i = 1, 2, ..., n \ \text{ en } \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Lemma 2.11. *Vir twee versamelings $X, Y \subset \mathscr{A}$ volg*

$$\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{conv}\left(X \bigcup Y\right) = \mathrm{conv}\left((\mathbb{R}_+ \cdot X) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot Y)\right).$$

Bewys. Neem $x \in \mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{conv}\,(X \bigcup Y)$. Dan geld

$$x = \delta\left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(\delta x_i) + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j(\delta y_j), \text{ met}$$

$$\delta \geq 0, \quad \alpha_i, \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j = 1 \text{ en } x_i \in X,\ y_j \in Y.$$

Hieruit sien ons dat $x \in \operatorname{conv}((\mathbb{R}_+ \cdot X) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot Y))$ omdat $\delta x_i \in \mathbb{R}_+ \cdot X$ en $\delta y_j \in \mathbb{R}_+ \cdot Y$, dus $\mathbb{R}_+ \cdot \operatorname{conv}(X \bigcup Y) \subseteq \operatorname{conv}((\mathbb{R}_+ \cdot X) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot Y))$.

Neem $x \in \operatorname{conv}((\mathbb{R}_+ \cdot X) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot Y))$. Dan geld

$$x = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(\delta_i x_i) + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j(\rho_j y_j), \text{ met } \alpha_i, \delta_i, \beta_j, \rho_j \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j = 1 \text{ en } x_i \in X, y_j \in Y.$$

Dit impliseer dat

$$x = \gamma \left(\sum_{i=1}^{n_1} \tilde{\alpha}_i x_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{\beta}_j y_j \right), \text{ met } \gamma := \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \delta_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \rho_j \text{ en } \tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i \delta_i}{\gamma}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\beta_j \rho_j}{\gamma}.$$

Dan geld $\gamma \in \mathbb{R}_+$ en

$$\sum_{i=1}^{n_1} \tilde{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{\beta}_j = \frac{1}{\gamma}(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \delta_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \rho_j) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \delta_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \rho_j}(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \delta_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j \rho_j) = 1.$$

Dus $x \in \mathbb{R}_+ \cdot \operatorname{conv}(X \bigcup Y)$ en $\operatorname{conv}((\mathbb{R}_+ \cdot X) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot Y)) \subseteq \mathbb{R}_+ \cdot \operatorname{conv}(X \bigcup Y)$. Gevolglik kry ons $\mathbb{R}_+ \cdot \operatorname{conv}(X \bigcup Y) = \operatorname{conv}((\mathbb{R}_+ \cdot X) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot Y))$. □

Proposisie 2.12. *Ons kan die* ***kik*** $\mathscr{C}(X)$ *van sy voortbringende versameling* X *bepaal deur die volgende rekursiewe konstruksie*

$$X_0 := \mathbb{R}_+ \cdot X, \quad X_{j+1} = \operatorname{conv}\left(X_j \bigcup X_j^{-1}\right), \quad j = 0, 1, 2, ... \quad \mathscr{C}(X) = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j.$$

Bewys. Ons bewys eers $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j \subseteq \mathscr{C}(X)$. Ons bewys dit met induksie. Aangesien $\mathscr{C}(X)$ die kleinste **kik** is wat X bevat, weet ons nie net dat $X \subseteq \mathscr{C}(X)$, maar ook dat $X_0 = \mathbb{R}_+ \cdot X \subseteq \mathscr{C}(X)$. Veronderstel $X_j \subseteq \mathscr{C}(X)$. Ons weet dan ook dat $X_j^{-1} \subseteq \mathscr{C}(X)$ omdat $\mathscr{C}(X)$ 'n **kik** is. Aangesien 'n **kik** 'n konvekse versameling is, sal $\mathscr{C}(X)$ die kleinste konvekse versameling bevat wat X_j en X_j^{-1} bevat, naamlik $\operatorname{conv}(X_j \bigcup X_j^{-1}) = X_{j+1}$. Gevolglik is $X_{j+1} \subseteq \mathscr{C}(X)$. Hieruit kan ons aanneem dat $X_j \subseteq \mathscr{C}(X)$ vir alle natuurlike getalle j, dus volg $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j \subseteq \mathscr{C}(X)$.

Ons weet dat $X \subseteq \mathbb{R}_+ \cdot X \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. As ons dus kan wys dat $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ 'n **kik** is, volg dat $\mathscr{C}(X) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. Ons begin deur te bewys dat $\mathbb{R}_+ \cdot X_j = X_j$ vir alle j. Hieruit volg dan ook dat $\mathbb{R}_+ \cdot X_j^{-1} = (\mathbb{R}_+ \cdot X_j)^{-1} = X_j^{-1}$ vir alle j. Ons bewys dit deur induksie. Vir $j = 0$ volg

$$\mathbb{R}_+ \cdot X_0 = \mathbb{R}_+ \cdot (\mathbb{R}_+ \cdot X) = \mathbb{R}_+ \cdot X = X_0.$$

Veronderstel $\mathbb{R}_+ \cdot X_j = X_j$. Dan ook $\mathbb{R}_+ \cdot X_j^{-1} = X_j^{-1}$. Nou volg vanuit Lemma 2.11 dat

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \cdot X_{j+1} &= \mathbb{R}_+ \cdot \operatorname{conv}\left(X_j \bigcup X_j^{-1}\right) = \operatorname{conv}\left((\mathbb{R}_+ \cdot X_j) \bigcup (\mathbb{R}_+ \cdot X_j^{-1})\right) \\ &= \operatorname{conv}\left(X_j \bigcup X_j^{-1}\right) = X_{j+1}. \end{aligned}$$

Dit bewys dat $\mathbb{R}_+ \cdot X_j = X_j$ vir alle natuurlike getalle j. Dus $\mathbb{R}_+ \cdot \cup_{j=0}^{\infty} X_j = \cup_{j=0}^{\infty} X_j$.

Om te sien dat $\cup_{j=0}^{\infty} X_j$ geslote is onder optelling neem $x_1, x_2 \in \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. Daar bestaan dus indekse j_1 en j_2 só dat $x_1 \in X_{j_1}$ en $x_2 \in X_{j_2}$. Veronderstel $j_1 \leq j_2$. Dan weet ons $x_1, x_2 \in X_{j_2}$, aangesien $X_j \subseteq X_{j+1}$ vir elke j. Ons weet X_j is 'n konvekse versameling vir elke $j \geq 1$ en dat $\mathbb{R}_+ \cdot X_j = X_j$ vir elke j. Dus $2x_1, 2x_2 \in X_{j_2}$ en $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(2x_1) + \frac{1}{2}(2x_2) \in X_{j_2}$ as $j_2 \geq 1$. Sou $j_1 = j_2 = 0$, sal $x_1 + x_2 \in X_{j_2+1}$ aangesien $X_{j_2+1} = X_1$ dan konveks is. Hiermee is bewys dat $x_1 + x_2 \in \cup_{j=0}^{\infty} X_j$ en gevolglik is $\cup_{j=0}^{\infty} X_j$ 'n konvekse keël.

Om te sien dat $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ geslote is onder inversie, neem $x \in \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. Daar bestaan dus 'n j sodat $x \in X_j$. Aangesien $X_j^{-1} \subseteq X_{j+1} = \operatorname{conv}(X_j \bigcup X_j^{-1}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ sien ons dat $X_j^{-1} \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. As x^{-1} dus bestaan, sal $x^{-1} \in \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. Gevolglik is $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ geslote onder die neem van inverses.

Hiermee is bewys dat $\bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ 'n **kik** is. Nou weet ons dat $\mathscr{C}(X) \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. Daarom volg $\mathscr{C}(X) = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$. $\square$

2.3 Notas

Die inligting oor konvekse keëls in afdeling 2.1 is verkry vanuit [1]. In die bron word van die resultate wel genoem, maar nie bewys nie.

Die inligting oor **kik**s in afdeling 2.2 is verkry vanuit [8], ook hier word van die resultate genoem, maar meestal sonder bewys gegee. Die bewyse is nie moeilik nie en is vir volledigheidsonthalwe ingesluit.

3 Basiese lineêre algebra

Die klassieke resultate in hierdie hoofstuk kan verkry word in die meeste standaard lineêre algebra handboeke, bv. [20, 17, 12]. Die liggaam $\mathbb{F}$ wat in die hoofstuk gebruik word, dui op $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

3.1 Basiese definisies en resultate

Definisie 3.1. Die getransponeerde van 'n matriks $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ is die $n \times m$ matriks, aangedui met A^T, waarvan die ij-de inskrywing gelyk is aan die ji-de inskrywing van A.

Dit volg dat $(A^T)^T = A$ en $(AB)^T = B^T A^T$. 'n Vierkantige matriks A word *simmetries* genoem as $A^T = A$ en *skeef-simmetries* as $A^T = -A$.

Definisie 3.2. Vir $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ word $\overline{A}$ verkry deur elke inskrywing in A te vervang met sy kompleks toegevoegde. In die geval waar $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ volg $A = \overline{A}$.

Definisie 3.3. Die matriks $A^H := \left(\overline{A}\right)^T$ word die Hermitiese getransponeerde van 'n matriks $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ genoem.

Dit volg dat $(A^H)^H = A$ en $(AB)^H = B^H A^H$. 'n Vierkantige matriks A word *Hermities* genoem as $A = A^H$.

Definisie 3.4. Vir 'n matriks $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ definieer ons die nulruimte $\mathcal{N}_A$ en beeld $\mathcal{R}_A$ deur

$$\mathcal{N}_A := \{x : x \in \mathbb{F}^n \text{ en } Ax = 0_m \in \mathbb{F}^m\} \quad \text{en} \quad \mathcal{R}_A := \{Ax : x \in \mathbb{F}^n\}.$$

Verder definieer ons die rang van A as $\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}_A$.

Dit volg dat $\text{rank}(A) = \text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A^H)$.

Stelling 3.5 (Rang stelling). *Vir 'n matriks A met n kolomme volg $n = \dim \mathcal{R}_A + \dim \mathcal{N}_A$.*

Definisie 3.6. Laat $GL(n, \mathbb{F})$ die versameling van alle nie-singuliere matrikse in $\mathbb{F}^{n\times n}$ aandui. Vir $A \in GL(n, \mathbb{F})$ skryf ons A^{-1} vir A se inverse.

Definisie 3.7. 'n Vierkantige matriks U word *unitêr* genoem as U nie-singulier is en $U^H = U^{-1}$.

Definisie 3.8. Matrikse $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ word *gelykvormig* genoem as daar 'n $P \in GL(n, \mathbb{F})$ bestaan só dat $B = P^{-1}AP$.

Definisie 3.9. Vir 'n vierkantige matriks A verwys ons na die determinant van die submatriks, wat gevorm word deur die i-de ry en j-de kolom te skrap, as die *ij-de minor*. Die *ij-de kofaktor* word verkry deur die ij-de minor met $(-1)^{i+j}$ te vermenigvuldig.

Stelling 3.10 (Laplace uitbreiding). *Veronderstel $A = [a_{ij}]$ is 'n $n \times n$ matriks. Vir enige vaste $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ word die determinant van A, $\det(A)$, gegee deur*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in} \\ &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}, \end{aligned}$$

waar C_{ij} die ij-de kofaktor van A voorstel.

Ons weet vanuit Cramer se reël dat die inverse van 'n matriks $A \in GL(n, \mathbb{F})$ gegee word deur

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A),$$

met $\text{adj}(A)_{ij} = C_{ji}$ waar C_{ji} die ji-de kofaktor van A is, vir $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definisie 3.11. Die spoor van 'n vierkantige matriks A, aangedui met $\text{tr}(A)$, is die som van die inskrywings op die hoofdiagonaal van A.

Definisie 3.12. 'n Hermitiese matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ is *positief definiet* (onderskeidelik, *positief semi-definiet*) as $x^H Ax > 0$ (onderskeidelik, $x^H Ax \geq 0$) vir alle $0_n \neq x \in \mathbb{F}^n$ en ons skryf $A \succ 0_{n\times n}$ (onderskeidelik, $A \succeq 0_{n\times n}$). Die matriks A is *negatief definiet* (onderskeidelik, *negatief semi-definiet*) as $-A$ positief definiet (onderskeidelik, *positief semi-definiet*) is en ons skryf $A \prec 0_{n\times n}$ (onderskeidelik, $A \preceq 0_{n\times n}$).

Definisie 3.13. Vir Hermitiese matrikse $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ skryf ons $A \succ B$ (onderskeidelik, $A \succeq B$; $A \prec B$; $A \preceq B$) as $A - B \succ 0_{n\times n}$ (onderskeidelik, $A - B \succeq 0_{n\times n}$; $A - B \prec 0_{n\times n}$; $A - B \preceq 0_{n\times n}$).

3.2 Eiewaardes, eievektore en inersie

In hierdie afdeling neem ons $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dit kan natuurlik gebeur dat al die inskrywings van $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\mathbb{R}$ is, só dat ook $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definisie 3.14. 'n Skalaar $\lambda \in \mathbb{C}$ word 'n *eiewaarde* van $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genoem as $\mathcal{N}_{(\lambda I_n - A)} \neq \{0_n\}$. Verder word elke nie-nul vektor $x \in \mathbb{C}^n$ só dat $x \in \mathcal{N}_{(\lambda I_n - A)}$ 'n *eievektor* van A genoem, ooreenstemmend met die eiewaarde λ.

Die versameling $\mathcal{N}_{(\lambda I_n - A)}$ bevat 'n nie-nul oplossing as en slegs as $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Die eiewaardes van A is die waardes vir λ wat $\det(\lambda I_n - A) = 0$ bevredig.

Stelling 3.15 (Schur ontbinding)**.** *Laat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dan bestaan daar 'n unitêre matriks $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ só dat $U^H AU = \Lambda$ bo-driehoekig is. Die diagonaalelemente van Λ is die eiewaardes van A.*

Definisie 3.16. Laat λ 'n eiewaarde wees van $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Veronderstel $(x-\lambda)^k$ is die hoogste mag van $(x-\lambda)$ wat in $\det(xI_n - A)$ deel. Dan word k die *algebraïese multiplisiteit* van λ genoem. Die $\dim \mathcal{N}_{(\lambda I_n - A)}$ word die *geometriese multiplisiteit* van λ genoem.

Die notasie

$$\Pi_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + \overline{\lambda} > 0\} \quad \text{en} \quad \Pi_- := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + \overline{\lambda} < 0\}$$

is vir die regter oop en linker oop halfvlak van $\mathbb{C}$, onderskeidelik.

Definisie 3.17. Laat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en laat

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_+(A) &:= \text{ die aantal eiewaardes van } A \text{ in } \Pi_+,\\
\mathcal{E}_-(A) &:= \text{ die aantal eiewaardes van } A \text{ in } \Pi_-,\\
\mathcal{E}_0(A) &:= \text{ die aantal eiewaardes van } A \text{ op } \mathrm{i}\mathbb{R},
\end{aligned}$$

waar ons ook die multiplisiteit van die eiewaardes in ag neem.

Ons definieer die *inersie* van A as $\mathrm{In}(A) := (\mathcal{E}_+(A), \mathcal{E}_-(A), \mathcal{E}_0(A))$. Let wel $\mathcal{E}_+(A) + \mathcal{E}_-(A) + \mathcal{E}_0(A) = n$. Die inersie word stabiel genoem as $\mathcal{E}_-(A) = n$; anti-stabiel as $\mathcal{E}_+(A) = n$ en regulier wanneer $\mathcal{E}_0(A) = 0$.

Stelling 3.18 (Lyapunov se Inersie Stelling, [12] Stelling 20.15)**.** *Laat $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en veronderstel dat $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 'n Hermitiese matriks is sodanig dat $GA + A^H G \succ 0_{n\times n}$. Dan*

$$\mathcal{E}_+(G) = \mathcal{E}_+(A), \quad \mathcal{E}_-(G) = \mathcal{E}_-(A), \quad \mathcal{E}_0(G) = \mathcal{E}_0(A) = 0.$$

3.3 Die Hadamard produk

Definisie 3.19. Die *Hadamard produk* (ook genoem die *inskrywingsgewyse produk*) van twee matrikse $A = [a_{ij}]$ en $B = [b_{ij}]$, van dieselfde grootte, word gedefinieer deur

$$A \circ B = [a_{ij} b_{ij}].$$

Lemma 3.20. *Vir $A, B, D_1, D_2 \in \mathbb{F}^{n\times n}$, met D_i diagonaalmatrikse, $i = 1, 2$, volg*

$$D_1(A \circ B)D_2 = (D_1 A D_2) \circ B = A \circ (D_1 B D_2).$$

Stelling 3.21 ([15], Stelling 5.2.1)**.** *Laat $A, B \succeq 0_{n\times n}$. Dan $A \circ B \succeq 0_{n\times n}$. As geen diagonaalelement van A nul is nie en $B \succ 0_{n\times n}$, dan $A \circ B \succ 0_{n\times n}$. In die besonder, as $A, B \succ 0_{n\times n}$ dan $A \circ B \succ 0_{n\times n}$.*

Lemma 3.22. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sal volg $A \succ 0_{n\times n}$ as en slegs as*

$$e^T(A \circ B)e = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}b_{ij} > 0,$$

vir alle $B \succ 0_{n\times n}$, waar $e^T = [1, ..., 1] \in \mathbb{R}^n$.

Bewys. As ons aanneem $A \succ 0_{n\times n}$, dan sal $A \circ B \succ 0_{n\times n}$ vir alle $B \succ 0_{n\times n}$, vanuit Stelling 3.21. Dus sal $x^T(A \circ B)x > 0$, vir alle $0_n \neq x \in \mathbb{R}^n$. Hieruit volg $e^T(A \circ B)e = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}b_{ij} > 0$.

Vir die omgekeerde, neem $B := xx^T$, waar $0_n \neq x \in \mathbb{R}^n$, dus $B \succ 0_{n\times n}$. Dan volg $0 < e^T(A \circ B)e = e^T(A \circ (xx^T))e = \sum_{i,j}^{n} x_j a_{ij} x_i = x^T Ax$. Hieruit sien ons dat $x^T Ax > 0$, vir alle $0_n \neq x \in \mathbb{R}^n$, dus $A \succ 0_{n\times n}$. □

3.4 Die komplekse Jordan ontbinding

Definisie 3.23. 'n $k \times k$ Jordan-blok met waarde λ is die volgende bo-driehoekige matriks

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

'n Jordan-matriks is 'n blok-diagonaalmatriks, waarvan al die blokke op die diagonaal van die matriks Jordan-blokke is.

Stelling 3.24 (Jordan ontbinding)**.** *Veronderstel $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ het s verskillende eiewaardes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, waar elke λ_i algebraïese multiplisiteit u_i het en geometriese multiplisiteit v_i, vir $1 \leq i \leq s$. Dan is A gelykvormig aan die Jordan-matriks $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, ..., J_v)$, waar*

(*i*) $v = v_1 + v_2 + ... + v_s$,

(*ii*) *Die aantal Jordan-blokke in J met eiewaarde λ_i is gelyk aan v_i,*

(*iii*) *Die eiewaarde λ_i kom u_i kere op die diagonaal van J voor.*

Stelling 3.25 ([14], Stelling 2.5.6)**.** *Vir 'n Hermitiese matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ is al die eiewaardes reëel, met algebraïese multiplisiteit gelyk aan die geometriese multiplisiteit. In hierdie geval is A unitêr diagonaliseerbaar, dit wil sê $A = UDU^H$, met $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ unitêr en D 'n diagonaalmatriks met die eiewaardes van A op die diagonaal.*

3.5 Die reële Jordan ontbinding vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Die inligting oor die reële Jordan ontbinding is verkry uit afdelings 3.2-3.4 in [14].

As $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komplekse eiewaardes het, sal die Jordan-matriks in die Jordan ontbinding van A, volgens Stelling 3.24, komplekse blokmatrikse bevat. Daar is 'n alternatiewe Jordan ontbinding vir A, waar die Jordan-matriks net uit reële blokmatrikse bestaan.

Alvorens ons die reële Jordan ontbinding stelling kan stel, word die leser vervolgens aan enkele belangrike feite aangaande Jordan-blokke herinner.

Veronderstel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ons weet dat alle nie-reële eiewaardes van A in toegevoegde pare voorkom. Verder weet ons ook, vanuit die verduideliking in afdeling 3.2 van [14], dat inligting m.b.t die rang van sekere magte die groottes van die Jordan-blokke, wat ooreenstem met 'n gegewe eiewaarde, bepaal. Gevolglik word die groottes van al die Jordan-blokke in 'n algemene Jordan-matriks op hierdie wyse bepaal. Aangesien $\operatorname{rank}(A - \lambda I_n)^k = \operatorname{rank}(\overline{A - \lambda I_n})^k = \operatorname{rank}(A - \overline{\lambda} I_n)^k$, vir $k = 1, 2, ...$, sien ons dat die struktuur van die Jordan-blokke wat ooreenstem met 'n nie-reële eiewaarde λ van A, dieselfde is as die struktuur van die Jordan-blokke wat ooreenstem met die toegevoegde van hierdie eiewaarde $\overline{\lambda}$. Hieruit kan ons dus aflei dat al die verskillende groottes Jordan-blokke in A, wat ooreenstem met nie-reële eiewaardes, in toegevoegde pare van dieselfde grootte voorkom.

Veronderstel ons het 'n $2k \times 2k$ Jordan-matriks van die vorm

$$\begin{bmatrix} J_k(\lambda) & 0_{k\times k} \\ 0_{k\times k} & J_k(\overline{\lambda}) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Deur rye en kolomme te ruil, sien ons dat bostaande Jordan-matriks gelykvormig is aan die volgende blokmatriks

$$D_k(\lambda) := \begin{bmatrix} D(\lambda) & I_2 & 0_{2\times2} & \dots & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & D(\lambda) & I_2 & \ddots & 0_{2\times2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D(\lambda) & I_2 \\ 0_{2\times2} & \dots & \dots & 0_{2\times2} & D(\lambda) \end{bmatrix}, \text{ waar } D(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Laat $\lambda := a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$ en definieer $R := \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Ons sien dan dat

$$RD(\lambda)R^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} =: C(a, b).$$

As $R_k := \operatorname{diag}(R, R, ..., R)$ die blok-diagonaalmatriks is waarin die matriks R (k keer) op die diagonaal voorkom, dan volg

$$R_k D_k(\lambda) R_k^{-1} = \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 & 0_{2\times2} & \dots & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & C(a,b) & I_2 & \ddots & 0_{2\times2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C(a,b) & I_2 \\ 0_{2\times2} & \dots & \dots & 0_{2\times2} & C(a,b) \end{bmatrix} =: C_k(a,b) \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}.$$

Bogenoemde inligting lei tot die reële Jordan ontbinding stelling:

Stelling 3.26 (Reële Jordan ontbinding, [14] Stelling 3.4.5)**.** *Vir elke $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestaan daar 'n $P \in GL(n, \mathbb{R})$ só dat $P^{-1}AP = J_{\mathbb{R}}$, met*

$$J_{\mathbb{R}} = \operatorname{diag}\left(C_{n_1}(a_1, b_1), C_{n_2}(a_2, b_2), ..., C_{n_r}(a_r, b_r), J_{n_{r+1}}(\lambda_{r+1}), ..., J_{n_v}(\lambda_v)\right),$$

waar $\lambda_k = a_k + \mathrm{i}b_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, *die nie-reële eiewaardes van* A *is, vir* $k = 1, 2, ..., r$, *en* $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_v$ *die reële eiewaardes van* A*, met* λ_i, $1 \leq i \leq v$, *nie noodwendig uniek nie. Elke bo-driehoekige blokmatriks* $C_{n_k}(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^{2n_k \times 2n_k}$ *stem ooreen met 'n toegevoegde paar Jordan-blokke* $J_{n_k}(\lambda_k), J_{n_k}(\overline{\lambda_k})$*, met nie-reële eiewaarde* λ_k *in die oorspronklike Jordan ontbinding van* A*. Die reële Jordan-blokke* $J_{n_{r+1}}(\lambda_{r+1}), ..., J_{n_v}(\lambda_v)$ *in* $J_{\mathbb{R}}$ *is presies die Jordan-blokke in die oorspronklike Jordan ontbinding van* A*, met reële eiewaardes* $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_v$.

Die bewys vir die feit dat hierdie gelykvormigheid reëel is, word op bl 153 van [14] bespreek.

Stelling 3.27 (Reële normaalvorm, [14] Gevolg 2.5.14)**.** *Neem* $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *waar* M *skeef-simmetries is. Dan is* $\mathrm{rank}(M)$ *ewe, sê* $\mathrm{rank}(M) = 2k$ *en al die nie-nul eiewaardes van* M *suiwer imaginêr. Daar bestaan 'n unitêre* $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *só dat*

$$U^T M U = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \alpha_k \\ -\alpha_k & 0 \end{bmatrix}, 0_{(n-2k)\times(n-2k)} \right),$$

met $\alpha_j > 0$ *vir* $1 \leq j \leq k$*. In die geval waar* M *nie-singulier is, weet ons* $n = \mathrm{rank}(M) = 2k$ *en dus volg dat* n *ewe is. Die bostaande formule sluit ook die geval in waar* M *nie-singulier is.*

3.6 Die karakteristieke polinoom en minimaalpolinoom

Definisie 3.28. Ons definieer $\mathbb{F}[x]$ as die versameling van alle polinome in x met koëffisiënte uit $\mathbb{F}$, dus $\mathbb{F}[x] := \{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + ... + d_j x^j : d_i \in \mathbb{F},\ 0 \leq i \leq j,\ j \in \mathbb{N}\}$. As $d_j = 1$ word die polinoom *monies* genoem en as $d_j \neq 0$ dan is die graad van die polinoom, $\deg(d(\cdot)) = j$.

Stelling 3.29 (Delingsalgoritme vir polinome, [11] Stelling 6-1)**.** *Vir* $p, d \in \mathbb{F}[x]$*, waar* $d \neq 0$*, bestaan daar 'n unieke kwosiënt* $q \in \mathbb{F}[x]$ *en 'n unieke res* $r \in \mathbb{F}[x]$ *só dat*

$$p(x) \quad = \quad q(x) \cdot d(x) + r(x),$$

waar $r = 0$ *of* $\deg(r(\cdot)) < \deg(d(\cdot))$.

Definisie 3.30. Vir $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ definieer ons $p_A(x) := \det(xI_n - A)$ as die *karakteristieke polinoom* van A. Die waardes vir x waarvoor $p_A(x) = 0$ is die eiewaardes van A.

Vir $d \in \mathbb{F}[x]$ en $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ definieer ons die $n \times n$ matriks $d(A)$ soos volg

$$d(A) \quad = \quad d_0 I_n + d_1 A + d_2 A^2 + ... + d_j A^j.$$

Laat $\mathbb{F}[A] := \{d(A) : d \in \mathbb{F}[x]\}$.

Stelling 3.31 (Cayley-Hamilton, [20] Stelling 3.9)**.** *Laat* $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ *en* p_A *die karakteristieke polinoom van* A*. Dan* $p_A(A) = 0_{n \times n}$.

Aangesien elke $n \times n$ matriks n eiewaardes het, insluitend multiplisiteit, volg $\deg(p_A(\cdot)) = n$. Dit kan wees dat daar 'n polinoom q van laer graad bestaan só dat $q(A) = 0_{n \times n}$. Hieruit volg die definisie van die minimaalpolinoom.

Definisie 3.32. Die *minimaalpolinoom* van $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ is die moniese polinoom $d \in \mathbb{F}[x]$ van laagste graad só dat $d(A) = 0_{n \times n}$. Ons dui die minimaalpolinoom van A aan met m_A.

Lemma 3.33. *Laat $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en $p \in \mathbb{F}[x]$ met $p(A) = 0_{n\times n}$. Dan is p deelbaar deur m_A, dit wil sê $p(x) = q(x) \cdot m_A(x)$, vir $q \in \mathbb{F}[x]$.*

Bewys. Ons weet vanuit die delingsalgoritme dat daar unieke polinome $q, r \in \mathbb{F}[x]$ bestaan só dat $p(x) = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$, waar $r = 0$ of $\deg(r(\cdot)) < \deg(m_A(\cdot))$. Ons sien dat

$$0_{n\times n} = p(A) = q(A) \cdot m_A(A) + r(A) = r(A).$$

Indien $r \neq 0$ is dit teenstrydig met die definisie van die minimaalpolinoom aangesien $\deg(r(\cdot)) < \deg(m_A(\cdot))$. Gevolglik weet ons $r = 0$ en dus $p(x) = q(x) \cdot m_A(x)$. $\square$

Stelling 3.34 ([11], Stelling 5-3)**.** *Gelykvormige matrikse het dieselfde minimaalpolinoom.*

Bewys. Laat $d \in \mathbb{F}[x]$ waar $d(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + ... + d_jx^j$. Vir 'n matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en 'n nie-singuliere matriks P sal

$$\begin{aligned} d(P^{-1}AP) &= d_0I_n + d_1(P^{-1}AP) + d_2(P^{-1}AP)^2 + ... + d_j(P^{-1}AP)^j \\ &= d_0I_n + d_1P^{-1}AP + d_2P^{-1}A^2P + ... + d_jP^{-1}A^jP \\ &= P^{-1}(d_0I_n + d_1A + d_2A^2 + ... + d_jA^j)P \\ &= P^{-1}d(A)P. \end{aligned}$$

Dus vir $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, waar $B = P^{-1}AP$, sal $d(B) = P^{-1}d(A)P$. Gevolglik uit

$$0_{n\times n} = m_B(B) = P^{-1}m_B(A)P$$

sien ons $m_B(A) = 0_{n\times n}$ en op 'n soortgelyke manier dat $m_A(B) = 0_{n\times n}$. Dus uit bostaande lemma weet ons m_B is deelbaar deur m_A en m_A is deelbaar deur m_B. Hieruit volg dat $m_B = m_A$ aangesien beide leidende koëffisiënt 1 het. $\square$

Stelling 3.35. *Veronderstel $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ het slegs reële inskrywings. Dan $m_A \in \mathbb{R}[x]$.*

Bewys. Laat $m_A(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{p-1}x^{p-1} + x^p$ met $a_i \in \mathbb{C}$ vir alle $0 \leq i \leq p-1$. Ons definieer $\overline{m_A}(x) := \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \overline{a_2}x^2 + ... + \overline{a_{p-1}}x^{p-1} + x^p \in \mathbb{C}[x]$. Vanuit $m_A(A) = 0_{n\times n}$ volg

$$\begin{aligned} 0_{n\times n} &= \overline{0}_{n\times n} = \overline{m_A(A)} = \overline{a_0 + a_1A + a_2A^2 + ... + a_{p-1}A^{p-1} + A^p} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1}A + \overline{a_2}A^2 + ... + \overline{a_{p-1}}A^{p-1} + A^p = \overline{m_A}(A). \end{aligned}$$

Laat $q(x) := m_A(x) - \overline{m_A}(x)$. Veronderstel $q \neq 0$. Aangesien beide m_A en $\overline{m_A}$ monies is, volg dat $\deg(q(\cdot)) < \deg(m_A(\cdot))$. Dit is teenstrydig aangesien $q(A) = m_A(A) - \overline{m_A}(A) = 0_{n\times n}$. Gevolglik sien ons $q = 0$ en dus dat $a_i = \overline{a_i}$ vir alle $0 \leq i \leq p-1$. Dus $m_A \in \mathbb{R}[x]$. $\square$

Uit bogenoemde sien ons dat die minimaalpolinoom van 'n reële matriks nie koëffisiënte buite $\mathbb{R}$ kan hê nie. Selfs wanneer ons hierdie matriks beskou as een met inskrywings vanuit $\mathbb{C}$, verander die minimaalpolinoom nie - die koëffisiënte daarvan bly binne $\mathbb{R}$. Ons weet dus nou dat die minimaalpolinoom oor $\mathbb{R}$ van 'n reële matriks, ook die minimaalpolinoom oor $\mathbb{C}$ is van hierdie matriks, en hierdie polinoom het reële koëffisiënte.

3.7 Toeplitz matrikse

Definisie 3.36. 'n Matriks A in $\mathbb{F}^{n\times n}$ word 'n *Toeplitz matriks* genoem as al die inskrywings van A konstant is op die diagonale parallel aan die hoofdiagonaal, oftewel

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \dots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

As die ij-de element van A aangedui word met $A_{i,j}$, dan $A_{i,j} = A_{i+1,j+1} = a_{j-i}$.

Definieer

$$S_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}. \tag{3.1}$$

Dan is 'n matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 'n Toeplitz matriks as en slegs as A geskryf kan word in die vorm

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} a_{-i}(S_n^T)^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (S_n)^i.$$

Ons dui die versameling Toeplitz matrikse in $\mathbb{F}^{n\times n}$ met $\mathcal{T}_n$ aan en die versameling bo-driehoekige Toeplitz matrikse in $\mathbb{F}^{n\times n}$ met $\mathcal{T}_{+,n}$. 'n Jordan-blok, $J_k(\lambda) = \lambda I_k + S_k$, is 'n voorbeeld van 'n bo-driehoekige Toeplitz matriks. Uit bogenoemde blyk dat 'n bo-driehoekige Toeplitz matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ geskryf kan word as 'n polinoom in S_n, nl.

$$A = a_0 I_n + a_1 S_n + \dots + a_{n-1} S_n^{n-1}.$$

Lemma 3.37. *'n $n \times n$ Matriks X is in $\mathcal{T}_{+,n}$ as en slegs as $XS_n = S_n X$.*

Bewys. Veronderstel $X = [x_i]_{i=0,\dots,n-1}$ is in $\mathcal{T}_{+,n}$. Dus $X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i (S_n)^i$. Dan volg dat

$$XS_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i (S_n)^i S_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i (S_n)^{i+1} = S_n \sum_{i=0}^{n-1} x_i (S_n)^i = S_n X.$$

Hiermee is die een rigting van die lemma bewys.

Vir die omgekeerde, veronderstel $XS_n = S_n X$. Ons bewys met induksie dat X 'n bo-driehoekige Toeplitz matriks is. Vir $n = 1$ volg $\mathcal{T}_{+,n} = \mathbb{F}^{1\times 1}$ en dus $X \in \mathcal{T}_{+,n}$. Die stelling geld dus vir $n = 1$. Veronderstel dat elke $(n-1)\times(n-1)$ matriks $\widetilde{X}$, wat voldoen aan $\widetilde{X} S_{n-1} = S_{n-1}\widetilde{X}$, in $\mathcal{T}_{+,n}$ is.

Stel $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ só dat $XS_n = S_n X$. Skryf

$$X = \begin{bmatrix} \widetilde{X} & \vec{x}_{1,n} \\ \vec{x}_{n,1}^T & x_{n,n} \end{bmatrix} \text{ en } S_n = \begin{bmatrix} S_{n-1} & e_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 0 \end{bmatrix}, \text{ waar}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{1,n} &= \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_{n,1} = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,n-1} \end{bmatrix}, \quad e_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\widetilde{X} &= \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n-1} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dan volg vanuit ons aanname dat

$$\begin{aligned}
0_{n\times n} &= XS_n - S_nX = \begin{bmatrix} \widetilde{X} & \vec{x}_{1,n} \\ \vec{x}_{n,1}^T & x_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{n-1} & e_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{n-1} & e_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{X} & \vec{x}_{1,n} \\ \vec{x}_{n,1}^T & x_{n,n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \widetilde{X}S_{n-1} & \widetilde{X}e_{n-1} \\ \vec{x}_{n,1}^T S_{n-1} & \vec{x}_{n,1}^T e_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{n-1}\widetilde{X} + e_{n-1}\vec{x}_{n,1}^T & S_{n-1}\vec{x}_{1,n} + e_{n-1}x_{n,n} \\ 0_{n-1}^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\widetilde{X}S_{n-1} - S_{n-1}\widetilde{X}) - e_{n-1}\vec{x}_{n,1}^T & \widetilde{X}e_{n-1} - S_{n-1}\vec{x}_{1,n} - e_{n-1}x_{n,n} \\ \vec{x}_{n,1}^T S_{n-1} & \vec{x}_{n,1}^T e_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ons sien dat $\vec{x}_{n,1}^T S_{n-1} = 0_{n-1}^T$ en $\vec{x}_{n,1}^T e_{n-1} = 0$. Hieruit volg $\vec{x}_{n,1}^T = 0_{n-1}^T$. Die identiteit in die linker hoek bo wys dus $\widetilde{X}S_{n-1} = S_{n-1}\widetilde{X}$. Uit ons aanname kry ons dan dat $\widetilde{X}$ bo-driehoekig Toeplitz is en hieruit volg dat X bo-driehoekig is. Vanuit $\widetilde{X}e_{n-1} - e_{n-1}x_{n,n} = S_{n-1}\vec{x}_{1,n}$ volg

$$\begin{bmatrix} x_{1,n-1} \\ \vdots \\ x_{n-2,n-1} \\ x_{n-1,n-1} - x_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\widetilde{X}$ 'n Toeplitz matriks is, weet ons dat die diagonaal van $\widetilde{X}$ konstant is en sien ons uit $x_{n-1,n-1} = x_{n,n}$ dat X se diagonaal ook konstant is. Verder sien ons uit bostaande dat $x_{i,j} = x_{i+1,j+1}$, $1 \leq i, j \leq n-1$, en gevolglik is X 'n Toeplitz matriks. Die omgekeerde van die stelling geld dus vir n wanneer ons aanneem dat dit geld vir $n-1$. Hieruit kan ons aflei dat die omgekeerde van die stelling geld vir alle natuurlike getalle n. □

Proposisie 3.38. *Die versameling $\mathcal{T}_{+,n}$ is gelyk aan $\mathbb{F}[S_n]$. Dit is 'n kommutatiewe algebra in $\mathbb{F}^{n\times n}$. Verder, $T \in \mathcal{T}_{+,n}$ is nie-singulier as en slegs as die inskrywings op die diagonaal van T nie-nul is. In die geval geld $T^{-1} \in \mathcal{T}_{+,n}$.*

Bewys. Ons sien vanuit die opmerking voor Lemma 3.37 dat $\mathcal{T}_{+,n} = \mathbb{F}[S_n]$. Gevolglik is $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{T}_{+,n}$ vir $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{+,n}$ en alle skalare α, β. Laat $T_1 = p_1(S_n)$ en $T_2 = p_2(S_n)$, vir $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$. Dan, $T_1T_2 = p_1 \cdot p_2(S_n)$ aangesien $S_n^l = 0_{n\times n}$ vir $l \geq n$. Gevolglik sal $T_1T_2 = p_1 \cdot p_2(S_n) = p_2 \cdot p_1(S_n) = T_2T_1$. Hiermee is bewys dat $\mathcal{T}_{+,n}$ 'n kommutatiewe algebra is.

Neem $T \in \mathcal{T}_{+,n}$, waar T nie-singulier is. Dit is duidelik dat die inskrywings op die diagonaal van T, wat konstant is, dan nie-nul is aangesien die eiewaardes van T op sy diagonaal voorkom. Ons weet vanuit Lemma 3.37 dat $TS_n = S_nT$. Hierdie matriksvergelyking geld as en slegs as $S_nT^{-1} = T^{-1}S_n$. Gevolglik sien ons uit Lemma 3.37 dat $T^{-1} \in \mathcal{T}_{+,n}$. □

4 Die dubbel kommutant van 'n matriks

Die resultate in hierdie hoofstuk is gebaseer op hoofstuk 5-6 in [11]. Ons beskou twee gevalle. Die eerste waar $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ en tweedens waar $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Die resultate vir $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kan maklik uitgebrei word sodat dit geld vir 'n algemene algebraïese geslote liggaam.

Definisie 4.1. Ons definieer die *enkel* en *dubbel kommutant* van 'n matriks $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ as die versamelings

$$\begin{aligned}\{A\}' &:= \{C \in \mathbb{F}^{n\times n} : AC = CA\},\\ \{A\}'' &:= \{D \in \mathbb{F}^{n\times n} : CD = DC \text{ vir alle } C \in \{A\}'\}.\end{aligned}$$

Aangesien $A \in \{A\}'$ volg $\{A\}'' \subseteq \{A\}'$. Vanuit hierdie insluiting volg dan ook dat $\{A\}''$ 'n kommutatiewe versameling is.

Die volgende stelling is die hoofresultaat van die hoofstuk.

Stelling 4.2. *Laat $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ vir $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ of $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Dan $\mathbb{F}[A] = \{A\}''$.*

In die volgende afdeling gee ons enkele resultate wat geld vir beide $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ en $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Daarna kyk ons in Afdeling 4.2 na die versameling matrikse wat twee gegewe matrikse vervleg. Dit word gebruik in Afdeling 4.3 om 'n resultaat te bewys wat uiteindelik lei tot die bewys van Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. In die laaste afdeling bewys ons Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

4.1 Algemene inleidende resultate

Die een insluiting van Stelling 4.2 volg maklik. Neem $B \in \mathbb{F}[A]$, waar $B = p(A)$ met $p \in \mathbb{F}[x]$. As $XA = AX$ vir 'n matriks $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$, dan sal $Xp(A) = p(A)X$. Dus $B = p(A) \in \{A\}''$ en daarom volg $\mathbb{F}[A] \subseteq \{A\}''$.

Dit is maklik om aan te toon dat vir elke $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, die versameling $\mathbb{F}[A]$ 'n deelruimte van $\mathbb{F}^{n\times n}$ is. Dieselfde geld vir $\{A\}''$, soos uit die volgende lemma blyk.

Lemma 4.3. *Vir enige deelversameling $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$ is*

$$\{\mathcal{D}\}' = \{C \in \mathbb{F}^{n\times n} : CD = DC \text{ vir alle } D \in \mathcal{D}\}$$

'n deelalgebra van $\mathbb{F}^{n\times n}$ wat geslote is onder die neem van inverses.

Bewys. Vir $0_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ volg $0_{n\times n}D = D0_{n\times n}$ vir elke $D \in \mathcal{D}$, dus $0_{n\times n} \in \{\mathcal{D}\}'$.

Neem $A, B \in \{\mathcal{D}\}'$, dan $(A+B)D = AD + BD = DA + BD = D(A+B)$ vir elke $D \in \mathcal{D}$. Dus $A + B \in \{\mathcal{D}\}'$.

Vir enige skalaar $c \in \mathbb{F}$ en vir $A \in \{\mathcal{D}\}'$ volg $(cA)D = c(AD) = c(DA) = D(cA)$ vir elke $D \in \mathcal{D}$. Dus $cA \in \{\mathcal{D}\}'$. Hiermee is bewys dat $\{\mathcal{D}\}'$ 'n deelruimte van $\mathbb{F}^{n\times n}$ is.

Neem $A, B \in \{\mathcal{D}\}'$, dan $(AB)D = A(BD) = A(DB) = (AD)B = (DA)B = D(AB)$ vir elke $D \in \mathcal{D}$. Dus $AB \in \{\mathcal{D}\}'$. Hiermee is bewys dat $\{\mathcal{D}\}'$ 'n deelalgebra van $\mathbb{F}^{n\times n}$ is.

Om te sien dat $\{\mathcal{D}\}'$ geslote is onder die neem van inverses, neem $A \in \{\mathcal{D}\}'$ waar A nie-singulier is. Dan volg $A^{-1}D = A^{-1}DAA^{-1} = A^{-1}ADA^{-1} = DA^{-1}$ vir elke $D \in \mathcal{D}$. Dus $A^{-1} \in \{\mathcal{D}\}'$. Hiermee is bewys dat $\{\mathcal{D}\}'$ geslote is onder die neem van inverses. □

Vir $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ weet ons nou dat $\mathbb{F}[A]$ en $\{A\}''$ deelruimtes is van $\mathbb{F}^{n\times n}$ en $\mathbb{F}[A] \subseteq \{A\}''$. Ons bewys hierdie twee deelruimtes is gelyk deur te wys $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A] = \dim_{\mathbb{F}}\{A\}''$. Die volgende stelling bepaal $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A]$.

Stelling 4.4 ([11], Stelling 5-18)**.** *Laat* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. *Dan* $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A] = \deg(m_A(\cdot))$.

Bewys. Ons weet vanuit die opmerking na Stelling 3.35 dat $m_A \in \mathbb{F}[x]$. Nou volg vanuit die delingsalgoritme dat vir enige $p \in \mathbb{F}[x]$ bestaan daar 'n unieke kwosiënt q en res r in $\mathbb{F}[x]$ só dat $p(x) = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$, waar $r = 0$ of $\deg(r(\cdot)) < \deg(m_A(\cdot))$. Verder volg dat $p(A) = r(A)$ aangesien $m_A(A) = 0_{n\times n}$. Dus

$$\mathbb{F}[A] = \{p(A) : \deg(p(\cdot)) < \deg(m_A(\cdot))\}.$$

Veronderstel $\deg(m_A(\cdot)) = k$, dan $\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}\} = \mathbb{F}[A]$. Gevolglik sal $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A]$ op die meeste k wees. Hieruit sien ons $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A] \leq \deg(m_A(\cdot))$.

Ons beweer dat as $\deg(m_A(\cdot)) = k$ dan is die versameling $I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}$ lineêr onafhanklik oor $\mathbb{F}$. Sou dit nie so wees nie, dan bestaan daar koëffisiënte $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $0 \leq i \leq k-1$, nie almal nul só dat $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + ... + \alpha_{k-1} A^{k-1} = 0_{n\times n}$. Daar bestaan dus 'n polinoom $\tilde{p}(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{k-1} x^{k-1}$, $\tilde{p} \neq 0$, met laer graad as m_A, só dat $\tilde{p}(A) = 0_{n\times n}$. Aangesien dit teenstrydig is met die definisie van die minimaalpolinoom, weet ons die versameling $I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}$ is linieêr onafhanklik oor $\mathbb{F}$. Dit volg dat $\dim \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}\} = \deg(m_A(\cdot))$ en aangesien $\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}\}$ 'n deelruimte van $\mathbb{F}[A]$ is, moet

$$k = \dim \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{I_n, A, A^2, ..., A^{k-1}\} \leq \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A].$$

Dus $\deg(m_A(\cdot)) \leq \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A]$. Hieruit sien ons dat $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[A] = \deg(m_A(\cdot))$. □

Voor ons $\dim_{\mathbb{F}}\{A\}''$ kan bereken moet ons die struktuur van matrikse in $\{A\}''$ ten opsigte van A se Jordan ontbinding bepaal. Ons doen dit afsonderlik vir $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ en $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

4.2 Die matrikse wat twee gegewe matrikse vervleg

Ons neem nou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ en kyk eers na die volgende probleem: Gegee $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ en $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, beskryf die matrikse $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ wat C en D vervleg, dus ons kyk na alle matrikse X só dat

$$CX = XD.$$

Skryf C en D in hul Jordan ontbinding:

$$\begin{aligned} C &= PJ_CP^{-1} \text{ met } J_C = \operatorname{diag}(J_{p_1}(\lambda_1), J_{p_2}(\lambda_2), ..., J_{p_u}(\lambda_u)),\ P \in GL(m, \mathbb{C}), && (4.1)\\ D &= QJ_DQ^{-1} \text{ met } J_D = \operatorname{diag}(J_{q_1}(\mu_1), J_{q_2}(\mu_2), ..., J_{q_v}(\mu_v)),\ Q \in GL(n, \mathbb{C}). && (4.2)\end{aligned}$$

Ons laat toe dat $\lambda_i = \lambda_j$ of $\mu_i = \mu_j$ vir $i \neq j$. Die volgende stelling beskryf die oplossings X van $CX = XD$.

Stelling 4.5 ([11], Stelling 5-17)**.** *Laat* $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *en* $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *wees soos in* (4.1) *en* (4.2). *Die matriksvergelyking* $CX = XD$ *het 'n nie-nul oplossing as en slegs as* C *en* D *'n gemeenskaplike eiewaarde het. Die oplossings* X *van* $CX = XD$ *word dan gegee deur* $X = PYQ^{-1}$, *waar* Y *die* *oplossings van $J_C Y = Y J_D$ is, dit wil sê; $Y = [Y_{ij}]_{i=1,..,v}^{j=1,...,u}$ met blokke Y_{ij} van dieselfde grootte as die blokke van J_C en J_D, en vir alle i, j, word die $p_i \times q_j$ submatriks Y_{ij} gegee deur*

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0_{p_i \times q_j} \ \textit{as}\ \lambda_i \neq \mu_j, \\ \\ \begin{bmatrix} 0_{p_i \times (q_j - p_i)} & T \end{bmatrix} \ \textit{vir 'n}\ T \in \mathcal{T}_{+,p_i} \ \textit{as}\ \lambda_i = \mu_j,\ p_i \leq q_j, \\ \\ \begin{bmatrix} T \\ 0_{(p_i - q_j) \times q_j} \end{bmatrix} \ \textit{vir 'n}\ T \in \mathcal{T}_{+,q_j} \ \textit{as}\ \lambda_i = \mu_j,\ p_i \geq q_j. \end{cases}$$

Ons bewys eers die resultaat vir die geval waar C en D Jordan-blokke is. Eerste die geval waar C en D Jordan-blokke is met dieselfde eiewaarde. Daarna die geval waar C en D Jordan-blokke is met verskillende eiewaardes.

Definieer vir $n \in \mathbb{N}$ die matriks S_n soos in (3.1). Vir Jordan-blokke $J_p(\lambda)$ en $J_q(\mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, weet ons $J_p(\lambda) = \lambda I_p + S_p$ en $J_q(\mu) = \mu I_q + S_q$. Dit volg dus vir $X \in \mathbb{C}^{p \times q}$ dat

$$J_p(\lambda) X = X J_q(\mu) \iff (\lambda - \mu) X = X S_q - S_p X. \tag{4.3}$$

In die besonder, as $\lambda = \mu$ sal X die Jordan-blokke $J_p(\lambda)$ en $J_q(\lambda)$ vervleg as en slegs as X die matrikse S_p en S_q vervleg.

Lemma 4.6 ([11], Stelling 5-16)**.** *Laat $X \in \mathbb{C}^{p \times q}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan geld $J_p(\lambda) X = X J_q(\lambda)$ as en slegs as*

$$X = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0_{p \times (q-p)} & T \end{bmatrix} \ \textit{vir 'n}\ T \in \mathcal{T}_{+,p} \ \textit{as}\ p \leq q, \\ \\ \begin{bmatrix} T \\ 0_{(p-q) \times q} \end{bmatrix} \ \textit{vir 'n}\ T \in \mathcal{T}_{+,q} \ \textit{as}\ p \geq q. \end{cases}$$

Bewys. Ons weet vanuit (4.3) dat $J_p(\lambda) X = X J_q(\lambda)$ ekwivalent is aan $S_p X = X S_q$. Direkte berekening lewer

$$[S_p X]_{i,j} = \begin{cases} [X]_{i+1,j} \ \text{vir}\ i = 1, ..., p-1, \quad j = 1, ..., q, \\ 0 \quad \text{vir}\ i = p; \end{cases}$$

en

$$[X S_q]_{i,j} = \begin{cases} [X]_{i,j-1} \ \text{vir}\ i = 1, ..., p, \quad j = 2, ..., q, \\ 0 \quad \text{vir}\ j = 1. \end{cases}$$

Ons sien hieruit dat $S_p X = X S_q$ as en slegs as

$$\begin{aligned} [X]_{i,1} &= 0 \ \text{vir}\ 1 < i \leq p \quad \text{en} \quad [X]_{p,j} = 0 \ \text{vir}\ 1 \leq j < q, \ \text{asook} \\ [X]_{i+1,j+1} &= [X]_{i,j} \ \text{vir}\ 1 \leq i \leq p-1, \quad 1 \leq j \leq q-1. \end{aligned}$$

Hieruit volg dat X die verlangde vorm het. $\square$

Lemma 4.7. *Laat* $X \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *en* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *met* $\lambda \neq \mu$. *Dan* $J_p(\lambda)X = XJ_q(\mu)$ *as en slegs as* $X = 0_{p\times q}$.

Bewys. In die geval waar $X = 0_{p\times q}$, volg $J_p(\lambda)X = XJ_q(\mu)$. Hiermee is die een rigting bewys.

Vir die omgekeerde, neem aan $J_p(\lambda)X = XJ_q(\mu)$. Ons weet vanuit (4.3) dat hierdie aanname ekwivalent is aan $(\lambda - \mu)X = XS_q - S_pX$.

Ons wys deur induksie dat in die algemeen

$$(\lambda-\mu)^r X \quad = \quad \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k}, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Hier is $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}$ die binomiaal koëffisiënt

$$\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{r!}{k!(r-k)!} \quad \text{vir} \quad 0 \leq k \leq r.$$

Vir $r = 1$ volg (4.4) uit (4.3). Veronderstel $r \in \mathbb{N}$ só dat

$$(\lambda-\mu)^r X = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k}. \tag{4.5}$$

Dan

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\mu)^{r+1}X &= (\lambda-\mu)(\lambda-\mu)^r X \\
&= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k(\lambda-\mu)XS_q^{r-k} = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k(XS_q - S_pX)S_q^{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k+1} - \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^{k+1} X S_q^{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k+1} + \sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^{k+1} X S_q^{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k+1} + \sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k} \begin{pmatrix} r \\ k-1 \end{pmatrix} S_p^{k} X S_q^{r-k+1} \\
&= \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} XS_q^{r+1} + \sum_{k=1}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k+1} + \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k} \begin{pmatrix} r \\ k-1 \end{pmatrix} S_p^{k} X S_q^{r-k+1} \\
&\qquad + (-1)^{r+1} \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} S_p^{r+1} X \\
&= \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} XS_q^{r+1} + \sum_{k=1}^{r}(-1)^k \left(\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ k-1 \end{pmatrix} \right) S_p^k X S_q^{r-k+1} \\
&\qquad + (-1)^{r+1} \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} S_p^{r+1} X \\
&= \begin{pmatrix} r+1 \\ 0 \end{pmatrix} XS_q^{r+1} + \sum_{k=1}^{r}(-1)^k \begin{pmatrix} r+1 \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r-k+1} + (-1)^{r+1} \begin{pmatrix} r+1 \\ r+1 \end{pmatrix} S_p^{r+1} X \\
&= \sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k \begin{pmatrix} r+1 \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r+1-k}.
\end{aligned}
$$

Ons maak gebruik van Pascal se driehoeksidentiteit in die tweede laaste reël. Uit (4.5) het ons dus bewys $(\lambda-\mu)^{r+1}X = \sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k \begin{pmatrix} r+1 \\ k \end{pmatrix} S_p^k X S_q^{r+1-k}$. Dit volg nou met induksie dat (4.4) geld. Aangesien $S_p^p = 0_{p\times p}$ en $S_q^q = 0_{q\times q}$ volg dit dat

$$(\lambda-\mu)^r X = 0_{p\times q} \quad \text{vir enige} \quad r \geq p+q.$$

Uit $\lambda \neq \mu$ volg $X = 0_{p\times q}$. □

Bewys van Stelling 4.5. Laat $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dan volg

$$CX = XD \iff PJ_CP^{-1}X = XQJ_DQ^{-1} \iff J_C(P^{-1}XQ) = (P^{-1}XQ)J_D.$$

Laat $Y := P^{-1}XQ$, dan is $CX = XD$ ekwivalent aan $J_CY = YJ_D$. As ons Y in blokke Y_{ij} van grootte $p_i \times q_j$ opdeel, sien ons dat $J_CY = YJ_D$ as en slegs as

$$J_{p_i}(\lambda_i)Y_{ij} = Y_{ij}J_{q_j}(\mu_j), \quad i = 1, 2, ..., u, \quad j = 1, 2, ..., v.$$

Die formules vir Y_{ij} in Stelling 4.5 volg nou direk uit Lemmas 4.6 - 4.7. In die besonder, as $\lambda_i \neq \mu_j$ vir elke i, j is $Y_{ij} = 0_{p_i \times q_j}$ die enigste oplossing vir $J_{p_i}(\lambda_i)Y_{ij} = Y_{ij}J_{q_j}(\mu_j)$ en dit volg dat $Y = 0_{m\times n}$ die enigste matriks is wat $J_C Y = Y J_D$ bevredig. Dit wys dat $X = 0_{m\times n}$ die enigste oplossing vir $CX = XD$ is as en slegs as C en D geen gemeenskaplike eiewaardes het nie. □

4.3 Die komplekse geval

Die volgende word benodig om Stelling 4.2 te bewys vir $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Ons neem aan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ is in sy Jordan ontbinding

$$\begin{aligned} &A = PJ_AP^{-1} \text{ met } J_A = \operatorname{diag}(J_1, ..., J_r), \text{ waar } J_i = \operatorname{diag}(J_{q_{i1}}(\lambda_i), ..., J_{q_{it_i}}(\lambda_i)), \\ &P \in GL(n, \mathbb{C}),\ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ as } i \neq j \text{ en } q_{i1} \geq q_{i2} \geq ... \geq q_{it_i} \text{ vir alle } 1 \leq i \leq r. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Lemma 4.8. *Gegee $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ met Jordan ontbinding soos in (4.6), dan kan m_A weergegee word as*

$$m_A(x) = \Pi_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{q_{i1}}.$$

In die besonder, $\deg(m_A(\cdot)) = q_{11} + q_{21} + ... + q_{r1}$.

Bewys. Vir enige polinoom $p \in \mathbb{C}[x]$ volg

$$p(A) \quad = \quad P \operatorname{diag}(p(J_1), ..., p(J_r))P^{-1}, \text{ waar } p(J_i) = \operatorname{diag}(p(J_{q_{i1}}(\lambda_i)), ..., p(J_{q_{it_i}}(\lambda_i))).$$

Ons sien dus dat $p(A) = 0_{n\times n}$ as en slegs as $p(J_{q_{ik}}(\lambda_i)) = 0_{q_{ik}\times q_{ik}}$, vir alle $1 \leq i \leq r$ en $1 \leq k \leq t_i$. Dit volg dat $S_{q_{ik}}^{q_{i1}} = (J_{q_{ik}}(\lambda_i) - \lambda_i I_{q_{ik}})^{q_{i1}} = 0_{q_{ik}\times q_{ik}}$, vir alle $1 \leq i \leq r$ en $1 \leq k \leq t_i$, aangesien $q_{i1} \geq q_{ik}$. Hieruit sien ons dat vir $\tilde{p}(x) := \Pi_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{q_{i1}}$ volg dat $\tilde{p}(A) = 0_{n\times n}$. Nou weet ons vanuit Lemma 3.33 dat $\tilde{p}$ deelbaar is deur m_A. Dus $m_A(x) = \Pi_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}$, waar $m_i \leq q_{i1}$. Vanuit $m_A(A) = 0_{n\times n}$ weet ons $m_A(J_{q_{i1}}(\lambda_i)) = 0_{q_{i1}\times q_{i1}}$, vir alle $1 \leq i \leq r$. Dit moet dus ook die geval wees dat die minimaalpolinoom van A deelbaar is deur die minimaalpolinoom van $J_{q_{i1}}(\lambda_i)$. Aangesien $m_{J_{q_{i1}}(\lambda_i)}(x) = (x - \lambda_i)^{q_{i1}}$ weet ons $q_{i1} \leq m_i$, vir alle $1 \leq i \leq r$. Hieruit volg $q_{i1} = m_i$, vir alle $1 \leq i \leq r$. Dus $m_A(x) = \Pi_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{q_{i1}}$. Dit impliseer dat $\deg(m_A(\cdot)) = q_{11} + q_{21} + ... + q_{r1}$. □

Proposisie 4.9. *Gegee $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ met Jordan ontbinding soos in (4.6). 'n Matriks X is in $\{A\}'$ as en slegs as $X = P \operatorname{diag}(X_1, ..., X_r)P^{-1}$ met $X_i \in \{J_i\}'$, vir $1 \leq i \leq r$.*

Bewys. Veronderstel $X \in \{A\}'$. Dan volg uit

$$X\left(PJ_AP^{-1}\right) = XA = AX = \left(PJ_AP^{-1}\right)X, \quad \text{ dat } \quad (P^{-1}XP)J_A = J_A(P^{-1}XP).$$

Ons deel $P^{-1}XP = [X_{ij}]_{i=1,...,r}^{j=1,...,r}$ op in blokke X_{ij} van dieselfde groottes as die van J_A. Dan gee $(P^{-1}XP)J_A = J_A(P^{-1}XP)$ dat $J_iX_{ij} = X_{ij}J_j$, $1 \leq i, j \leq r$. Vanuit Stelling 4.5 weet ons vir $i \neq j$ volg $X_{ij} = 0_{q_i\times q_j}$, met $q_i = \sum_{k=1}^{t_i} q_{ik}$, aangesien $\lambda_i \neq \lambda_j$. Gevolglik is die nie-diagonaal blokke van $P^{-1}XP$ nul matrikse. Dus $X = P \operatorname{diag}(X_1, X_2, ..., X_r)P^{-1}$, met $X_i = X_{ii} \in \{J_i\}'$, $1 \leq i \leq r$.

Vir die omgekeerde, veronderstel $X = P \operatorname{diag}(X_1, ..., X_r)P^{-1}$ en $X_i \in \{J_i\}'$ vir $1 \leq i \leq r$. Vanuit $XA = P \operatorname{diag}(X_1J_1, ..., X_rJ_r)P^{-1}$ en $X_i \in \{J_i\}'$, $1 \leq i \leq r$, volg

$$XA = P \operatorname{diag}(X_1J_1, ..., X_rJ_r)P^{-1} = P \operatorname{diag}(J_1X_1, ..., J_rX_r)P^{-1} = AX.$$

Gevolglik $X \in \{A\}'$. □

Stelling 4.10. *Gegee $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ met Jordan ontbinding soos in* (4.6)*. 'n Matriks B is in $\{A\}''$ as en slegs as $B = P\,\mathrm{diag}(B_1, ..., B_r)P^{-1}$ met $B_i = \mathrm{diag}(p_i(S_{q_{i1}}), ..., p_i(S_{q_{it_i}}))$ vir polinome $p_i \in \mathbb{C}[x]$, met $\deg(p_i(\cdot)) < q_{i1}$ vir alle $1 \le i \le r$. Die polinome $p_1, ..., p_r$ en die matriks $B \in \{A\}''$ bepaal mekaar uniek.*

Bewys. Ons deel die bewys in vyf dele.

I: Vir die een rigting, veronderstel daar bestaan polinome $p_i \in \mathbb{C}[x]$, met $\deg(p_i(\cdot)) < q_{i1}$ vir alle $1 \le i \le r$, só dat

$$B = P\,\mathrm{diag}(B_1, ..., B_r)P^{-1}, \quad \text{met} \quad B_i = \mathrm{diag}(p_i(S_{q_{i1}}), ..., p_i(S_{q_{it_i}})).$$

Vir $X \in \{A\}'$ weet ons uit Proposisie 4.9 dat

$$X = P\,\mathrm{diag}(X_1, ..., X_r)P^{-1}, \quad \text{met} \quad X_i \in \{J_i\}',\ 1 \le i \le r.$$

Vir B om in $\{A\}''$ te wees moet ons wys $B \in \{X\}'$. Dit gebeur as en slegs as $X_iB_i = B_iX_i$ vir elke $1 \le i \le r$. Kies 'n vaste i. As ons J_i herskryf as $J_i = \lambda_i I_{q_i} + \tilde{J}_i$, met $\tilde{J}_i := \mathrm{diag}(S_{q_{i1}}, ..., S_{q_{it_i}})$ en $q_i = \sum_{k=1}^{t_i} q_{ik}$, dan $B_i = p_i(\tilde{J}_i)$. Omdat $X_i \in \{J_i\}'$, geld $X_i \in \{\tilde{J}_i\}'$ en dus sal $X_i \in \{p_i(\tilde{J}_i)\}' = \{B_i\}'$. Dan ook $B_i \in \{X_i\}'$. Hieruit sien ons dat $B_i \in \{X_i\}'$ vir elke $1 \le i \le r$ en gevolglik $B \in \{X\}'$. Dit geld vir elke $X \in \{A\}'$ en dus $B \in \{A\}''$. Hiermee is die een rigting van die stelling bewys.

II: Vir die omgekeerde, veronderstel $B \in \{A\}''$. Aangesien $\{A\}'' \subseteq \{A\}'$ volg $B \in \{A\}'$ en uit Proposisie 4.9 volg

$$B = P\,\mathrm{diag}(B_1, ..., B_r)P^{-1}, \quad \text{met} \quad B_i \in \{J_i\}',\ 1 \le i \le r.$$

Vir $X \in \{A\}'$ volg dieselfde vorm

$$X = P\,\mathrm{diag}(X_1, ..., X_r)P^{-1}, \quad \text{met} \quad X_i \in \{J_i\}',\ 1 \le i \le r.$$

Aangesien $B \in \{A\}''$ volg $BX = XB$ vir elke $X \in \{A\}'$. Dit gebeur wanneer $B_i \in \{X_i\}'$ vir elke $X_i \in \{J_i\}'$, $1 \le i \le r$. Kies 'n vaste i. Laat $B_i = [B^{(i)}_{jk}]^{k=1,...,t_i}_{j=1,...,t_i}$. Om te wys B_i het die regte struktuur kies ons spesifieke $X_i \in \{J_i\}'$.

III: Ons kies nou $X_i = \mathrm{diag}(J_{q_{i1}}(\rho_1), ..., J_{q_{it_i}}(\rho_{t_i}))$ met $\rho_j \in \mathbb{C}$, $\rho_j \ne \rho_k$ vir $j \ne k$, $1 \le j, k \le t_i$. Dit volg maklik dat $X_i \in \{J_i\}'$ aangesien elke blokmatriks in X_i en J_i bo-driehoekige Toeplitz matrikse is en matrikse van hierdie tipe met mekaar kommuteer. Vanuit $B_i \in \{X_i\}'$ volg

$$B^{(i)}_{jk} J_{q_{ik}}(\rho_k) = J_{q_{ij}}(\rho_j) B^{(i)}_{jk} \quad \text{vir} \quad j, k = 1, ..., t_i.$$

Aangesien $\rho_k \ne \rho_j$ as $k \ne j$ volg nou uit Lemmas 4.6 en 4.7 dat

$$B^{(i)}_{jk} = 0_{q_{ij}\times q_{ik}} \quad \text{as} \quad j \ne k \quad \text{en} \quad B^{(i)}_{jj} \in \mathcal{T}_{+,q_{ij}}, \quad j = 1, ..., t_i.$$

Laat $B^{(i)}_{jj} =: T_j = p^{(i)}_j(S_{q_{ij}}) \in \mathcal{T}_{+,q_{ij}}$ vir $p^{(i)}_j \in \mathbb{C}[x]$ met $\deg(p^{(i)}_j(\cdot)) < q_{ij}$. Dan geld $B_i = \mathrm{diag}(T_1, ..., T_{t_i})$.

IV: In hierdie deel wys ons dat $T_j = p_1^{(i)}(S_{q_{ij}})$ vir $j = 1, ..., t_i$. Dit bewys B_i het die verlangde struktuur. Laat $U_{j+1,j}^{(i)}$ die matriks wees, verdeel op dieselfde wyse as J_i, waar al die elemente nul is behalwe die $q_{i(j+1)} \times q_{ij}$ blok in die $(j+1, j)$ posisie, wat gegee word deur $[0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}]$. Na direkte berekening sien ons $J_i U_{j+1,j}^{(i)}$ lewer die matriks met nulle oral behalwe vir die $(j+1, j)$ posisie wat gegee word deur

$$J_{q_{i(j+1)}}(\lambda_i)[0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] = [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ J_{q_{i(j+1)}}(\lambda_i)].$$

Dieselfde volg vir $U_{j+1,j}^{(i)} J_i$ wat die matriks lewer met nulle oral behalwe in die $(j+1, j)$ posisie wat gegee word deur

$$[0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] J_{q_{ij}}(\lambda_i) = [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ J_{q_{i(j+1)}}(\lambda_i)].$$

Dus $J_i U_{j+1,j}^{(i)} = U_{j+1,j}^{(i)} J_i$. Gevolglik weet ons $U_{j+1,j}^{(i)} \in \{J_i\}'$ en dus moet $B_i U_{j+1,j}^{(i)} = U_{j+1,j}^{(i)} B_i$. Na direkte berekening sien ons

$$B_i U_{j+1,j}^{(i)} = U_{j+1,j}^{(i)} B_i \iff T_{j+1}[0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] = [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] T_j.$$

.

Laat $T_j := \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} & T_{22} \end{bmatrix}$, waar T_{22} van grootte $q_{i(j+1)} \times q_{i(j+1)}$ is. Dan

$$\begin{aligned} [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ T_{22}] &= [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} & T_{22} \end{bmatrix} \\ &= [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] T_j \\ &= T_{j+1}[0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ I_{q_{i(j+1)}}] \\ &= [0_{q_{i(j+1)} \times (q_{ij} - q_{i(j+1)})} \ T_{j+1}]. \end{aligned}$$

Hieruit sien ons $T_{22} = T_{j+1}$. Aangesien T_j en T_{j+1} bo-driehoekige Toeplitz matrikse is en T_{j+1} in T_j se $q_{i(j+1)} \times q_{i(j+1)}$ regter onderhoek verskyn volg dit dat

$$T_{j+1} = p_j^{(i)}(S_{q_{i(j+1)}}), \ \text{vir } j = 1, ..., t_i - 1.$$

Gevolglik kry ons $T_j = p_1^{(i)}(S_{q_{ij}})$ vir elke j. Definieer nou $p_i := p_1^{(i)}$. Dan $B_i = \operatorname{diag}(p_i(S_{q_{i1}}), ..., p_i(S_{q_{it_i}}))$.

Hieruit sien ons vir $B \in \{A\}''$ volg

$$\begin{aligned} &B = P \operatorname{diag}(B_1, ..., B_r) P^{-1}, \ \text{waar } B_i = \operatorname{diag}(p_i(S_{q_{i1}}), ..., p_i(S_{q_{it_i}})), \\ &\text{vir polinome } p_i \in \mathbb{C}[x], \ \text{met} \deg(p_i(\cdot)) < q_{i1}, \ 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

V: Laastens wys ons dat die matriks B en die polinome $p_i \in \mathbb{C}[x]$, $1 \leq i \leq r$, mekaar uniek bepaal. Om dit te sien maak ons gebruik van die feit dat $B = P \operatorname{diag}(B_1, ..., B_r) P^{-1}$ en die matrikse B_i, $1 \leq i \leq r$, blok-diagonaalmatrikse is met elke blokmatriks 'n bo-driehoekige Toeplitz matriks. Meer nog, weet ons die eerste bo-driehoekige Toeplitz matriks in elke B_i, $1 \leq i \leq r$, is die grootste en bepaal die inskrywings van die ander opvolgende bo-driehoekige Toeplitz matrikse in B_i. Die koëffisiënte van elke p_i, $1 \leq i \leq r$, word dus uniek bepaal deur die konstante inskrywing langs elke diagonaal van die eerste bo-driehoekige Toeplitz matriks in B_i. Hiermee is die stelling bewys. $\square$

Bewys van Stelling 4.2. ([11], Stelling 5-20) Ons weet vanuit bostaande stelling dat $B \in \{A\}''$ die volgende vorm het

$$\begin{aligned} &B = P\,\mathrm{diag}(B_1, ..., B_r)P^{-1}, \text{ waar } B_i = \mathrm{diag}(p_i(S_{q_{i1}}), ..., p_i(S_{q_{it_i}})), \\ &\text{vir polinome } p_i \in \mathbb{C}[x], \text{ met} \deg(p_i(\cdot)) < q_{i1}, \ 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Ons het in bostaande bewys gesien dat elke B_i, $1 \leq i \leq r$, lineêr afhanklik is van q_{i1} parameters. Dus $\dim_{\mathbb{C}}\{A\}'' = \sum_{i=1}^{r} q_{i1}$ en uit Lemma 4.8 weet ons $\deg(m_A(\cdot)) = \sum_{i=1}^{r} q_{i1}$. Gevolglik $\dim_{\mathbb{C}}\{A\}'' = \deg(m_A(\cdot)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[A]$, volgens Stelling 4.4 en hieruit sien ons $\mathbb{C}[A] = \{A\}''$. □

Ons kan Stelling 4.10 herformuleer in terme van bo-driehoekige Toeplitz matrikse:

Stelling 4.11. *Gegee $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ met Jordan ontbinding soos in (4.6). Dan volg $B \in \{A\}''$ as en slegs as $B = P\,\mathrm{diag}(B_1, ..., B_r)P^{-1}$, waar $B_i = \mathrm{diag}(T_1^{(i)}, ..., T_{t_i}^{(i)})$ met $T_k^{(i)} \in \mathcal{T}_{+,q_{ik}}$, waar $T_k^{(i)}$ die $q_{ik} \times q_{ik}$ linker-bohoek van $T_1^{(i)}$ is, vir elke $1 \leq k \leq t_i$ en $1 \leq i \leq r$.*

4.4 Die reële geval

In hierdie afdeling bewys ons Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ons tref nou onderskeid tussen die reële en komplekse enkel en dubbel kommutant van 'n reële vierkantige matriks.

Definisie 4.12. Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ laat

$$\{A\}'_{\mathbb{R}} := \{C \in \mathbb{R}^{n\times n} : AC = CA\} \quad \text{en} \quad \{A\}'_{\mathbb{C}} := \{C \in \mathbb{C}^{n\times n} : AC = CA\}.$$

Laat ook

$$\begin{aligned} \{A\}''_{\mathbb{R}} &:= \{D \in \mathbb{R}^{n\times n} : CD = DC \text{ vir alle } C \in \{A\}'_{\mathbb{R}}\}, \\ \{A\}''_{\mathbb{C}} &:= \{D \in \mathbb{C}^{n\times n} : CD = DC \text{ vir alle } C \in \{A\}'_{\mathbb{C}}\}. \end{aligned}$$

Ons sien $\{A\}'_{\mathbb{R}} = \{A\}'_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{R}}$ aangesien $A \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$.

Om Stelling 4.2 te bewys vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ is dit voldoende om te wys $\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \deg(m_A(\cdot))$, aangesien ons in Afdeling 4.1 gewys het $\mathbb{R}[A] \subseteq \{A\}''_{\mathbb{R}}$ en $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[A] = \deg(m_A(\cdot))$. Hierdie verlangde identiteit word gegee in Proposisie 4.16. Ons benodig die volgende resultate om dit te kan bewys.

Lemma 4.13. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ volg $\{A\}'_{\mathbb{C}} = \{A\}'_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}'_{\mathbb{R}}$.*

Bewys. Om die eerste insluiting te bewys, neem $C \in \{A\}'_{\mathbb{C}}$. Daar bestaan unieke matrikse $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ só dat $C = C_1 + \mathrm{i}C_2$. Aangesien $AC = CA$ volg

$$AC_1 + \mathrm{i}AC_2 = A(C_1 + \mathrm{i}C_2) = (C_1 + \mathrm{i}C_2)A = C_1A + \mathrm{i}C_2A.$$

Hieruit sien ons $AC_i = C_iA$, vir $i = 1, 2$. Ons weet $C_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en aangesien C_i met A kommuteer volg $C_i \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$, vir $i = 1, 2$. Dus $\{A\}'_{\mathbb{C}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}'_{\mathbb{R}}$.

Vir die omgekeerde, neem $C_1, C_2 \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$. Definieer $C := C_1 + \mathrm{i}C_2$, dus $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Aangesien $\{A\}'_{\mathbb{R}} = \{A\}'_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{C}}$ en $\{A\}'_{\mathbb{C}}$ 'n deelruimte van $\mathbb{C}^{n\times n}$ is, volgens Lemma 4.3, volg $C \in \{A\}'_{\mathbb{C}}$. Gevolglik $\{A\}'_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}'_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{C}}$. Hiermee is bewys dat $\{A\}'_{\mathbb{C}} = \{A\}'_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}'_{\mathbb{R}}$. □

Lemma 4.14. *Vir* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *volg* $\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bewys. Om die een insluiting te bewys, neem $D \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Laat $C \in \{A\}'_{\mathbb{C}}$. Uit bostaande lemma weet ons $C = C_1 + \mathrm{i}C_2$ vir $C_i \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$, vir $i = 1, 2$. Ons sien uit $C_iD = DC_i$, vir $i = 1, 2$, dat

$$CD = (C_1 + \mathrm{i}C_2)D = C_1D + \mathrm{i}C_2D = DC_1 + \mathrm{i}DC_2 = D(C_1 + \mathrm{i}C_2) = DC.$$

Dit wys dat $D \in \{A\}''_{\mathbb{C}}$. Aangesien $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ volg $D \in \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$. Dus $\{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$.

Vir die omgekeerde, neem $D \in \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$ en $C \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$. Aangesien $\{A\}'_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{C}}$ volg $DC = CD$. Dit wys D kommuteer met enige $C \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$. Dus $D \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Gevolglik $\{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Hiermee is bewys $\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$. □

Gevolg 4.15. *Vir* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *volg* $\mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{i}\mathbb{R}^{n\times n}$.

Bewys. Vanuit bostaande lemma weet ons $\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$. As ons hierdie vergelyking met i maal volg $\mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{i}\mathbb{R}^{n\times n}$. Aangesien $\{A\}''_{\mathbb{C}}$ 'n deelruimte van $\mathbb{C}^{n\times n}$ is, volg $\mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{C}} = \{A\}''_{\mathbb{C}}$, wat die identiteit bewys. □

Proposisie 4.16. *Vir* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *volg* $\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}}$. *In die besonder*

$$\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}}\{A\}''_{\mathbb{C}} = \deg(m_A(\cdot)).$$

Bewys. Uit Lemma 4.14 en Gevolg 4.15 kry ons

$$\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \{A\}''_{\mathbb{C}} \quad \text{en} \quad \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{i}\mathbb{R}^{n\times n} \subseteq \{A\}''_{\mathbb{C}}.$$

Uit Lemma 4.3 weet ons $\{A\}''_{\mathbb{C}}$ is 'n deelruimte van $\mathbb{C}^{n\times n}$ en daarom volg $\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}''_{\mathbb{C}}$, wat die een insluiting gee.

Vir die omgekeerde is dit voldoende om te wys dat $\dim_{\mathbb{C}}\{A\}''_{\mathbb{C}} \leq \dim_{\mathbb{C}}(\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}})$. Vanuit die feit dat elke komplekse vektorruimte van dimensie k, 'n reële vektorruimte van dimensie $2k$ is, volg

$$2\dim_{\mathbb{C}}\left(\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}}\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}}\right) = 2\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}}.$$

Dus, $\dim_{\mathbb{C}}(\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}}$.

In die vorige afdelings is bewys $\mathbb{R}[A] \subseteq \{A\}''_{\mathbb{R}}$ en $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[A] = \deg(m_A(\cdot))$ asook $\dim_{\mathbb{C}}\{A\}''_{\mathbb{C}} = \deg(m_A(\cdot))$, waar gebruik gemaak is van die feit dat $m_A \in \mathbb{F}[x]$ onafhanklik is van $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, volgens Stelling 3.35. Nou volg

$$\dim_{\mathbb{C}}\{A\}''_{\mathbb{C}} = \deg(m_A(\cdot)) = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[A] \leq \dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}}.$$

Hieruit kry ons die verlangde ongelykheid $\dim_{\mathbb{C}}\{A\}''_{\mathbb{C}} \leq \dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}}(\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}'')$. Gevolglik weet ons $\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{C}}$.

Verder volg $\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}}(\{A\}''_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}\{A\}''_{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{C}}\{A\}''_{\mathbb{C}} = \deg(m_A(\cdot))$. □

Die bewys van Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ volg nou direk uit $\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}} = \deg(m_A(\cdot))$.

Laastens gee ons 'n beskrywing vir matrikse B in $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ soos ons in Stelling 4.11 gedoen het vir $\{A\}''_{\mathbb{C}}$. Hiervoor gebruik ons A se reële Jordan ontbinding soos bespreek in Afdeling 3.5.

Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ veronderstel $\delta_1, ..., \delta_k, \overline{\delta}_1, ..., \overline{\delta}_k$ met $\delta_j = a_j + \mathrm{i}b_j$, $1 \leq j \leq k$, is die komplekse eiewaardes van A, waar $\delta_{j_1} \neq \delta_{j_2}$ as $j_1 \neq j_2$ en $\lambda_1, ..., \lambda_r$ is die reële eiewaardes van A, waar $\lambda_{i_1} \neq \lambda_{i_2}$ as $i_1 \neq i_2$. Dan lyk A se reële Jordan ontbinding soos volg:

$$\begin{aligned} &A = PJ_{\mathbb{R}}P^{-1} \quad \text{waar} \quad J_{\mathbb{R}} = \operatorname{diag}(C_1, ..., C_k, J_1, ..., J_r) \quad \text{met} \\ &C_j = \operatorname{diag}\Big(C_{n_{j1}}(a_j, b_j), ..., C_{n_{jt_j}}(a_j, b_j)\Big), \quad n_{j1} \geq ... \geq n_{jt_j}, \quad 1 \leq j \leq k, \\ &J_i = \operatorname{diag}\Big(J_{m_{i1}}(\lambda_i), ..., J_{m_{iv_i}}(\lambda_i)\Big), \quad m_{i1} \geq ... \geq m_{iv_i}, \quad 1 \leq i \leq r. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Laat $\mathcal{T}_{+,n,\mathbb{R}}$ die versameling van $n \times n$ reële bo-driehoekige Toeplitz matrikse voorstel. Dus $\mathcal{T}_{+,n,\mathbb{R}} = \mathcal{T}_{+,n} \cap \mathbb{R}^{n\times n}$. Definieer

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Let wel, $\mathcal{D}$ is 'n kommutatiewe deelalgebra van $\mathbb{R}^{2\times 2}$ waar elke $C(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$ identifiseer kan word met $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$, soos verduidelik in Afdeling 3.5. Gevolglik kan $\mathcal{D}$ identifiseer word met $\mathbb{C}$. Laat $\mathcal{T}_{+,2n,\mathcal{D}}$ die versameling van $2n \times 2n$ bo-driehoekige blok Toeplitz matrikse voorstel met inskrywings vanuit $\mathcal{D}$. Aangesien $\mathcal{D}$ 'n kommutatiewe algebra is, volg dit maklik dat $\mathcal{T}_{+,2n,\mathcal{D}}$ ook 'n kommutatiewe deelalgebra van $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ is, soos vir $\mathcal{T}_{+,n}$ bewys is in Proposisie 3.38.

Stelling 4.17. *Gegee $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met reële Jordan ontbinding soos in* (4.7). *Dan volg $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ as en slegs as*

$$\begin{aligned} &B = P \operatorname{diag}\Big(\tilde{B}_1, ..., \tilde{B}_k, B_1, ..., B_r\Big) P^{-1} \quad \textit{met} \\ &\tilde{B}_j = \operatorname{diag}\Big(\tilde{T}_1^{(j)}, ..., \tilde{T}_{t_j}^{(j)}\Big), \quad \tilde{T}_l^{(j)} \in \mathcal{T}_{+,2n_{jl},\mathcal{D}}, \quad 1 \leq l \leq t_j, \quad 1 \leq j \leq k, \\ &\qquad \textit{waar } \tilde{T}_l^{(j)} \textit{ die } 2n_{jl} \times 2n_{jl} \textit{ linker-bohoek van } \tilde{T}_1^{(j)} \textit{ is}, \\ &B_i = \operatorname{diag}\Big(T_1^{(i)}, ..., T_{v_i}^{(i)}\Big), \quad T_s^{(i)} \in \mathcal{T}_{+,m_{is}} \cap \mathbb{R}^{m_{is}\times m_{is}}, \quad 1 \leq s \leq v_i, \quad 1 \leq i \leq r, \\ &\qquad \textit{waar } T_s^{(i)} \textit{ die } m_{is} \times m_{is} \textit{ linker-bohoek van } T_1^{(i)} \textit{ is}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bewys. Vanuit Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ weet ons vir $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ volg $B = q(A)$, vir 'n $q \in \mathbb{R}[x]$. Dus

$$\begin{aligned} &B = Pq(J_{\mathbb{R}})P^{-1} = P \operatorname{diag}(q(C_1), ..., q(C_k), q(J_1), ..., q(J_r)) P^{-1}, \quad \text{waar} \\ &q(C_j) = \operatorname{diag}\Big(q(C_{n_{j1}}(a_j, b_j)), ..., q(C_{n_{jt_j}}(a_j, b_j))\Big), \quad 1 \leq j \leq k, \\ &q(J_i) = \operatorname{diag}\Big(q(J_{m_{i1}}(\lambda_i)), ..., q(J_{m_{iv_i}}(\lambda_i))\Big), \quad 1 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Nou wys ons B het die vorm soos in (4.8). Dit is voldoende om te wys $q(C_j)$ het die vorm van $\tilde{B}_j$, vir $1 \leq j \leq k$ en $q(J_i)$ het die vorm van B_i, vir $1 \leq i \leq r$.

Vanuit $C_{n_{jl}}(a_j, b_j) \in \mathcal{T}_{+,2n_{jl},\mathcal{D}}$ vir elke $1 \leq l \leq t_j$ en die feit dat $\mathcal{T}_{+,2n_{jl},\mathcal{D}}$ 'n kommutatiewe algebra is, volg nou direk dat $q(C_{n_{jl}}(a_j, b_j)) \in \mathcal{T}_{+,2n_{jl},\mathcal{D}}$. Soortgelyk volg vanuit $J_{m_{is}}(\lambda_i) \in \mathcal{T}_{+,m_{is},\mathbb{R}}$ vir elke $1 \leq s \leq v_i$ en die feit dat $\mathcal{T}_{+,m_{is},\mathbb{R}}$ 'n kommutatiewe algebra is, dat $q(J_{m_{is}}(\lambda_i)) \in \mathcal{T}_{+,m_{is},\mathbb{R}}$.

Verder volg vanuit

$$C_{n_{j1}}(a_j,b_j)=\begin{bmatrix}C_{n_{jl}}(a_j,b_j) & * \\ 0_{(2n_{j1}-2n_{jl})\times 2n_{jl}} & C_{n_{j1}-n_{jl}}(a_j,b_j)\end{bmatrix},\quad 1\le j\le k,\quad 1\le l\le t_j,$$

dat

$$q(C_{n_{j1}}(a_j,b_j))=\begin{bmatrix}q(C_{n_{jl}}(a_j,b_j)) & * \\ 0_{(2n_{j1}-2n_{jl})\times 2n_{jl}} & q(C_{n_{j1}-n_{jl}}(a_j,b_j))\end{bmatrix},\quad 1\le j\le k\quad 1\le l\le t_j.$$

Gevolglik sien ons $q(C_{n_{jl}}(a_j,b_j))$ is die $2n_{jl}\times 2n_{jl}$ linker-bohoek van $q(C_{n_{j1}}(a_j,b_j))$ vir elke $1\le l\le t_j$ en $1\le j\le k$. Laat $q(C_{n_{jl}}(a_j,b_j)) =: \tilde{T}_l^{(j)}$ vir $1\le l\le t_j$ en $1\le j\le k$. Dan volg $q(C_j)=\operatorname{diag}\left(\tilde{T}_1^{(j)},...,\tilde{T}_{t_j}^{(j)}\right)$ met $\tilde{T}_l^{(j)}\in\mathcal{T}_{+,2n_{jl},\mathcal{D}}$, $1\le l\le t_j$.

Soortgelyk volg vanuit

$$J_{m_{i1}}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}J_{m_{is}}(\lambda_i) & * \\ 0_{(m_{i1}-m_{is})\times m_{is}} & J_{m_{i1}-m_{is}}(\lambda_i)\end{bmatrix},\quad 1\le i\le r,\quad 1\le s\le v_i,$$

dat

$$q(J_{m_{i1}}(\lambda_i))=\begin{bmatrix}q(J_{m_{is}}(\lambda_i)) & * \\ 0_{(m_{i1}-m_{is})\times m_{is}} & q(J_{m_{i1}-m_{is}}(\lambda_i))\end{bmatrix},\quad 1\le i\le r,\quad 1\le s\le v_i.$$

Hieruit sien ons $q(J_{m_{is}}(\lambda_i))$ is die $m_{is}\times m_{is}$ linker-bohoek van $q(J_{m_{i1}}(\lambda_i))$ vir elke $1\le s\le v_i$ en $1\le i\le r$. Laat $q(J_{m_{is}}(\lambda_i)) =: T_s^{(i)}$ vir elke $1\le s\le v_i$ en $1\le i\le r$. Dan volg $q(J_i)=\operatorname{diag}\left(T_1^{(i)},...,T_{v_i}^{(i)}\right)$ waar $T_s^{(i)}\in\mathcal{T}_{+,m_{is},\mathbb{R}}$, $1\le s\le v_i$. Hieruit volg dat $B\in\{A\}''_{\mathbb{R}}$ die vorm soos in (4.8) het.

Laat $\mathcal{K}$ die versameling matrikse met vorm soos in (4.8) voorstel. Dit is maklik om aan te toon dat $\mathcal{K}$ 'n deelruimte van $\mathbb{R}^{n\times n}$ vorm en vanuit Lemma 4.3 vir $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ weet ons dieselfde is waar vir $\{A\}''_{\mathbb{R}}$. Aangesien ons nou weet $\{A\}''_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{K}$, kan ons bewys die versamelings is dieselfde deur te wys hul het dieselfde dimensie. Ons maak gebruik van Proposisie 4.16 waaruit ons weet $\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}}=\deg(m_A(\cdot))$, asook van die feit dat die minimaalpolinoom oor $\mathbb{R}$ van 'n reële matriks ook die minimaalpolinoom oor $\mathbb{C}$ is van hierdie matriks, soos bespreek in Afdeling 3.6. Gevolglik kan ons Lemma 4.8 gebruik om $\deg(m_A(\cdot))$ te bepaal. Vanuit hierdie lemma en (4.7) volg $\deg(m_A(\cdot))=2\sum_{j=1}^k n_{j1}+\sum_{i=1}^r m_{i1}$.

Vir enige $B\in\mathcal{K}$ volg dat $\tilde{T}_l^{(j)}$ vir elke $1\le l\le k$ lineêr afhanklik is van $2n_{j1}$ parameters . Hieruit volg dus dat $\tilde{B}_j$ vir elke $1\le j\le k$ ook lineêr afhanklik is van $2n_{j1}$ parameters en gevolglik is $\operatorname{diag}\left(\tilde{B}_1,...,\tilde{B}_k\right)$ lineêr afhanklik van $2\sum_{j=1}^k n_{j1}$ parameters.

Soortgelyk is $T_s^{(i)}$ vir elke $1\le s\le v_i$ lineêr afhanklik van m_{i1} parameters. Hieruit volg dus dat B_i vir elke $1\le i\le r$ ook lineêr afhanklik is van m_{i1} parameters en gevolglik is $\operatorname{diag}(B_1,...,B_r)$ lineêr afhanklik van $\sum_{i=1}^r m_{i1}$ parameters. Hiermee is bewys $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{K}=2\sum_{j=1}^k n_{j1}+\sum_{i=1}^r m_{i1}$. Dus $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{K}=\dim_{\mathbb{R}}\{A\}''_{\mathbb{R}}$ en daarom volg $\{A\}''_{\mathbb{R}}=\mathcal{K}$. Gevolglik geld die stelling in beide rigtings. $\square$

4.5 Notas

Vir Afdelings $4.1-4.3$ is meeste van die inligting verkry vanuit hoofstuk 5-6 in [11], waar 'n bewys vir Stelling 4.2 gegee word vir enige algebraïese geslote liggaam. Die verwysings word volledig gegee waar nodig. Sommige van die resultate se bewoording en bewyse is moontlik aangepas, maar die metode van bewys is meestal soortgelyk as in [11].

In [11] word verwys na [16] vir 'n bewys van Stelling 4.2 vir enige liggaam $\mathbb{F}$. Hierdie resultaat volg vanuit 'n abstrakte algebra oogpunt. Die bewys van Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ deur 'n reduksie na $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ soos in Afdeling 4.4 gegee word, is ons eie werk. Dit wil ook voorkom asof die beskrywing van matrikse in $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ soos in Stelling 4.17 moontlik nog nie voorheen gepubliseer is nie.

5 Matriks kiks en die Lyapunov orde

In hierdie hoofstuk werk ons met reële matrikse. Ons begin deur te kyk na matriks **kik**s en eienskappe daarvan.

5.1 Matriks kiks

'n **Kik** $\mathscr{C}$ in die algebra $\mathbb{R}^{n\times n}$ word ook 'n *matriks **kik*** genoem. Ook hier stel ons die kleinste **kik** wat 'n gegewe matriks A bevat voor met $\mathscr{C}(A)$. Ons noem 'n versameling $V \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ nie-singulier as al die nie-nul matrikse in V nie-singulier is. Alhoewel 'n matriks **kik** geslote is onder die neem van inverses beteken dit nie noodwendig dat 'n **kik** nie-singulier is nie.

Stelling 5.1 ([9], Proposisie 2.6)**.** *Laat $\mathscr{C}$ 'n* **kik** *van $\mathbb{R}^{n\times n}$ wees. Dan is die volgende eienskappe ekwivalent*

(i) $\mathscr{C}$ is nie-singulier.

(ii) Al die nie-nul matrikse in $\mathscr{C}$ het reguliere inersie.

(iii) Al die nie-nul matrikse in $\mathscr{C}$ het dieselfde reguliere inersie.

Bewys. Dis duidelik dat (iii) impliseer (i) en (ii).

Ons wys (i) impliseer (ii) deur te wys as (ii) nie geld nie, dan geld (i) ook nie. Veronderstel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is 'n nie-singuliere matriks in $\mathscr{C}$ met 'n suiwer imaginêre eiewaarde. Dus A het nie-reguliere inersie. Laat $\mathrm{i}\alpha$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, 'n suiwer imaginêre eiewaarde van A wees met bybehorende eievektor $0_n \neq v \in \mathbb{R}^n$. Dus $Av = \mathrm{i}\alpha v$. Ons veronderstel eers $\alpha > 0$. Aangesien A nie-singulier is, weet ons $v = A^{-1}Av = \mathrm{i}\alpha A^{-1}v$, dus $\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}v = \frac{-1}{\alpha}\mathrm{i}v = A^{-1}v$. Omdat $\mathscr{C}$ 'n **kik** is, volg $\left(\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1}\right) \in \mathscr{C}$ en dus is $\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1}$ nie-singulier, aangesien $\mathscr{C}$ nie-singulier is. Maar dit volg dat

$$\left(\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1}\right)v = \left(\frac{1}{\alpha}A\right)v + \left(\alpha A^{-1}\right)v = \mathrm{i}v - \mathrm{i}v = 0_n.$$

Gevolglik is $(\frac{1}{\alpha}A + \alpha A^{-1})$ singulier, wat teenstrydig is met (i). In die geval waar $\alpha < 0$, laat $\beta = -\alpha > 0$. Dan $Av = -\mathrm{i}\beta v$ en $\frac{1}{-\mathrm{i}\beta}v = \frac{1}{\beta}\mathrm{i}v = A^{-1}v$. Nou volg $\left(\frac{1}{\beta}A + \beta A^{-1}\right) \in \mathscr{C}$ en dus is $\frac{1}{\beta}A + \beta A^{-1}$ nie-singulier. Vanuit

$$\left(\frac{1}{\beta}A + \beta A^{-1}\right)v = \left(\frac{1}{\beta}A\right)v + \left(\beta A^{-1}\right)v = -\mathrm{i}v + \mathrm{i}v = 0_n,$$

sien ons $(\frac{1}{\beta}A + \beta A^{-1})$ is singulier, wat teenstrydig is met (i). Dit wys dat as (i) waar is, dan sal (ii) ook waar wees.

Nou wys ons (ii) impliseer (iii). Weereens bewys ons die implikasie deur te wys as (iii) nie geld nie, dan geld (ii) ook nie. Neem twee matrikse $A, B \in \mathscr{C}$ met verskillende reguliere inersies.

Ons beskou die matriks $T_\alpha := \alpha A + (1-\alpha)B \in \mathscr{C}$ vir $\alpha \in [0,1]$. In bylaag D van [14] word verduidelik dat die eiewaardes van 'n reële of komplekse vierkantige matriks kontinu afhang van die inskrywings van die matriks. Dit is 'n gevolg van die stelling wat voorkom in hierdie bylaag waaruit ons sien dat klein genoeg veranderinge in die koëffisiënte van 'n polinoom slegs tot klein veranderinge in enige van die nulpunte van die polinoom kan lei. Nou volg vanuit die feit dat die koëffisiënte van die karakteristieke polinoom $p_{T_\alpha}(x) = \det(xI_n - T_\alpha)$ kontinu afhang van α, en die feit dat die nulpunte van p_{T_α} die eiewaardes van T_α is, dat die eiewaardes van T_α kontinu afhang van α. Aangesien $T_0 = B$ en $T_1 = A$ verskillende reguliere inersies het, volg dit dat daar ten minste een $\tilde{\alpha} \in (0,1)$ bestaan waarvoor $T_{\tilde{\alpha}}$ 'n suiwer imaginêre eiewaarde sal hê. Dit is teenstrydig met (ii). Dit wys dat as (ii) waar is, dan sal (iii) ook waar wees. □

Proposisie 5.2. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dan is $\mathscr{C}(A)$ nie-singulier as en slegs as A reguliere inersie het.*

Bewys. As $\mathscr{C}(A)$ nie-singulier is, weet ons vanuit Stelling 5.1 dat al die nie-nul matrikse in $\mathscr{C}(A)$ dieselfde reguliere inersie het. Aangesien $A \in \mathscr{C}(A)$ volg dus dat A reguliere inersie het. Hiermee is die een rigting bewys.

Vir die omgekeerde verwys ons na Proposisie 2.5 in [9]. □

Dit volg maklik uit die manier hoe die **kik** $\mathscr{C}(A)$ vanuit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ voortgebring word, soos verduidelik in Proposisie 2.12, dat as A singulier is of $A = A^{-1}$ volg $\mathscr{C}(A) = \{\lambda A : \lambda \geq 0\}$ asook $\mathscr{C}(\lambda A) = \mathscr{C}(A)$ vir $\lambda > 0$, $\mathscr{C}(\lambda A) = \{0_{n\times n}\}$ vir $\lambda = 0$ en $\mathscr{C}(\lambda A) = -\mathscr{C}(A)$ vir $\lambda < 0$.

Lemma 5.3. *Vir enige $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $T \in GL(n,\mathbb{R})$ volg dit dat $T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ 'n **kik** is.*

Bewys. Ons begin deur te wys $T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ is geslote onder optelling. Neem $A_1, A_2 \in \mathscr{C}(A)$. Laat $\tilde{A}_1 := T^{-1}A_1T$ en $\tilde{A}_2 := T^{-1}A_2T$. Dan volg $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. Vanuit $A_1 + A_2 \in \mathscr{C}(A)$ volg

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = T^{-1}A_1T + T^{-1}A_2T = T^{-1}(A_1 + A_2)T \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T.$$

Dus, $T^{-1}\mathscr{C}(A)T + T^{-1}\mathscr{C}(A)T \subseteq T^{-1}\mathscr{C}(A)T$.

Om te sien $T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ is geslote onder skalaar vermenigvuldiging maak ons gebruik van die feit dat vir $\lambda \geq 0$ en $A_1 \in \mathscr{C}(A)$ volg $\lambda A_1 \in \mathscr{C}(A)$. Laat $\tilde{A}_1 := T^{-1}A_1T \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. Nou volg

$$\lambda\tilde{A}_1 = \lambda\left(T^{-1}A_1T\right) = T^{-1}(\lambda A_1)T \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T.$$

Dus, $\lambda\left(T^{-1}\mathscr{C}(A)T\right) \subseteq T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ vir alle $\lambda \geq 0$.

Laastens moet ons wys dat $T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ geslote onder die neem van inverses is. Neem $A_1 \in \mathscr{C}(A)$ waar A_1 nie-singulier is. Laat $\tilde{A}_1 := T^{-1}A_1T \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. Aangesien ons weet $A_1^{-1} \in \mathscr{C}(A)$, volg

$$\tilde{A}_1^{-1} = \left(T^{-1}A_1T\right)^{-1} = T^{-1}A_1^{-1}T \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T.$$

Hiermee is bewys vir 'n nie-singuliere $\tilde{A} \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ volg $\tilde{A}^{-1} \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. Gevolglik lei ons hieruit af dat $T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ 'n **kik** is. □

Die volgende lemma toon aan dat ons mag aanneem die matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is gelyk aan sy reële Jordan-matriks $J_\mathbb{R}$ wanneer ons met die **kik** $\mathscr{C}(A)$ werk.

Lemma 5.4. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bevredig die versameling $\mathscr{C}(A)$ gelykvormigheid in die sin dat vir alle $T \in GL(n,\mathbb{R})$ volg*

$$\mathscr{C}(T^{-1}AT) = T^{-1}\mathscr{C}(A)T.$$

Bewys. Aangesien $A \in \mathscr{C}(A)$ weet ons $T^{-1}AT \in T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. Vanuit Lemma 5.3 weet ons $T^{-1}\mathscr{C}(A)T$ is 'n **kik** en dus $\mathscr{C}(T^{-1}AT) \subseteq T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. Hiermee is die een insluiting bewys.

Vir die omgekeerde insluiting maak ons weer gebruik van Lemma 5.3 waaruit ons weet dat $T\mathscr{C}(T^{-1}AT)T^{-1}$ 'n **kik** is. Aangesien $A = T\left(T^{-1}AT\right)T^{-1} \in T\mathscr{C}(T^{-1}AT)T^{-1}$ weet ons $\mathscr{C}(A) \subseteq T\mathscr{C}(T^{-1}AT)T^{-1}$ oftewel $T^{-1}\mathscr{C}(A)T \subseteq \mathscr{C}(T^{-1}AT)$. Dus volg $\mathscr{C}(T^{-1}AT) = T^{-1}\mathscr{C}(A)T$. $\square$

Lemma 5.5. *Vir enige deelversameling $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ is*

$$\{\mathcal{D}\}'_{\mathbb{R}} = \{C \in \mathbb{R}^{n\times n} : CD = DC \text{ vir alle } D \in \mathcal{D}\}$$

'n matriks **kik**.

Bewys. Hierdie resultaat volg vanuit Lemma 4.3 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $\square$

Gevolg 5.6. *Vir 'n gegewe matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is beide die versamelings $\{A\}'_{\mathbb{R}}$ en $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ matriks* **kik***s. Verder volg ook $\mathscr{C}(A) \subseteq \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{R}}$ en dat $\mathscr{C}(A)$ en $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ kommutatief is.*

Bewys. Vanuit bostaande lemma weet ons dat $\{A\}'_{\mathbb{R}}$ en $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ **kik**s is.

Neem $D \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$, dan vir elke $C \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$ volg $CD = DC$. Aangesien $A \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$ volg $DA = AD$, dus $D \in \{A\}'_{\mathbb{R}}$. Gevolglik weet ons $\{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{R}}$. Vanuit $A \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ en die feit dat $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ 'n **kik** is, volg $\mathscr{C}(A) \subseteq \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{R}}$.

Aangesien $\{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \{A\}'_{\mathbb{R}}$ volg dit dat alle $D_1, D_2 \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ kommuteer, gevolglik is $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ 'n kommutatiewe versameling. Vanuit die insluiting $\mathscr{C}(A) \subseteq \{A\}''_{\mathbb{R}}$ volg dit dan ook dat $\mathscr{C}(A)$ 'n kommutatiewe versameling is. $\square$

5.2 Oplossingsversamelings vir Lyapunov ongelykhede

Ons skryf $\mathbb{S}_n$ vir die versameling $n\times n$ reële simmetriese matrikse, $\overline{\mathbb{P}}_n$ vir die versameling $n\times n$ reële positief semi-definiete matrikse en $\mathbb{P}_n$ vir die versameling $n\times n$ reële positief definiete matrikse, dus

$$\mathbb{S}_n := \{S \in \mathbb{R}^{n\times n} : S = S^T\}, \quad \overline{\mathbb{P}}_n := \{P \in \mathbb{S}_n : P \succeq 0_{n\times n}\}, \quad \mathbb{P}_n := \{P \in \mathbb{S}_n : P \succ 0_{n\times n}\}.$$

In hierdie afdeling kyk ons na die oplossingsversamelings $\overline{\mathbb{S}}(A)$ en $\mathbb{S}(A)$ van die Lyapunov ongelykhede $SA + A^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$ en $SA + A^HS \in \mathbb{P}_n$, vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die definisies van hierdie oplossingsversamelings volg:

Definisie 5.7. Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ laat

$$\overline{\mathbb{S}}(A) := \{S \in \mathbb{S}_n : SA + A^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n\} \quad \text{en} \quad \mathbb{S}(A) := \{S \in \mathbb{S}_n : SA + A^HS \in \mathbb{P}_n\}.$$

Dit is eenvoudig om te sien

$$\overline{\mathbb{S}}(0_{n\times n}) = \mathbb{S}_n, \quad \mathbb{S}(0_{n\times n}) = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{S}}(I_n) = \overline{\mathbb{P}}_n \quad \text{en} \quad \mathbb{S}(I_n) = \mathbb{P}_n.$$

Die volgende stelling is 'n toepassing van die Inersie Stelling (Stelling 3.18) op die oplossingsversameling $\mathbb{S}(A)$.

Stelling 5.8. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en veronderstel $\mathbb{S}(A) \neq \emptyset$. Vir $S \in \mathbb{S}(A)$ volg dan*

$$\mathcal{E}_+(S) = \mathcal{E}_+(A), \quad \mathcal{E}_-(S) = \mathcal{E}_-(A), \quad \mathcal{E}_0(S) = \mathcal{E}_0(A) = 0.$$

Hieruit sien ons in die besonder dat al die matrikse in $\mathbb{S}(A)$ dieselfde reguliere inersie het en gevolglik is $\mathbb{S}(A)$ nie-singulier.

Vervolgens bewys ons verskeie eienskappe vir die oplossingsversamelings $\overline{\mathbb{S}}(A)$ en $\mathbb{S}(A)$.

Lemma 5.9. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is die versamelings $\overline{\mathbb{S}}(A)$ en $\mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}$ konvekse keëls.*

Bewys. Ons bewys eers dat $\overline{\mathbb{S}}(A)$ 'n konvekse keël is. Neem $S_1, S_2 \in \overline{\mathbb{S}}(A)$, dan

$$(S_1+S_2)A + A^H(S_1+S_2) = (S_1A + A^HS_1) + (S_2A + A^HS_2) \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $S_1 + S_2 \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ en hiermee is bewys $\overline{\mathbb{S}}(A) + \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$.

Verder, vir $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ en $\lambda \geq 0$ volg $\lambda SA + A^H\lambda S = \lambda(SA + A^HS)$. As $\lambda > 0$, volg

$$\lambda(SA + A^HS) \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $\lambda\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$. Vir $\lambda = 0$ volg $\lambda(SA + A^HS) = 0_{n\times n}$. Dus $\lambda\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$ omdat $0_{n\times n} \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Ons sien dus $\lambda\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$ vir alle $\lambda \geq 0$. Daarom is $\overline{\mathbb{S}}(A)$ 'n konvekse keël.

Om te sien dat $\mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}$ 'n konvekse keël is, neem $S_1, S_2 \in \mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}$. Dan volg

$$(S_1+S_2)A + A^H(S_1+S_2) = (S_1A + A^HS_1) + (S_2A + A^HS_2) \in \mathbb{P}_n.$$

Dus $S_1+S_2 \in \mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}$ en hiermee is bewys $\mathbb{S}(A)\cup\{0_{n\times n}\} + \mathbb{S}(A)\cup\{0_{n\times n}\} \subseteq \mathbb{S}(A)\cup\{0_{n\times n}\}$.

Verder, vir $S \in \mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}$ en $\lambda \geq 0$ volg $\lambda SA + A^H\lambda S = \lambda(SA + A^HS)$. Vir $\lambda > 0$ volg $\lambda(SA + A^HS) \in \mathbb{P}_n$ en vir $\lambda = 0$ volg $\lambda S = 0_{n\times n}$, dus $\lambda S \in \mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}$ vir alle $\lambda \geq 0$. Hiermee is bewys $\lambda\left(\mathbb{S}(A) \cup \{0_{n\times n}\}\right) \subseteq \mathbb{S}(A)\cup\{0_{n\times n}\}$ vir alle $\lambda \geq 0$, daarom volg dat $\mathbb{S}(A)\cup\{0_{n\times n}\}$ 'n konvekse keël is. $\square$

Lemma 5.10. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en 'n nie-singuliere $S \in \mathbb{S}_n$ volg*

(i) $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ as en slegs as $S^{-1} \in \overline{\mathbb{S}}(A^H)$.

(ii) $S \in \mathbb{S}(A)$ as en slegs as $S^{-1} \in \mathbb{S}(A^H)$.

Bewys. Neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$. Dan vanuit $SA + A^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$ volg

$$S^{-1}A^H + (A^H)^HS^{-1} = A(S^{-1})^H + S^{-1}A^H = S^{-1}(SA + A^HS)(S^{-1})^H \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $S^{-1} \in \overline{\mathbb{S}}(A^H)$. Hiermee is die een rigting bewys.

Vir die omgekeerde, neem $S^{-1} \in \overline{\mathbb{S}}(A^H)$. Dan, vanuit $S^{-1}A^H + (A^H)^HS^{-1} \in \overline{\mathbb{P}}_n$ volg

$$SA + A^HS = A^HS^H + SA = S(S^{-1}A^H + AS^{-1})S^H \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$. Hiermee is die omgekeerde bewys.

Die bewys vir $S \in \mathbb{S}(A)$ as en slegs as $S^{-1} \in \mathbb{S}(A^H)$ volg soortgelyk. $\square$

Lemma 5.11. *Vir 'n nie-singuliere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ volg $\overline{\mathbb{S}}(A) = \overline{\mathbb{S}}(A^{-1})$ en $\mathbb{S}(A) = \mathbb{S}(A^{-1})$.*

Bewys. Neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ dan volg vanuit $SA + A^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$ dat

$$SA^{-1} + (A^{-1})^HS = (A^{-1})^H(SA + A^HS)A^{-1} \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $S \in \overline{\mathbb{S}}(A^{-1})$ en gevolglik $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A^{-1})$. Neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(A^{-1})$. Dan volg vanuit $SA^{-1} + (A^{-1})^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$ dat

$$SA + A^HS = A^H(SA^{-1} + (A^{-1})^HS)A \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ en gevolglik $\overline{\mathbb{S}}(A^{-1}) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$. Hieruit volg $\overline{\mathbb{S}}(A) = \overline{\mathbb{S}}(A^{-1})$. Dieselfde argument lewer $\mathbb{S}(A) = \mathbb{S}(A^{-1})$. $\square$

Die volgende lemma toon aan dat ons weereens mag aanneem die matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is gelyk aan sy reële Jordan-matriks $J_{\mathbb{R}}$ wanneer ons met die versamelings $\overline{\mathbb{S}}(A)$ en $\mathbb{S}(A)$ werk.

Lemma 5.12. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en alle $T \in GL(n,\mathbb{R})$ volg*

$$\overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT) = T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T \quad \textit{en} \quad \mathbb{S}(T^{-1}AT) = T^H\mathbb{S}(A)T.$$

Bewys. Vir elke $S \in \overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT)$ volg $S(T^{-1}AT) + (T^{-1}AT)^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n$, en daarom ook

$$(T^H)^{-1}ST^{-1}A + A^H(T^H)^{-1}ST^{-1} = (T^H)^{-1}(ST^{-1}AT + T^HA^H(T^H)^{-1}S)T^{-1} \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Dus $(T^H)^{-1}ST^{-1} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$, oftewel $S \in T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T$ en gevolglik $\overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT) \subseteq T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T$.

Om die omgekeerde insluiting te bewys, neem $S \in T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T$, dus $(T^H)^{-1}ST^{-1} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$. Dan $(T^H)^{-1}ST^{-1}A + A^H(T^H)^{-1}ST^{-1} \in \overline{\mathbb{P}}_n$ en daarom ook

$$\begin{aligned} ST^{-1}AT + (T^{-1}AT)^H S &= ST^{-1}AT + T^HA^H(T^{-1})^HS \\ &= T^H((T^H)^{-1}ST^{-1}A + A^H(T^H)^{-1}ST^{-1})T \in \overline{\mathbb{P}}_n. \end{aligned}$$

Hieruit sien ons dat $S \in \overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT)$, gevolglik $T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T \subseteq \overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT)$. Dit bewys $T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T = \overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT)$.

Die bewys vir $\mathbb{S}(T^{-1}AT) = T^H\mathbb{S}(A)T$ volg soortgelyk. □

Lemma 5.13. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ volg*

(i) $\overline{\mathbb{S}}(\lambda A) = \overline{\mathbb{S}}(A)$ *vir* $\lambda > 0$ *en* $\overline{\mathbb{S}}(\lambda A) = -\overline{\mathbb{S}}(A)$ *vir* $\lambda < 0$.

(ii) $\mathbb{S}(\lambda A) = \mathbb{S}(A)$ *vir* $\lambda > 0$ *en* $\mathbb{S}(\lambda A) = -\mathbb{S}(A)$ *vir* $\lambda < 0$.

Bewys. Neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(\lambda A)$ waar $\lambda > 0$. Dan $\lambda(SA + A^HS) = S(\lambda A) + (\lambda A)^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Aangesien $\frac{1}{\lambda} > 0$ volg $SA + A^HS = \frac{1}{\lambda}\lambda(SA + A^HS) \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Dus $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ en gevoglik $\overline{\mathbb{S}}(\lambda A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$ vir $\lambda > 0$.

Vir die omgekeerde insluiting, neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$. Dan volg $SA + A^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$ en dus ook $S(\lambda A) + (\lambda A)^HS = \lambda\left(SA + A^HS\right) \in \overline{\mathbb{P}}_n$ vir $\lambda > 0$. Dus $S \in \overline{\mathbb{S}}(\lambda A)$ en gevolglik $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(\lambda A)$ vir $\lambda > 0$. Hiermee is bewys $\overline{\mathbb{S}}(\lambda A) = \overline{\mathbb{S}}(A)$ vir $\lambda > 0$.

Neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(\lambda A)$ vir $\lambda < 0$. Dus $\lambda(SA + A^HS) = S(\lambda A) + (\lambda A)^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Laat $\lambda = -\delta$. Dus $\delta > 0$ en daarom ook $\frac{1}{\delta} > 0$. Nou volg $(-S)A + A^H(-S) = -(SA + A^HS) = \frac{1}{\delta}\lambda(SA + A^HS) \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Dus $-S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ en gevolglik $\overline{\mathbb{S}}(\lambda A) \subseteq -\overline{\mathbb{S}}(A)$ vir $\lambda < 0$.

Vir die omgekeerde insluiting, neem $S \in -\overline{\mathbb{S}}(A)$. Dan $-(SA+A^HS) = (-S)A + A^H(-S) \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Vir 'n $\lambda = -\delta < 0$ volg $S(\lambda A) + (\lambda A)^HS = \lambda(SA + A^HS) = -\delta(SA + A^HS) \in \overline{\mathbb{P}}_n$ aangesien $\delta > 0$. Dus $S \in \overline{\mathbb{S}}(\lambda A)$ en gevolglik $-\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(\lambda A)$ vir $\lambda < 0$. Hiermee is bewys $\overline{\mathbb{S}}(\lambda A) = -\overline{\mathbb{S}}(A)$ vir $\lambda < 0$.

Die bewys vir $\mathbb{S}(\lambda A) = \mathbb{S}(A)$ vir $\lambda > 0$ en $\mathbb{S}(\lambda A) = -\mathbb{S}(A)$ vir $\lambda < 0$ volg soortgelyk. □

Daar bestaan 'n wyse waarop ons die versameling $\mathbb{S}(A)$ kan bepaal vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ indien $\mathcal{E}_+(A) = n$ of $\mathcal{E}_-(A) = n$. Dit word verkry vanuit die volgende stelling en gevolg.

Stelling 5.14 ([12], Oefening 18.7)**.** *Stel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $\mathcal{E}_+(A) = n$. Vir enige $K \in \mathbb{P}_n$ laat $S := \int_0^\infty e^{-xA^H}Ke^{-xA}\,\mathrm{d}x$. Dan volg $S \in \mathbb{P}_n$ en $SA + A^HS = K$. Verder, S is die enigste matriks wat $SA + A^HS = K \in \mathbb{P}_n$ bevredig, vir hierdie vaste K. In die besonder kry ons*

$$\mathbb{S}(A) = \left\{ \int_0^\infty e^{-xA^H}Ke^{-xA}\,\mathrm{d}x : K \in \mathbb{P}_n \right\}.$$

Gevolg 5.15. *Stel $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $\mathcal{E}_-(A) = n$. Vir enige $K \in \mathbb{P}_n$ laat $S := -\int_0^\infty e^{xA^H} K e^{xA}\, \mathrm{d}x$. Dan volg $-S \in \mathbb{P}_n$ en $SA + A^H S = K$. Verder, S is die enigste matriks wat $SA + A^H S = K \in \mathbb{P}_n$ bevredig, vir hierdie vaste K. In die besonder kry ons*

$$\mathbb{S}(A) = \left\{ -\int_0^\infty e^{xA^H} K e^{xA}\, \mathrm{d}x : K \in \mathbb{P}_n \right\}.$$

In Hoofstuk 7 pas ons Stelling 5.14 en Gevolg 5.15 toe op verskeie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ waarvoor $\mathcal{E}_+(A) = 2$ of $\mathcal{E}_-(A) = 2$ geld, om die eienskappe van matrikse in $\mathbb{S}(A)$ te bepaal.

Skryf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in sy reële Jordan ontbinding $A = PJ_{\mathbb{R}}P^{-1}$ waar $P \in GL(n, \mathbb{R})$. Veronderstel A het reguliere inersie met $\mathcal{E}_+(A) = u$ en $\mathcal{E}_-(A) = v$. Dus $u + v = n$. Ons kan deur middel van permutasie matrikse verseker dat die Jordan-matriks $J_{\mathbb{R}}$ volgens inersie gegroepeer word, dus

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}} = \operatorname{diag}\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}, J_{\mathcal{E}_-(A)}\right) \quad &\text{waar} \quad J_{\mathcal{E}_+(A)} \in \mathbb{R}^{u\times u} \quad \text{en} \quad \mathcal{E}_+\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right) = u, \\ &\text{asook} \quad J_{\mathcal{E}_-(A)} \in \mathbb{R}^{v\times v} \quad \text{en} \quad \mathcal{E}_-\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right) = v. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Stelling 5.16 ([12], Stellings 18.7 & 20.15)**.** *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ volg $\mathbb{S}(A) \neq \emptyset$ as en slegs as A reguliere inersie het.*

Bewys. Veronderstel daar bestaan 'n $S \in \mathbb{S}_n$ só dat $SA + A^H S = K \in \mathbb{P}_n$, dus $\mathbb{S}(A) \neq \emptyset$. Neem 'n eievektor $0_n \neq u \in \mathbb{C}^n$ van A met ooreenstemmende eiewaarde $\lambda \in \mathbb{C}$. Dus $Au = \lambda u$. Nou volg $u^H A^H = (Au)^H = (\lambda u)^H = \overline{\lambda} u^H$. Vanuit

$$0 < u^H K u = u^H S A u + u^H A^H S u = u^H S \lambda u + \overline{\lambda} u^H S u = (\lambda + \overline{\lambda}) u^H S u$$

volg $2\operatorname{Re}(\lambda) = \lambda + \overline{\lambda} \neq 0$. Gevolglik sien ons dat daar geen oplossings vir die streng Lyapunov ongelykheid vir A bestaan in die geval waar A suiwer imaginêre eiewaardes het nie. Dus A het reguliere inersie en hiermee is die een rigting bewys.

Vir die omgekeerde, veronderstel A het reguliere inersie. Laat $\mathcal{E}_+(A) = u$ en $\mathcal{E}_-(A) = v$, dus $u + v = n$. Ons weet vanuit (5.1) dat die reële Jordan ontbinding van A gegee word deur $A = PJ_{\mathbb{R}}P^{-1}$ met $P \in GL(n, \mathbb{R})$ en $J_{\mathbb{R}} = \operatorname{diag}\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}, J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)$. Ons sien vanuit Lemma 5.12 dat ons A gelyk kan neem aan $J_{\mathbb{R}}$, want as ons kan wys $\mathbb{S}(J_{\mathbb{R}}) \neq \emptyset$ dan volg $\emptyset \neq \mathbb{S}(J_{\mathbb{R}}) = \mathbb{S}(P^{-1}AP) = P^H \mathbb{S}(A) P$ en hieruit kry ons dan $\mathbb{S}(A) \neq \emptyset$.

Vanuit Stelling 5.14 volg dat

$$S_{11} := \int_0^\infty e^{-x\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H} K_{11} e^{-x\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)}\, \mathrm{d}x$$

'n positief definiete oplossing is vir die vergelyking $S_{11}\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right) + \left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{11} = K_{11}$. Soortgelyk volg vanuit Gevolg 5.15 dat

$$S_{22} := -\int_0^\infty e^{x\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H} K_{22} e^{x\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)}\, \mathrm{d}x$$

'n negatief definiete oplossing is vir die vergelyking $S_{22}\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right) + \left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H S_{22} = K_{22}$. Laat $S := \operatorname{diag}(S_{11}, S_{22})$ en $K := \operatorname{diag}(K_{11}, K_{22})$. Dan volg $S \in \mathbb{S}_n$ en $K \in \mathbb{P}_n$ asook

$$SA + A^H S = K.$$

Hiermee is bewys $\mathbb{S}(J_{\mathbb{R}}) \neq \emptyset$ en gevolglik ook $\mathbb{S}(A) \neq \emptyset$ wanneer A reguliere inersie het. $\square$

Lemma 5.17. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ en $\mathcal{E}_+(A) = n$. Dan geld*

$$\mathbb{S}(A) = \{K \circ L_A : K \in \mathbb{P}_n\}, \text{ waar } L_A := \int_0^\infty e^{-xA^H}\mathbb{I}_n e^{-xA}\mathrm{d}x \text{ met } [L_A]_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j},\ 1 \le i, j \le n.$$

Hier is $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$ matriks met elke inskrywing gelyk aan 1. Verder, K word uniek bepaal deur $K \circ L_A$.

Bewys. Ons weet vanuit Stelling 5.14 dat $\mathbb{S}(A) = \left\{\int_0^\infty e^{-xA^H} K e^{-xA}\,\mathrm{d}x : K \in \mathbb{P}_n\right\}$. Ons moet dus bewys dat

$$\int_0^\infty e^{-xA^H} K e^{-xA}\mathrm{d}x = K \circ \int_0^\infty e^{-xA^H}\mathbb{I}_n e^{-xA}\mathrm{d}x.$$

Ons maak gebruik van eienskappe rakende die eksponent van 'n matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ om dit te wys. Ons begin met die definisie $e^A := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}A^k$. Dit volg dat die formele reeks $e^{sA} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(sA)^k$ konvergeer vir elke $s \in \mathbb{C}$ en $e^{(sA)^H} = (e^{sA})^H$ vir elke $s \in \mathbb{C}$. Hieruit volg dan dat

$$e^{-xA^H} = e^{(-xA)^H} = (e^{-xA})^H = e^{-xA} = \operatorname{diag}(e^{-x\lambda_1}, e^{-x\lambda_2}, ..., e^{-x\lambda_n}) \quad \text{vir elke} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Laat $K = [k_{ij}]_{j=1,2,...,n}^{i=1,2,...,n}$. Direkte berekening lewer $\left[e^{-xA^H} K e^{-xA}\right]_{ij} = k_{ij}e^{-x(\lambda_i+\lambda_j)}$. Hieruit volg

$$\begin{aligned}\left[\int_0^\infty e^{-xA^H} K e^{-xA}\mathrm{d}x\right]_{ij} &= \left[\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-xA^H} K e^{-xA}\mathrm{d}x\right]_{ij} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t k_{ij}e^{-x(\lambda_i+\lambda_j)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-k_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t(\lambda_i+\lambda_j)} - 1\right) = \frac{k_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}.\end{aligned}$$

Stel $k_{ij} = 1$. Dan volg uit bostaande dat $\left[e^{-xA^H}\mathbb{I}_n e^{-xA}\right]_{ij} = e^{-x(\lambda_i+\lambda_j)}$ en $[L_A]_{ij} = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$. Dus $[K \circ L_A]_{ij} = \frac{k_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}$. Hiermee is bewys

$$\left[\int_0^\infty e^{-xA^H} K e^{-xA}\mathrm{d}x\right]_{ij} = [K \circ L_A]_{ij} \text{ vir elke } 1 \le i, j \le n.$$

Die feit dat K uniek bepaal word deur $K \circ L_A$ volg direk vanuit Stelling 5.14 waar ons weet K word uniek bepaal deur $\int_0^\infty e^{-xA^H} K e^{-xA}\mathrm{d}x$. □

Gevolg 5.18. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ en $\mathcal{E}_-(A) = n$. Dan geld*

$$\mathbb{S}(A) = \{K \circ L_A : K \in \mathbb{P}_n\}, \text{ waar } L_A := -\int_0^\infty e^{xA^H}\mathbb{I}_n e^{xA}\mathrm{d}x \text{ met } [L_A]_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j},\ 1 \le i, j \le n.$$

Hier is $\mathbb{I}_n$ die $n \times n$ matriks met elke inskrywing gelyk aan 1. Verder, K word uniek bepaal deur $K \circ L_A$.

5.3 Die Lyapunov orde

Definisie 5.19. Vir $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ skryf ons $A \leq B$ as

$$S \in \mathbb{S}_n, \qquad SA + A^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n \quad \Rightarrow \quad SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Ons verwys na hierdie binêre relasie op $\mathbb{R}^{n\times n}$ as die Lyapunov orde. Ons kan $A \leq B$ herformuleer as $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Laat $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) := \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \leq B\}$.

Lemma 5.20. *Die Lyapunov orde is refleksief en transitief en gevolglik 'n pre-order relasie op $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

Bewys. Vanuit die herformulering van die binêre relasie $\leq$ op $\mathbb{R}^{n\times n}$ sien ons dat $\leq$ refleksief is, omdat $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$ en dus $A \leq A$. Verder as $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ en $\overline{\mathbb{S}}(B) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(C)$ volg $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(C)$, dus as $A \leq B$ en $B \leq C$ dan volg $A \leq C$, daarom is $\leq$ transitief. □

Lemma 5.21. *Die versameling $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ is 'n matriks* **kik***.*

Bewys. Neem $B_1, B_2 \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$. Merk op dat $\overline{\mathbb{S}}(B_1) \cap \overline{\mathbb{S}}(B_2) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B_1 + B_2)$ omdat vir $S \in \overline{\mathbb{S}}(B_1) \cap \overline{\mathbb{S}}(B_2)$ volg

$$S(B_1 + B_2) + (B_1 + B_2)^H S = (SB_1 + B_1^H S) + (SB_2 + B_2^H S) \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Aangesien $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B_i)$, vir $i = 1, 2$, volg tesame met bogenoemde dat

$$\overline{\mathbb{S}}(A) = \overline{\mathbb{S}}(A) \cap \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B_1) \cap \overline{\mathbb{S}}(B_2) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B_1 + B_2).$$

Dus $A \leq B_1 + B_2$ en daarom volg $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) + \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$.

Verder, vir $B \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ en $\alpha \geq 0$ sal $A \leq \alpha B$. Dit volg omdat $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ en vir $\alpha > 0$ volg $\overline{\mathbb{S}}(A) = \overline{\mathbb{S}}(\alpha A) = \alpha\overline{\mathbb{S}}(A)$, omdat positief semi-definietheid van 'n matriks behoue bly onder positiewe skaling en daarom $\overline{\mathbb{S}}(A) = \alpha\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \alpha\overline{\mathbb{S}}(B) = \overline{\mathbb{S}}(\alpha B)$. As $\alpha = 0$ dan $\overline{\mathbb{S}}(\alpha B) = \overline{\mathbb{S}}(0_{n\times n}) = \mathbb{S}_n$ en dus $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(\alpha B)$. Nou weet ons $\alpha\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ vir elke $\alpha \geq 0$, dus is $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ 'n konvekse keël.

Laastens, veronderstel $B \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ is nie-singulier. Dan weet ons $B^{-1} \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ as $A \leq B^{-1}$. Ons maak gebruik van Lemma 5.11 waaruit ons weet $\overline{\mathbb{S}}(B) = \overline{\mathbb{S}}(B^{-1})$. Vanuit $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ volg nou $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B^{-1})$. Dus $B^{-1} \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ en daarom is $\overline{\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}}(A)$ 'n matriks **kik**. □

'n Ander versameling van belang is $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$. Dit bestaan uit die versameling matrikse in $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ met reguliere inersie. Reguliere inersie van 'n matriks bly behoue onder positiewe skaling en matriks inversie, maar nie onder optelling nie. Dus volg dat $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ oor die algemeen nie 'n **kik** is nie.

Stelling 5.22 ([7], Stelling 6)**.** *Vir alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geld*

(i) $\mathscr{C}(A) \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.

(ii) As A reguliere inersie het, geld $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.

Bewys. Om (i) te bewys maak ons gebruik van Lemma 5.21 en Gevolg 5.6 waaruit ons weet dat beide $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ en $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ matriks **kik**s is wat A bevat. Ons weet vanuit Lemma 2.7 dat $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ ook 'n **kik** is. Aangesien $A \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ volg dat $\mathscr{C}(A) \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Hiermee is (i) bewys.

Die bewys vir (ii) volg. Aangesien A reguliere inersie het weet ons vanuit Proposisie 5.2 dat $\mathscr{C}(A)$ nie-singulier is. Dan weet ons vanuit Stelling 5.1 dat al die matrikse in $\mathscr{C}(A)$ dieselfde reguliere inersie het. Nou weet ons vanuit (i) dat $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Hiermee is (ii) bewys. □

Die volgende lemma toon aan dat ons weereens mag aanneem die matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is gelyk aan sy reële Jordan-matriks $J_{\mathbb{R}}$ wanneer ons met die **kik** $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ en versameling $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ werk.

Lemma 5.23. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bevredig die versamelings $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ en $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ gelykvormigheid in die sin dat vir alle $T \in GL(n, \mathbb{R})$ volg*

$$\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) = T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T, \quad \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) = T^{-1}\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)T.$$

Bewys. Neem $C \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$. Dan weet ons uit Lemma 5.12 dat $\overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT) = T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T \subseteq \overline{\mathbb{S}}(C)$. Hieruit volg vir $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ dat $T^HSTC + C^HT^HST \in \overline{\mathbb{P}}_n$ en dus dat

$$STCT^{-1} + (TCT^{-1})^HS = STCT^{-1} + (T^{-1})^HC^HT^HS = (T^{-1})^H(T^HSTC + C^HT^HST)T^{-1} \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Ons sien dus dat $S \in \overline{\mathbb{S}}(TCT^{-1})$. Nou volg $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(TCT^{-1})$, daarom $TCT^{-1} \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ oftewel $C \in T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T$. Hieruit volg die insluiting $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) \subseteq T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T$. Om die omgekeerde insluiting te bewys, neem $C \in T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T$. Dus $TCT^{-1} \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ en gevolglik $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(TCT^{-1})$. Neem $S \in \overline{\mathbb{S}}(A)$, dan $STCT^{-1} + (TCT^{-1})^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$, asook

$$T^HSTC + C^HT^HST = T^H(STCT^{-1} + (T^{-1})^HC^HT^HS)T \in \overline{\mathbb{P}}_n.$$

Ons sien dus dat $\overline{\mathbb{S}}(T^{-1}AT) = T^H\overline{\mathbb{S}}(A)T \subseteq \overline{\mathbb{S}}(C)$ en daarom volg $C \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$. Gevolglik, $T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$. Dit bewys $T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T = \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$.

Laastens, omdat $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$, volg vir $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ dat

$$T^{-1}BT \in T^{-1}\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)T \subseteq T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T = \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT).$$

Aangesien $T^{-1}BT$ dieselfde spektrum het as B volg $T^{-1}BT \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$. Dus $T^{-1}\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)T \subseteq \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$.

Vir die omgekeerde insluiting, neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT)$. Dan volg

$$B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) \subseteq \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) = T^{-1}\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)T.$$

Dus $TBT^{-1} \in \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$. Ons weet TBT^{-1} het reguliere inersie, aangesien B reguliere inersie het. Gevolglik, $TBT^{-1} \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ oftewel $B \in T^{-1}\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)T$. Dus $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) \subseteq T^{-1}\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)T$ en hiermee is bewys $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(T^{-1}AT) = T^{-1}\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)T$. □

Lemma 5.24. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ volg*

(i) $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ *vir* $\lambda > 0$.

(ii) $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = \{0_{n\times n}\}$ *vir* $\lambda = 0$.

(iii) $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = -\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A)$ *vir* $\lambda < 0$.

Bewys. Ons sien vanuit Lemma 5.13 dat vir $\lambda > 0$ volg

$$\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \overline{\mathbb{S}}(\lambda A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)\right\} = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)\right\} = \overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A).$$

Hiermee is (i) bewys.

Vir (ii) neem $\lambda = 0$, $B \neq 0_{n\times n}$ en veronderstel $\mathbb{S}_n = \overline{\mathbb{S}}(0_{n\times n}) = \overline{\mathbb{S}}(\lambda A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Dan volg $SB + B^HS \in \overline{\mathbb{P}}_n$ vir elke $S \in \mathbb{S}_n$. Aangesien $-S \in \mathbb{S}_n$ volg ook $-(SB + B^HS) = -SB + B^H(-S) \in$

$\overline{\mathbb{P}}_n$. Hieruit kry ons dus dat die matriks $SB + B^H S$ slegs suiwer imaginêre eiewaardes kan hê. Maar aangesien $SB + B^H S$ simmetries is, weet ons vanuit Stelling 3.25 dat al sy eiewaardes reëel is. Gevolglik is nul die enigste eiewaarde van $SB + B^H S$. Dit volg ook vanuit Stelling 3.25 dat $SB + B^H S$ unitêr diagonaliseerbaar is. Dus $SB + B^H S = UDU^H$ waar U unitêr is en D 'n diagonaalmatriks met die eiewaardes van $SB + B^H S$ op die diagonaal. Gevolglik weet ons $SB + B^H S = U0_{n\times n}U^H = 0_{n\times n}$, oftewel $SB = -B^H S$. Hieruit sien ons dat B skeef-simmetries moet wees en $SB = BS$ vir elke $S \in \mathbb{S}_n$. Vanuit Stelling 3.27 weet ons omdat B skeef-simmetries is, volg $B = \tilde{U}M\tilde{U}^T$ waar $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unitêr is en

$$M \quad = \quad \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & \alpha_d \\ -\alpha_d & 0 \end{bmatrix}, 0_{(n-\mathrm{rank}(M))\times(n-\mathrm{rank}(M))}\right),$$

met $\alpha_i \in \mathbb{R}$ vir $1 \leq i \leq d$. Kies $S := \tilde{U}\tilde{S}\tilde{U}^T$, waar $\tilde{S}$ 'n blok-diagonaalmatriks is, verdeel op dieselfde wyse as M, met nulle oral behalwe in die i-de 2×2 blok, met $1 \leq i \leq d$, wat gegee word deur $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Die matriks produk $\tilde{S}M$ lewer dan 'n blok-diagonaalmatriks met nulle oral behalwe in die i-de 2×2 blok, wat gegee word deur $\begin{bmatrix} -\alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_i \end{bmatrix}$. Soortgelyk lewer die matriks produk $M\tilde{S}$ 'n blok-diagonaalmatriks met nulle oral behalwe in die i-de 2×2 blok, wat gegee word deur $\begin{bmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & -\alpha_i \end{bmatrix}$. Aangesien $\tilde{S}^T = \tilde{S}$ volg dit maklik dat $S \in \mathbb{S}_n$ en omdat ons weet $SB = BS$ vir alle $S \in \mathbb{S}_n$, volg

$$\tilde{U}\tilde{S}M\tilde{U}^T = \left(\tilde{U}\tilde{S}\tilde{U}^T\right)\left(\tilde{U}M\tilde{U}^T\right) = SB = BS = \left(\tilde{U}M\tilde{U}^T\right)\left(\tilde{U}\tilde{S}\tilde{U}^T\right) = \tilde{U}M\tilde{S}\tilde{U}^T.$$

Hieruit sien ons dat $\tilde{S}M = M\tilde{S}$. Dit is alleenlik waar as $\alpha_i = 0$ vir $1 \leq i \leq d$. Dus $M = 0_{n\times n}$ en gevolglik ook $B = 0_{n\times n}$. Hiermee is (ii) bewys naamlik dat $\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = \{0_{n\times n}\}$ as $\lambda = 0$.

Om (iii) te bewys, neem aan $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ vir $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dan ook $-\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq -\overline{\mathbb{S}}(B)$. Hieruit en vanuit Lemma 5.13 volg vir $\lambda < 0$ dat

$$\begin{aligned}
\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) &= \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \overline{\mathbb{S}}(\lambda A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)\right\} = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : -\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)\right\} \\
&= \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq -\overline{\mathbb{S}}(B)\right\} = \left\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(-B)\right\} \\
&= \{-B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)\} = -\overline{\mathscr{C}}_{\mathfrak{L}}(A).
\end{aligned}$$

Hiermee is (iii) bewys. □

Gevolg 5.25. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, volg*

(i) $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ *vir* $\lambda > 0$.

(ii) $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = \emptyset$ *vir* $\lambda = 0$.

(iii) $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(\lambda A) = -\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ *vir* $\lambda < 0$.

5.4 Lyapunov reguliere matrikse

In hierdie afdeling kyk ons na matrikse met die volgende eienskap.

Definisie 5.26. 'n Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ word *Lyapunov regulier* genoem as die eiewaardes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ van A so is dat $\lambda_i + \overline{\lambda}_j \neq 0$, vir alle $1 \leq i, j \leq n$.

Let op dat Lyapunov reguliere matrikse reguliere inersie het, omdat vir $\lambda_i := \mathrm{i}\alpha \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ volg

$$\lambda_i + \overline{\lambda}_i = \mathrm{i}\alpha - \mathrm{i}\alpha = 0.$$

'n Matriks kan dus nie suiwer imaginêre eiewaardes hê wanneer dit Lyapunov regulier is nie.

Definisie 5.27. Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $K \in \mathbb{P}_n$ laat

$$\mathbb{S}_A(K) := \{S \in \mathbb{S}_n : SA + A^H S = K\}.$$

Die volgende stelling is die eerste hoofresultaat van die afdeling. Dit kan gebruik word om die versameling $\mathbb{S}_A(K)$ in 'n mate te bepaal, vir enige vaste $K \in \mathbb{P}_n$, wanneer ons matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Lyapunov regulier is.

Stelling 5.28 ([12], Oefening 18.6)**.** *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Lyapunov regulier wees, met reële Jordan ontbinding $A = PJ_{\mathbb{R}}P^{-1}$ soos in Stelling 3.26. Ontbind $J_{\mathbb{R}}$ soos in* (5.1)*. Laat*

$$K := (P^H)^{-1}[K_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}P^{-1} \in \mathbb{P}_n,$$

met blokke K_{ij} in ooreenstemming met $J_{\mathbb{R}}$ se ontbinding. Dan bevat $\mathbb{S}_A(K)$ net een matriks wat gegee word deur $S = (P^H)^{-1}[S_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}P^{-1}$ met bokke S_{ij} in ooreenstemming met $J_{\mathbb{R}}$ se ontbinding, waar

$$S_{11} = \int_0^\infty e^{-x\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H} K_{11} e^{-x\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)}\,\mathrm{d}x, \quad S_{22} = -\int_0^\infty e^{x\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H} K_{22} e^{x\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)}\,\mathrm{d}x,$$

en $S_{12} = S_{21}^H$ uniek bepaal word deur die vergelyking $S_{12}J_{\mathcal{E}_-(A)} + \left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{12} = K_{12}$.

Om Stelling 5.28 te bewys, gebruik ons die volgende resultaat uit [12], wat ons nie bewys nie.

Stelling 5.29 ([12], Stelling 18.5)**.** *Vir matrikse $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ het die matriksvergelyking $BX - XC = D$ 'n unieke oplossing $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ as en slegs as B en C geen gemeenskaplike eiewaardes het nie.*

Bewys van Stelling 5.28. Ons weet vanuit Stelling 3.26 en (5.1) dat die reële Jordan ontbinding van A gegee word deur $A = PJ_{\mathbb{R}}P^{-1}$, waar $P \in GL(n, \mathbb{R})$ en $J_{\mathbb{R}} = \mathrm{diag}\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}, J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)$. Veronderstel $\mathcal{E}_+(A) = u$ en $\mathcal{E}_-(A) = v$, dus $u + v = n$. Neem $K \in \mathbb{P}_n$, waar $K = (P^H)^{-1}[K_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}P^{-1}$ met die groottes van die blokke K_{ij} dieselfde as die van $J_{\mathbb{R}}$. Dan $K_{11} \in \mathbb{P}_u$ en $K_{22} \in \mathbb{P}_v$. Ons weet vanuit Lemma 5.12 dat

$$\mathbb{S}_A(K) = \mathbb{S}_{(PJ_{\mathbb{R}}P^{-1})}(K) = (P^H)^{-1}\mathbb{S}_{J_{\mathbb{R}}}(P^HKP)P^{-1} = (P^H)^{-1}\mathbb{S}_{J_{\mathbb{R}}}\left([K_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}\right)P^{-1}.$$

Dus $S \in \mathbb{S}_A(K)$ as en slegs as $P^HSP =: [S_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_{J_{\mathbb{R}}}([K_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2})$, met die groottes van die blokke S_{ij} dieselfde as die van $J_{\mathbb{R}}$. Hieruit kry ons dat $S \in \mathbb{S}_A(K)$ as en slegs as die blokke S_{ij}, $1 \le i, j \le 2$, voldoen aan

$$S_{11}\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right) + \left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{11} = K_{11}, \quad S_{12}J_{\mathcal{E}_-(A)} + \left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{12} = K_{12},$$
$$S_{21}J_{\mathcal{E}_+(A)} + \left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H S_{21} = K_{21} \quad \text{en} \quad S_{22}\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right) + \left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H S_{22} = K_{22}.$$

Aangesien $P^H KP = [K_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{P}_n$ en $P^H SP = [S_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_n$ volg $K_{12}^H = K_{21}$ en $S_{12}^H = S_{21}$. Hieruit sien ons dat die tweede en derde vergelyking

$$S_{12} J_{\mathcal{E}_-(A)} + \left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{12} = K_{12} \quad \text{en} \quad S_{21} J_{\mathcal{E}_+(A)} + \left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H S_{21} = K_{21},$$

Hermitiese getransponeerdes van mekaar is. Gevolglik kyk ons net na die eerste, tweede en vierde vergelykings.

Ons weet vanuit Stelling 5.14 dat

$$S_{11} := \int_0^\infty e^{-x\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H} K_{11} e^{-x\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)} \, \mathrm{d}x$$

die unieke oplossing is vir die vergelyking $S_{11}\left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right) + \left(J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{11} = K_{11}$. Soortgelyk volg vanuit Gevolg 5.15 dat

$$S_{22} := -\int_0^\infty e^{x\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H} K_{22} e^{x\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)} \, \mathrm{d}x$$

die unieke oplossing is vir die vergelyking $S_{22}\left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right) + \left(J_{\mathcal{E}_-(A)}\right)^H S_{22} = K_{22}$.

Vanuit die feit dat λ 'n eiewaarde van A is as en slegs as $\overline{\lambda}$ 'n eiewaarde van A^H is, weet ons $-\overline{\lambda}$ is 'n eiewaarde van $-A^H$ as en slegs as λ 'n eiewaarde van A is. Hieruit volg dat A en $-A^H$ geen gemeenskaplike eiewaardes het nie as en slegs as A Lyapunov regulier is. Dus het $J_{\mathcal{E}_-(A)}$ en $\left(-J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H$ geen gemeenskaplike eiewaardes nie as en slegs as A Lyapunov regulier is. Nou volg uit Stelling 5.29 dat die oplossing S_{12} vir die vergelyking

$$S_{12} J_{\mathcal{E}_-(A)} - \left(-J_{\mathcal{E}_+(A)}\right)^H S_{12} = K_{12}$$

uniek is. Hiermee is die stelling bewys. □

Die volgende lemma is saamgestel uit inligting verkry vanuit die bespreking op bl. 300 in [15].

Lemma 5.30. *Neem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ waar A diagonaliseerbaar en Lyapunov regulier is, met eiewaardes $\lambda_i \in \mathbb{C}$ vir $1 \leq i \leq n$. Laat $A = T \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) T^{-1}$, met $T \in GL(n, \mathbb{C})$. Vir enige $K \in \mathbb{P}_n$ bestaan $\mathbb{S}_A(K)$ uit een matriks wat gegee word deur*

$$S = (T^{-1})^H [L_A \circ (T^H K T)] T^{-1} \quad \text{waar} \quad [L_A]_{ij} := \frac{1}{\overline{\lambda_i} + \lambda_j}, \ \text{vir } 1 \leq i, j \leq n.$$

Dus volg

$$\mathbb{S}(A) = \left\{ (T^{-1})^H [L_A \circ (T^H K T)] T^{-1} : K \in \mathbb{P}_n \right\}.$$

Bewys. Aangesien A diagonaliseerbaar is, volg $A = T\Lambda T^{-1}$ met $T \in GL(n, \mathbb{C})$ en $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Veronderstel $S \in \mathbb{S}_A(K)$. Dan

$$\begin{aligned} K &= SA + A^H S = S(T\Lambda T^{-1}) + (T\Lambda T^{-1})^H S, \quad \text{asook} \\ T^H K T &= (T^H S T)\Lambda + \Lambda^H (T^H S T). \end{aligned}$$

Laat $[T^H S T]_{ij} = r_{ij}$, vir $1 \leq i, j \leq n$. Ons sien dat

$$[T^H K T]_{ij} = [(T^H S T)\Lambda + \Lambda^H (T^H S T)]_{ij} = r_{ij}\lambda_j + \overline{\lambda}_i r_{ij} = (\overline{\lambda}_i + \lambda_j) r_{ij} = (\overline{\lambda_i} + \lambda_j)[T^H S T]_{ij}.$$

Aangesien A Lyapunov regulier is, bestaan die matriks

$$[L_A]_{ij} := \frac{1}{\overline{\lambda}_i + \lambda_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Nou volg $T^H ST = L_A \circ (T^H KT)$. Hieruit kry ons $S = (T^{-1})^H [L_A \circ (T^H KT)] T^{-1}$, waaruit ons maklik aflei dat S Hermities is. Omdat S egter reëel is, volg dit dat $S = (T^{-1})^H [L_A \circ (T^H KT)] T^{-1}$ simmetries is. □

Ons kyk na spesiale gevalle van Lemma 5.30. In die geval waar $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 'n Lyapunov reguliere diagonaalmatriks is, sê $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, volg vir $K = [k_{ij}]_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{P}_n$ dat $S \in \mathbb{S}_A(K)$ gegee word deur $S = L_A \circ K$. Dus vir

$$S = [s_{ij}]_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,n} \quad \text{volg} \quad s_{ij} = \frac{k_{ij}}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Nog 'n spesiale geval waarna ons kyk is die matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ waar $A = C(a, b)$ soos in Afdeling 3.5. Ons weet dat $A = RD(\lambda)R^{-1}$, waar $\lambda = a + \mathrm{i}b$, met R en $D(\lambda)$ soos in Afdeling 3.5. Dus A is diagonaliseerbaar oor $\mathbb{C}$. Ons wys dat vir $K = [k_{ij}] \in \mathbb{P}_2$ volg dat $S \in \mathbb{S}_A(K)$ wel reëel is. Ons sien dit vanuit

$$\begin{aligned} S &= (R^{-1})^H [L(A) \circ \big(R^H KR\big)] R^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_{11}+k_{22}}{4a} + \frac{(k_{11}-k_{22})a+2k_{12}b}{4(a^2+b^2)} & \frac{2k_{12}a-(k_{11}-k_{22})b}{4(a^2+b^2)} \\ \frac{2k_{12}a-(k_{11}-k_{22})b}{4(a^2+b^2)} & \frac{k_{11}+k_{22}}{4a} - \frac{(k_{11}-k_{22})a+2k_{12}b}{4(a^2+b^2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2. \end{aligned}$$

Die volgende stelling is die tweede hoofresultaat van die afdeling. Die motivering vir die resultaat is dat die versameling $\mathbb{S}(A)$ eenvoudiger is om te bepaal as $\overline{\mathbb{S}}(A)$.

Stelling 5.31 ([7], Proposisie 5)**.** *Vir $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ waar A en B Lyapunov regulier is, is die volgende ekwivalent*

(i) $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$,

(ii) $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$.

In dié geval kan ons dus $A \leq B$ voorstel met $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$.

Vanuit die Inersie Stelling sien ons dat as $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$ dan sal $\operatorname{In}(A) = \operatorname{In}(S)$ vir elke $S \in \mathbb{S}(A)$ en gevolglik ook $\operatorname{In}(S) = \operatorname{In}(B)$. Dus impliseer $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$ dat $\operatorname{In}(A) = \operatorname{In}(B)$.

Vervolgens definieer ons die Lyapunov operator, wat ons benodig om Stelling 5.31 te kan bewys.

Definisie 5.32. Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieer ons die Lyapunov operator $\mathfrak{L}_A : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ as die lineêre afbeelding $\mathfrak{L}_A(S) := SA + A^H S$.

Aangesien $\mathfrak{L}_A$ 'n lineêre afbeelding op 'n eindig dimensionele, genormeerde ruimte is, volg dit dat $\mathfrak{L}_A$ kontinu is. In die geval waar $\mathfrak{L}_A^{-1}$ bestaan sal dit ook kontinu wees, aangesien $\mathfrak{L}_A^{-1}$ ook 'n lineêre afbeelding is. Ons weet reeds uit Stelling 5.28 onder watter voorwaardes $\mathfrak{L}_A^{-1}$ bestaan, aangesien ons vanuit Stelling 5.28 weet dat $\mathfrak{L}_A$ bijektief is as en slegs as A Lyapunov regulier is. Dus kry ons die volgende resultaat.

Gevolg 5.33. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bestaan $\mathfrak{L}_A^{-1}$ as en slegs as A Lyapunov regulier is.*

Die oplossingsversamelings van die Lyapunov ongelykhede kan in die geval waar $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Lyapunov regulier is dus ook voorgestel word met

$$\mathfrak{L}_A^{-1}(\overline{\mathbb{P}}_n) := \{S \in \mathbb{S}_n : SA + A^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n\} = \overline{\mathbb{S}}(A) \quad \text{en} \quad \mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n) := \{S \in \mathbb{S}_n : SA + A^H S \in \mathbb{P}_n\} = \mathbb{S}(A).$$

Ons maak gebruik van die Lyapunov operator se eienskappe om die volgende resultaat te bewys, waarna ons Stelling 5.31 kan bewys.

Lemma 5.34. *Neem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ waar A Lyapunov regulier is. Die versameling $\mathbb{S}(A)$ is oop en die konvekse keël $\overline{\mathbb{S}}(A)$ is die afsluiting van $\mathbb{S}(A)$.*

Bewys. Ons weet vanuit Gevolg 5.33 dat $\mathfrak{L}_A^{-1}$ bestaan, aangesien A Lyapunov regulier is. Vanuit die feit dat $\mathfrak{L}_A^{-1}$ kontinu is en $\mathbb{P}_n$ 'n oop versameling is, volg dat $\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{S}(A)$ ook 'n oop versameling is. Soortgelyk, vanuit $\mathfrak{L}_A^{-1}(\overline{\mathbb{P}}_n) = \overline{\mathbb{S}}(A)$ en die feit dat die versameling $\overline{\mathbb{P}}_n$ geslote is, volg dat die konvekse keël $\overline{\mathbb{S}}(A)$ geslote is.

Uit die feit dat $\overline{\mathbb{P}}_n$ die topologiese afsluiting van $\mathbb{P}_n$ is, volg dat $\mathfrak{L}_A^{-1}(\overline{\mathbb{P}}_n) = \overline{\mathbb{S}}(A)$ die afsluiting van $\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{S}(A)$ is. $\square$

Bewys van Stelling 5.31. Veronderstel $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Dan volg $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ omdat $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(A)$. Hieruit en vanuit die feit dat $\mathfrak{L}_A^{-1}$ en $\mathfrak{L}_B^{-1}$ bestaan aangesien beide A en B Lyapunov regulier is, volgens Gevolg 5.33, volg nou $\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n) \subseteq \mathfrak{L}_B^{-1}(\overline{\mathbb{P}}_n)$, oftewel $\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n)\right) \subseteq \overline{\mathbb{P}}_n$.

Ons wys deur middel van 'n teenstrydigheid dat $\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n)\right) \subseteq \mathbb{P}_n$. Neem $K \in \mathbb{P}_n$, $Q \in \overline{\mathbb{P}}_n$ waar $Q \notin \mathbb{P}_n$ en veronderstel $\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}(K)\right) = Q$. Vanuit ons keuse vir Q volg $\mathcal{N}_Q \neq \{0_n\}$, aangesien ons weet $\mathbb{P}_n$ bestaan uit die nie-singuliere matrikse in $\overline{\mathbb{P}}_n$. Neem $0_n \neq v \in \mathcal{N}_Q$ en definieer $M := vv^H \in \mathbb{S}_n$. Nou volg vir elke $\delta < 0$ dat $Q + \delta M \notin \overline{\mathbb{P}}_n$. Verder, deur gebruik te maak van die lineariteit van die operatore $\mathfrak{L}_A$ en $\mathfrak{L}_B^{-1}$, sien ons

$$\mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(Q + \delta M)\right) = \mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(Q)\right) + \mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(\delta M)\right) = K + \delta\mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(M)\right).$$

Aangesien $\mathbb{P}_n$ 'n oop versameling is, weet ons vir $|\delta|$ klein genoeg volg $K + \delta\mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(M)\right) \in \mathbb{P}_n$. Maar vanuit ons aanname, wat impliseer dat $\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n)\right) \subseteq \overline{\mathbb{P}}_n$, volg nou

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}\left(K + \delta\mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(M)\right)\right)\right) &= \mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}(K)\right) + \mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}\left(\delta\mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(M)\right)\right)\right)\\ &= Q + \delta\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}\left(\mathfrak{L}_A\left(\mathfrak{L}_B^{-1}(M)\right)\right)\right) = Q + \delta M \in \overline{\mathbb{P}}_n,\end{aligned}$$

vir $|\delta|$ klein genoeg. Dit lewer 'n teenstryd op aangesien ons keuse vir M sodanig is dat $Q + \delta M \notin \overline{\mathbb{P}}_n$ vir alle $\delta < 0$. Hieruit volg dus dat $\mathfrak{L}_B\left(\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n)\right) \subseteq \mathbb{P}_n$ oftewel $\mathfrak{L}_A^{-1}(\mathbb{P}_n) \subseteq \mathfrak{L}_B^{-1}(\mathbb{P}_n)$. Hiermee sien ons as $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$, dan ook $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$.

Veronderstel $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$. Dan volg $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ omdat $\mathbb{S}(B) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Aangesien ons vanuit Lemma 5.34 weet die konvekse keël $\overline{\mathbb{S}}(B)$ is geslote en dat $\overline{\mathbb{S}}(A)$ die afsluiting is van $\mathbb{S}(A)$, volg uit $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ ook $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Hiermee sien ons as $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$, dan ook $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. $\square$

Lemma 5.35. *Neem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ waar $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ met $\mathcal{E}_+(A) = n$. Dan volg $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ as en slegs as $B = \operatorname{diag}(\delta_1, ..., \delta_n)$ met $\delta_i = \delta_j$ indien $\lambda_i = \lambda_j$, $1 \leq i, j \leq n$ en $\mathcal{E}_+(B) = n$, sowel as*

$$L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n,$$

met L_A soos in Lemma 5.17.

Bewys. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Dan volg vanuit Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dat $B = q(A)$ vir 'n $q \in \mathbb{R}[x]$. Dus $B = \operatorname{diag}(q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)) = \operatorname{diag}(\delta_1, ..., \delta_n)$ met $q(\lambda_i) =: \delta_i \in \mathbb{R}$ vir $1 \leq i \leq n$. Ons sien hieruit dat $\delta_i = \delta_j$ indien $\lambda_i = \lambda_j$ vir $1 \leq i, j \leq n$. Ons weet vanuit $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ volg $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ en vir $S \in \mathbb{S}(A)$ volg uit Stelling 5.8 dat $\operatorname{In}(S) = \operatorname{In}(A)$. Dus $S \in \mathbb{P}_n$. Ons wys dat vanuit $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ en die feit dat B reguliere inersie het, weet ons $\mathcal{E}_+(B) = n$. Laat x_i, $1 \leq i \leq n$, die eievektore van B wees, dus $Bx_i = \delta_i x_i$. Neem $S \in \mathbb{S}(A)$, dan volg vanuit $\mathbb{S}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ dat $SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Dus volg $x_i^H(SB + B^H S)x_i \geq 0$ vir alle x_i. Hieruit sien ons

$$\begin{aligned} 0 \leq x_i^H(SB + B^H S)x_i &= x_i^H S(Bx_i) + (x_i^H B^H)Sx_i = x_i^H S(\delta_i x_i) + \overline{\delta}_i x_i^H(Sx_i) \\ &= \delta_i(x_i^H Sx_i) + \overline{\delta}_i(x_i^H Sx_i) = (\delta_i + \overline{\delta}_i)(x_i^H Sx_i) = 2\delta_i(x_i^H Sx_i). \end{aligned}$$

Aangesien $S \in \mathbb{P}_n$ weet ons $x_i^H Sx_i > 0$ vir alle x_i. Gevolglik moet $2\delta_i \geq 0$ vir $1 \leq i \leq n$. Maar $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ het reguliere inersie, dus $\delta_i \neq 0$ vir $1 \leq i \leq n$. Hieruit volg $\mathcal{E}_+(B) = n$.

Vervolgens wys ons $L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n$. Uit $\mathcal{E}_+(A) = n$ en $\mathcal{E}_+(B) = n$ volg dat A en B Lyapunov regulier is. Dus weet ons vanuit Stelling 5.31 dat $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ ekwivalent is aan $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$. Neem $S \in \mathbb{S}_A(K)$ vir 'n vaste $K \in \mathbb{P}_n$. Vanuit Lemma 5.17 weet ons $S = K \circ L_A$. Dus

$$(K \circ L_A)\, B + B^H\, (K \circ L_A) \in \mathbb{P}_n.$$

Aangesien B 'n diagonaalmatriks is, volg uit Lemma 3.20 dat

$$K \circ (L_A B) + K \circ \left(B^H L_A\right) = (K \circ L_A)\, B + B^H\, (K \circ L_A) \in \mathbb{P}_n.$$

Die Hadamard produk is distributief, gevolglik

$$K \circ \left(L_A B + B^H L_A\right) = K \circ (L_A B) + K \circ \left(B^H L_A\right) \in \mathbb{P}_n.$$

Aangesien dit vanuit $K \circ \left(L_A B + B^H L_A\right) \in \mathbb{P}_n$, vir elke vaste $K \in \mathbb{P}_n$, volg dat

$$e^T \left(K \circ \left(L_A B + B^H L_A\right)\right) e > 0, \quad \text{waar} \quad e^T = [1, ..., 1] \in \mathbb{R}^n,$$

volg uit Lemma 3.22 dat $L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n$. Hiermee is die een rigting bewys.

Vir die omgekeerde, veronderstel $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ waar $B = \operatorname{diag}(\delta_1, ..., \delta_n)$ met $\delta_i = \delta_j$ indien $\lambda_i = \lambda_j$, $1 \leq i, j \leq n$ en $\mathcal{E}_+(B) = n$, sowel as $L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n$. Ons maak gebruik van Lagrange se interpolasieformule om te weet daar bestaan 'n $p \in \mathbb{R}[x]$ só dat $p(A) = B$. Matrikse en Lagrange interpolasie word bespreek op bl 29 van [14]. Uit Lagrange se interpolasieformule volg dat vir $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ 'n polinoom $p \in \mathbb{R}[x]$ bestaan, só dat $p(\lambda_i) = \delta_i$ vir alle $1 \leq i \leq n$, waar $\delta_i = \delta_j$ indien $\lambda_i = \lambda_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Gevolglik weet ons $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ vanuit Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Laastens wys ons dat uit $\mathcal{E}_+(B) = n$ en $L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n$ volg $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$. Ons weet uit Stelling 3.21 dat as $L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n$, dan $K \circ \left(L_A B + B^H L_A\right) \in \mathbb{P}_n$ vir alle $K \in \mathbb{P}_n$. Die Hadamard produk is distributief. Daarom volg

$$K \circ (L_A B) + K \circ \left(B^H L_A\right) = K \circ \left(L_A B + B^H L_A\right) \in \mathbb{P}_n.$$

Ons gebruik weer Lemma 3.20, waaruit volg

$$(K \circ L_A)\, B + B^H\, (K \circ L_A) = K \circ (L_A B) + K \circ \left(B^H L_A\right) \in \mathbb{P}_n.$$

Aangesien ons uit Lemma 5.17 weet $\mathbb{S}(A) = \{K \circ L_A : K \in \mathbb{P}_n\}$, sien ons vir $S \in \mathbb{S}(A)$ volg $S \in \mathbb{S}(B)$ vir elke vaste $K \in \mathbb{P}_n$. Aangesien beide A en B Lyapunov regulier is, weet ons uit Stelling 5.31 dat $\mathbb{S}(A) \subseteq \mathbb{S}(B)$ ekwivalent is aan $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Hieruit volg $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ en dus is bewys dat $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. □

Gevolg 5.36. *Neem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ waar $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ met $\mathcal{E}_-(A) = n$. Dan volg $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ as en slegs as $B = \operatorname{diag}(\delta_1, ..., \delta_n)$ met $\delta_i = \delta_j$ indien $\lambda_i = \lambda_j$, $1 \le i, j \le n$ en $\mathcal{E}_-(B) = n$, sowel as*

$$L_A B + B^H L_A \in \mathbb{P}_n,$$

met L_A soos in Lemma 5.17.

'n Probleem wat opduik wanneer ons bostaande lemma en gevolg vir die diagonaliseerbare geval probeer doen, deur van Lemma 5.30 gebruik te maak, is dat vir $K \in \mathbb{P}_n$ en $T \in GL(n, \mathbb{C})$ lewer $T^H KT$ nie al die komplekse, positief definiete matrikse op nie. Gevolglik kan ons nie 'n komplekse weergawe van Lemma 3.22 in hierdie geval toepas nie.

Ons vermoed die volgende is waar. Die resultaat is in [7] sonder bewys genoem, terwyl daar na 'n ander ongepubliseerde bron verwys is.

Vermoede 5.37. *Vir alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met A Lyapunov regulier, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Aangesien ons in Stelling 5.22(ii) reeds bewys het $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ as A reguliere inersie het, hoef ons net te wys $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$ vir A 'n Lyapunov reguliere matriks.

Ons kyk na spesiale gevalle waarvoor Vermoede 5.37 waar is.
Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ skryf A in sy reële Jordan ontbinding $A = PJ_{\mathbb{R}}P^{-1}$ met $P \in GL(n, \mathbb{R})$. Ons weet uit Lemma 5.4 dat $\mathscr{C}(A) = P\mathscr{C}(J_{\mathbb{R}})P^{-1}$, uit Lemma 5.23 dat $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) = P\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(J_{\mathbb{R}})P^{-1}$ en uit Stelling 4.17 dat $\{A\}''_{\mathbb{R}} = P\{J_{\mathbb{R}}\}''_{\mathbb{R}}P^{-1}$. Nou volg

$$\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} = P\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(J_{\mathbb{R}})P^{-1} \cap P\{J_{\mathbb{R}}\}''_{\mathbb{R}}P^{-1} = P\left(\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(J_{\mathbb{R}}) \cap \{J_{\mathbb{R}}\}''_{\mathbb{R}}\right)P^{-1}.$$

Ons kan dus werk met $\mathscr{C}(J_{\mathbb{R}})$ en $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(J_{\mathbb{R}}) \cap \{J_{\mathbb{R}}\}''_{\mathbb{R}}$; daarom neem ons die reële matriks A gelyk aan sy reële Jordan-matriks $J_{\mathbb{R}}$ in die volgende spesiale geval.

Voorbeeld 5.38. *Veronderstel die Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ word gegee deur $A := \lambda I_n$, waar $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Ons weet dat A^{-1} bestaan, aangesien A Lyapunov regulier is en dit impliseer dat $\lambda \neq 0$. Dus $A^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n$ en daarom volg $\mathscr{C}(A) = \{\tau I_n : \tau \ge 0\}$. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Vir $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ weet ons vanuit Stelling 4.2 vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dat $B = p(A)$ vir 'n polinoom $p(\cdot)$ oor $\mathbb{R}$. Vanuit die bewys van Stelling 4.4 weet ons $\mathbb{R}[A] = \{p(A) : \deg(p(\cdot)) < \deg(m_A(\cdot))\}$. Ons weet vanuit Stelling 3.35 dat Lemma 4.8 ook geld vir 'n reële matriks A. Dus met behulp van Lemma 4.8 sien ons $m_A(x) = (x - \lambda)$. Gevolglik $B = p(A)$, waar $\deg(p(\cdot)) = 0$. Dit wil sê $B = p_0 I_n$, $p_0 \in \mathbb{R}$.*

Ons sien dat $B \in \mathscr{C}(A)$ as $p_0 \ge 0$. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$. Ons weet vir $S \in \mathbb{S}_n$, só dat $SA + A^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n$, volg $SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Ons sien uit $SA + A^H S = 2\lambda S$ dat $SA + A^H S \in \overline{\mathbb{P}}_n$ as $S \in \overline{\mathbb{P}}_n$. Dan sal $SB + B^H S = 2p_0 S \in \overline{\mathbb{P}}_n$ as en slegs as $p_0 \ge 0$. Gevolglik is $B \in \mathscr{C}(A)$ en dus volg $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$. Ons sien dat in die geval waar $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ geld $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Sou $A = \lambda I_n$, waar $\lambda \in \mathbb{R}_-$, dan volg die bewys soortgelyk met $\mathscr{C}(A) = \{\tau I_n : \tau \le 0\}$.

In Hoofstuk 7 bewys ons Vermoede 5.37 vir alle moontlike gevalle van $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ met A Lyapunov regulier.

5.5 Notas

In Afdeling 5.1 vorm Stelling 5.1 die hoofresultaat. Hierdie stelling is verkry vanuit [9], so ook Proposisie 5.2. Die meeste ander resultate in Afdeling 5.1 is verkry vanuit [7] of [9]. Die bewyse van hierdie resultate is eenvoudig en ontbreek daarom meestal in hierdie artikels en dus het ons dit vir volledigheidsonthalwe ingesluit.

In Afdeling 5.2 word die hoofresultate Stelling 5.8, Stelling 5.14, Gevolg 5.15 en Stelling 5.16 verkry vanuit [12]. Verder word die eenvoudiger resultate rakende die oplossingsversamelings van die Lyapunov ongelykhede meestal sonder bewys vanuit [7] of [9] verkry. Die bewyse is nie moeilik nie en is vir volledigheidsonthalwe ingesluit. Laastens, Lemma 5.17 en Gevolg 5.18 is deur ons saamgestel deur van die resultate in [12] gebruik te maak.

In Afdeling 5.3 vorm Stelling 5.22 die hoofresultaat. Alle resultate rakende die **kik** $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ is verkry vanuit [7]. Weereens ontbreek meeste van die bewyse van hierdie resultate in [7].

Laastens, in Afdeling 5.4 vorm Stelling 5.28 en Stelling 5.31 die twee hoofresultate. Die beskrywing van die oplossingsversameling $\mathbb{S}_A(K)$ waar A 'n diagonaliseerbare matriks is, word verkry vanuit [15]. Hieruit kon ons Lemma 5.30 saamstel. Verder kon ons Lemma 5.35 en Gevolg 5.36 saamstel uit Lemma 5.17, van die vorige afdeling en uit Stelling 5.31. Hierdie lemma en gevolg sluit aan by die verduideliking wat voorkom in die inleiding van [19]. Die inligting rakende die Lyapunov operator is verkry vanuit Afdeling 4.3 in [15]. Die afdeling word afgesluit met 'n bespreking rondom Vermoede 5.37.

6 Die kik $\mathcal{PRO}$

In hierdie hoofstuk kyk ons na die klasse van onewe, reële, rasionale funksies wat die oop-regter halfvlak Π_+ in die geslote-regter halfvlak $\overline{\Pi}_+ := \Pi_+ \cup i\mathbb{R}$ afbeeld. Ons verwys na hierdie funksies as positiewe, onewe, reële, rasionale funksies en dui die versameling aan met $\mathcal{PRO}$. Ons begin in Afdeling 6.1 deur te wys $\mathcal{PRO}$ is 'n **kik**. In Afdeling 6.2 bepaal ons die vorm van funksies in $\mathcal{PRO}$ en sien dat elke funksie in $\mathcal{PRO}$ die Foster voorstelling aanneem. Ons sien ook in hierdie afdeling dat $\mathcal{PRO}$ voortgebring word deur 'n enkele element. In Afdeling 6.3 en verder kyk ons na 'n alternatiewe metode waarvolgens ons kan wys die versameling egte funksies in $\mathcal{PRO}$ vorm 'n **kik** en neem die Foster voorstelling aan.

6.1 Die kik van positiewe, onewe, reële, rasionale funksies

Ons noem 'n funksie f op $\mathbb{C}$ 'n *reële, rasionale funksie* as dit geskryf kan word as die verhouding van twee reële polinome:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{met} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{en} \quad p, q \in \mathbb{R}[z],$$

waar p en q geen gemeenskaplike nulpunte het nie. Ons definieer

$$\deg(f(\cdot)) = \text{maks}\left\{\deg(p(\cdot)), \deg(q(\cdot))\right\}.$$

Ons weet 'n reële, rasionale funksie is analities oral in die komplekse vlak behalwe by die nulpunte van die noemer. Die nulpunte van die noemer word die *pole* van die funksie genoem. 'n Reële, rasionale funksie f het 'n pool van orde k by $z_0 \neq \infty$ as

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \tag{6.1}$$

bestaan en nie-nul is. Die limiet (6.1) word f se *residu* by z_0 genoem. In die geval waar $k = 1$ word die pool z_0 *enkelvoudig* genoem. Vir 'n pool by ∞ geld dieselfde definisies, maar (6.1) word vervang met

$$\lim_{z\to\infty} z^{-k} f(z).$$

'n Reële, rasionale funksie f word *eg* genoem as $f(z)$ neig na 'n eindige limiet soos $z \to \infty$ en *streng eg* as $f(z) \to 0$ soos $z \to \infty$. Dit volg dat f eg is as $\deg(q(\cdot)) \geq \deg(p(\cdot))$ en streng eg as $\deg(q(\cdot)) > \deg(p(\cdot))$. Die versameling van reële, rasionale funksies op $\mathbb{C}$ vorm 'n reële algebra en ons dui dit met $\mathcal{R}$ aan. Vir $f \in \mathcal{R}$ laat D_f die definisieversameling van f aandui, dit wil sê D_f is $\mathbb{C}$ met die pole van f verwyder.

Definisie 6.1. Ons definieer die versameling van alle positiewe, reële, rasionale funksies as

$$\mathcal{PR} = \{f \in \mathcal{R} : \Pi_+ \subseteq D_f,\ f(\Pi_+) \subseteq \overline{\Pi}_+\}.$$

Definisie 6.2. Vir $f \in \mathcal{R}$ laat $f^{\#}(z) := (\overline{f(-\overline{z})})$. Ons sê f is *ewe* as $f = f^{\#}$ en *onewe* as $f = -f^{\#}$. Ons definieer die versamelings van alle ewe en onewe, reële, rasionale funksies as

$$\mathcal{RE} := \{f \in \mathcal{R} : f = f^{\#}\} \quad \text{en} \quad \mathcal{RO} := \{f \in \mathcal{R} : f = -f^{\#}\}.$$

Definisie 6.3. Ons definieer die versameling van alle positiewe, onewe, reële, rasionale funksies as

$$\mathcal{PRO} = \mathcal{PR} \cap \mathcal{RO}.$$

Ons wys nou die versamelings $\mathcal{PR}$, $\mathcal{RE}$, $\mathcal{RO}$ en $\mathcal{PRO}$ is **kik**s van $\mathcal{R}$.

Lemma 6.4 ([2], Proposisie 2.2)**.** *Die versameling $\mathcal{PR}$ is 'n **kik** van $\mathcal{R}$.*

Bewys. Vir $f, g \in \mathcal{PR}$ en $z \in \Pi_+$ volg

$$\mathrm{Re}\,((f+g)(z)) = \mathrm{Re}\,(f(z) + g(z)) = \mathrm{Re}\,(f(z)) + \mathrm{Re}\,(g(z)) \geq 0,$$

aangesien $\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq 0$ en $\mathrm{Re}\,(g(z)) \geq 0$. Dus $f + g \in \mathcal{PR}$ en hieruit volg dat $\mathcal{PR}$ geslote is onder optelling.

Vir enige $\alpha \geq 0$, $z \in \Pi_+$ en $f \in \mathcal{PR}$ volg

$$\mathrm{Re}\,((\alpha f)(z)) = \mathrm{Re}\,(\alpha f(z)) = \alpha\,\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq 0,$$

aangesien $\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq 0$ en $\alpha \geq 0$. Dus $\alpha f \in \mathcal{PR}$ en hieruit volg dat $\mathcal{PR}$ geslote is onder nie-negatiewe skaling.

Aangesien elke $0 \neq f \in \mathcal{R}$ inverteerbaar is en elke $0 \neq f \in \mathcal{PR}$ geen nulpunte of pole in Π_+ het nie, soos volgens items 7 en 9 op bl 133 – 134 in [5], volg vir $0 \neq f \in \mathcal{PR}$ en $z \in \Pi_+$ dat

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f}(z)\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(z)} + \overline{\left(\frac{1}{f(z)}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{\overline{f(z)}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{f(z)} + f(z)}{f(z)\overline{f(z)}}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{Re}(f(z))}{|f(z)|^2}\right) \geq 0,\end{aligned}$$

aangesien $\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq 0$ en $|f(z)|^2 > 0$. Dus, $\frac{1}{f} \in \mathcal{PR}$ en gevolglik is $\mathcal{PR}$ geslote onder die neem van inverses. Hiermee is bewys dat $\mathcal{PR}$ 'n **kik** van $\mathcal{R}$ is. $\square$

Lemma 6.5 ([2], Proposisie 4.1)**.** *Die versamelings $\mathcal{RE}$ en $\mathcal{RO}$ is reële deelruimtes van $\mathcal{R}$, wat geslote is onder inversie. Dus, in die besonder is $\mathcal{RE}$ en $\mathcal{RO}$ **kik**s van $\mathcal{R}$.*

Bewys. Ons bewys dat $\mathcal{RE}$ 'n reële deelruimte van $\mathcal{R}$ is, wat geslote is onder inversie. Op 'n soortgelyke wyse kan bewys word dat dieselfde vir $\mathcal{RO}$ geld. Ons begin deur te wys dat vir $f, g \in \mathcal{R}$ geld $(f+g)^{\#} = f^{\#} + g^{\#}$. Om dit te sien, neem $z \in \mathbb{C}$, dan

$$(f+g)^{\#}(z) = \overline{(f+g)(-\overline{z})} = \overline{(f(-\overline{z}) + g(-\overline{z}))} = \overline{f(-\overline{z})} + \overline{g(-\overline{z})} = f^{\#}(z) + g^{\#}(z).$$

Dan geld in die besonder vir $f, g \in \mathcal{RE}$ dat

$$(f+g) = f + g = f^{\#} + g^{\#} = (f+g)^{\#}.$$

Dus $f + g \in \mathcal{RE}$ en hiermee is bewys dat $\mathcal{RE}$ geslote is onder optelling.

Vervolgens wys ons dat $(\beta f)^{\#} = \beta f^{\#}$ vir $\beta \in \mathbb{R}$ en $f \in \mathcal{R}$. Om dit te sien, neem $z \in \mathbb{C}$, dan

$$(\beta f)^{\#}(z) = \overline{(\beta f)(-\overline{z})} = \overline{\beta}\, \overline{f(-\overline{z})} = \beta f^{\#}(z).$$

Dus, vir $f \in \mathcal{RE}$ volg $(\beta f)^{\#} = \beta f^{\#} = \beta f$. Hieruit sien ons dat $\mathcal{RE}$ nie alleenlik net geslote is onder nie-negatiewe skaling en gevolglik 'n konvekse keël van $\mathcal{R}$ is nie, maar ook dat $\mathcal{RE}$ 'n reële deelruimte van $\mathcal{R}$ is.

Laastens, om te bewys dat $\mathcal{RE}$ geslote is onder die neem van inverses, neem $0 \neq f \in \mathcal{RE}$ waar $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$, met $z \in \mathbb{C}$ en $n, d \in \mathbb{R}[z]$. Vanuit $f(z) = f^{\#}(z)$ volg

$$\frac{n(z)}{d(z)} = \frac{n^{\#}(z)}{d^{\#}(z)}, \quad \text{oftewel} \quad n(z)d^{\#}(z) = n^{\#}(z)d(z).$$

Dus

$$\left(\frac{1}{f}\right)(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{d(z)}{n(z)} = \frac{d^{\#}(z)}{n^{\#}(z)} = \frac{1}{f^{\#}(z)} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\#}(z).$$

Hieruit volg dat $\frac{1}{f} \in \mathcal{RE}$ en gevolglik is $\mathcal{RE}$ geslote onder die neem van inverses. Hiermee is bewys dat die versameling $\mathcal{RE}$ 'n reële deelruimte van $\mathcal{R}$ is, wat geslote is onder inersie. $\square$

Gevolg 6.6 ([8], Waarneming 4.2.1)**.** *Die versameling $\mathcal{PRO}$ is 'n **kik** van $\mathcal{R}$.*

Bewys. Ons weet uit Lemma 6.4 en Lemma 6.5 dat beide versamelings $\mathcal{PR}$ en $\mathcal{RO}$ **kik**s van $\mathcal{R}$ is. Uit Lemma 2.7 weet ons die snyding van **kik**s is weer 'n **kik**. Dus is $\mathcal{PR} \cap \mathcal{RO} = \mathcal{PRO}$ 'n **kik** van $\mathcal{R}$. $\square$

Lemma 6.7. *Dit volg dat $\mathcal{R} = \mathcal{RE} \oplus \mathcal{RO}$, waar $\oplus$ 'n direkte som aandui.*

Bewys. Dit is duidelik dat elke $f \in \mathcal{R}$ geskryf kan word as

$$f = f_{\mathcal{RE}} + f_{\mathcal{RO}}, \quad \text{waar} \quad f_{\mathcal{RE}} = \frac{1}{2}\left(f + f^{\#}\right) \in \mathcal{RE} \quad \text{en} \quad f_{\mathcal{RO}} = \frac{1}{2}\left(f - f^{\#}\right) \in \mathcal{RO}.$$

Ons bewys dat bostaande ontbinding uniek is, in die sin dat sou $f = f_1 + f_2$ met $f_1 \in \mathcal{RE}$ en $f_2 \in \mathcal{RO}$, dan geld $f_1 = f_{\mathcal{RE}}$ en $f_2 = f_{\mathcal{RO}}$. Om dit te sien, veronderstel $f \in \mathcal{R}$ waar $f = f_1 + f_2$ met $f_1 \in \mathcal{RE}$ en $f_2 \in \mathcal{RO}$. Aangesien elke $f \in \mathcal{R}$ geskryf kan word as $f = f_{\mathcal{RE}} + f_{\mathcal{RO}}$, volg

$$f_{\mathcal{RE}} + f_{\mathcal{RO}} = f_1 + f_2, \quad \text{oftewel} \quad f_{\mathcal{RE}} - f_1 = f_2 - f_{\mathcal{RO}}.$$

Verder volg $f_{\mathcal{RE}} - f_1 \in \mathcal{RE}$ en $f_2 - f_{\mathcal{RO}} \in \mathcal{RO}$ omdat $\mathcal{RE}$ en $\mathcal{RO}$ reële deelruimtes van $\mathcal{R}$ is volgens Lemma 6.5. Vir enige $g \in \mathcal{RE} \cap \mathcal{RO}$ volg $-g = g^{\#} = g$, dus moet g die nulfunksie wees. Hieruit weet ons $\mathcal{RE} \cap \mathcal{RO} = \{0\}$ en daarom volg $f_{\mathcal{RE}} - f_1 = 0 = f_2 - f_{\mathcal{RO}}$. Hiermee is die uniekheid bewys. Gevolglik sien ons dat ons enige reële, rasionale funksie f uniek kan skryf as die som van sy ewe deel $f_{\mathcal{RE}}$ en sy onewe deel $f_{\mathcal{RO}}$. Dus, $\mathcal{R} = \mathcal{RE} \oplus \mathcal{RO}$. $\square$

Voorbeeld 6.8. *Beskou die funksie $f_{a,b}(z) := \frac{z}{az^2+b} \in \mathcal{R}$, vir $z \in \mathbb{C}$ en $a, b \geq 0$ waar $a + b > 0$. Ons begin deur te wys dat $f_{a,b}$ slegs pole op $\mathrm{i}\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ het en elke pool enkelvoudig is, asook dat die residu by elke pool positief en reëel is. Veronderstel eers $a, b \neq 0$, dan volg*

$$f_{a,b}(z) = \frac{z}{a\left(z^2 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{z}{a\left(z + \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(z - \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}, \quad \textit{en}$$

$$\lim_{z \to \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(z \mp \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}\right) f_{a,b}(z) = \lim_{z \to \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{z}{a\left(z \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} = \frac{\pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}}{a\left(\pm 2\mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} = \frac{1}{2a}.$$

Hieruit sien ons dat $f_{a,b}$, waar $a, b > 0$, enkelvoudige pole $\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{b}{a}}$ op $\mathrm{i}\mathbb{R}$ het en 'n positiewe, reële residu by elke pool. In die geval waar $b = 0$ volg

$$f_{a,0}(z) = \frac{z}{az^2} = \frac{1}{az}, \quad \textit{en} \quad \lim_{z \to 0} z f_{a,0}(z) = \frac{1}{a}.$$

Hieruit sien ons dat $f_{a,0}$, waar $a > 0$, 'n enkelvoudige pool 0 op $\mathrm{i}\mathbb{R}$ het en 'n positiewe, reële residu by hierdie pool. Laastens, in die geval waar $a = 0$ volg

$$f_{0,b}(z) = \frac{z}{0z^2 + b} = \frac{1}{b}z, \quad \textit{en} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} f_{0,b}(z) = \frac{1}{b}.$$

Hieruit sien ons dat $f_{0,b}$, waar $b > 0$, 'n enkelvoudige pool ∞ op $\mathrm{i}\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ het en 'n posiewe, reële residu by hierdie pool.

Vervolgens wys ons dat $f_{a,b} \in \mathcal{RO}$. Dit volg uit

$$f^{\#}_{a,b}(z) = \frac{\overline{(-\overline{z})}}{\overline{a(-\overline{z})^2 + b}} = \frac{-\overline{\overline{z}}}{a\overline{(-\overline{z})}^2 + b} = \frac{-z}{a\overline{(-\overline{z})}\,\overline{(-\overline{z})} + b} = \frac{-z}{a(-z)(-z) + b} = -\frac{z}{az^2 + b} = -f_{a,b}(z).$$

Verder volg ook

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(f_{a,b}(z)) = \frac{1}{2}(f_{a,b}(z) + \overline{f_{a,b}(z)}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{az^2 + b} + \frac{\overline{z}}{a\overline{z}^2 + b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z(a\overline{z}^2 + b) + \overline{z}(az^2 + b)}{|az^2 + b|^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a|z|^2(z + \overline{z}) + b(z + \overline{z})}{|az^2 + b|^2}\right) = \frac{a|z|^2 \operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Re}(z)}{|az^2 + b|^2}.\end{aligned}$$

Uit bostaande sien ons dat vir $z \in \Pi_+$ volg $\operatorname{Re}(f_{a,b}(z)) > 0$. Dus $f_{a,b} \in \mathcal{PR}$. Hieruit weet ons $f_{a,b} \in \mathcal{PRO}$ vir $a, b \geq 0$ waar $a + b > 0$.

Ons weet dus nou ook

$$f_{0,1}(z) = \frac{z}{0z^2 + 1} = z \in \mathcal{PRO} \quad \textit{en} \quad f_{1,0}(z) = \frac{z}{1z^2 + 0} = \frac{1}{z} \in \mathcal{PRO}.$$

Laat $f_\infty := f_{0,1}$. *Dan* $f_{1,0} = \frac{1}{f_\infty}$ *en*

$$f_{a,b}(z) = \frac{z}{az^2 + b} = \frac{1}{az + \frac{b}{z}} = \frac{1}{af_\infty(z) + b\frac{1}{f_\infty}(z)}.$$

Ons sien in Afdeling 6.2 dat funksies van die vorm $f_{a,b}$, vir $a, b \geq 0$ en $a + b > 0$, die boublokke is vir funksies in $\mathcal{PRO}$ en dat $\mathcal{PRO} = \mathscr{C}(f_\infty)$.

6.2 Die Foster realisasiestelling en die voortbringer van $\mathcal{PRO}$

Die volgende eienskappe is bekend vir enige $f \in \mathcal{PR}$, sien Hoofstuk 5.2 in [5]:

(i) Alle pole en nulpunte van f kom voor op $\Pi_- \cup \mathrm{i}\mathbb{R}$.

(ii) Die pole en nulpunte van f op $\mathrm{i}\mathbb{R}$ is enkelvoudig.

(iii) Die pole van f op $\mathrm{i}\mathbb{R}$ het 'n positiewe, reële residu.

(iv) Die aantal nulpunte en pole van f verskil op die meeste met 1.

Merk op dat die funksies in $\mathcal{PRO}$ slegs pole op $\mathrm{i}\mathbb{R}$ kan hê, aangesien $f \in \mathcal{PRO}$ gedefinieer moet wees vir $z \in \Pi_+$ asook vir $-\overline{z} \in \Pi_-$. Dus moet $f \in \mathcal{PRO}$ analities wees op $\Pi_+ \cup \Pi_-$. Nou volg uit die bostaande eienskappe van 'n funksie in $\mathcal{PR}$, dat vir enige $f \in \mathcal{PRO}$ geld:

(v) Alle pole en nulpunte van f kom voor op $\mathrm{i}\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(vi) Al die pole en nulpunte van f is enkelvoudig.

(vii) Die pole van f het 'n positiewe, reële residu.

Stelling 6.9 ([5], Item 14 - Bl 135)**.** *Elke* $0 \neq f \in \mathcal{PRO}$ *neem die Foster voorstelling aan. Dit wil sê*

$$\mathcal{PRO} = \{0\} \cup \left\{ f : f(z) = a_0 z + \frac{b_0}{z} + \sum_{j=1}^{k} f_{a_j,b_j}(z), \ \ \textit{met } \ a_0, b_0 \geq 0 \ \textit{ en } \ a_j, b_j > 0 \right\}. \tag{6.2}$$

Bewys. Neem $f \in \mathcal{PRO}$. Ons weet al die pole van f is enkelvoudig en kom voor op $\mathrm{i}\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Aangesien f 'n reële funksie is, weet ons die pole van f, uitgesluit die moontlike enkelvoudige pool by 0 of ∞, kom in toegevoegde pare voor. Veronderstel $\pm\mathrm{i}\lambda_j$, $1 \leq j \leq k$, is hierdie pole van f. Die residue van elke toegevoegde paar pole, kom ook in 'n toegevoegde paar voor. Aangesien die residue reëel is, weet ons elke toegevoegde paar residue is dieselfde. Dus laat $h_j > 0$, $1 \leq j \leq k$, die residu van elke toegevoegde paar pole van f wees, met $h_\infty \geq 0$ die moontlike residu by ∞ en $h_0 \geq 0$ die moontlike residu by 0. Vanuit

$$\frac{h_j}{(z - \mathrm{i}\lambda_j)} + \frac{h_j}{(z + \mathrm{i}\lambda_j)} = \frac{2h_j z}{z^2 + \lambda_j^2},$$

en die feit dat elke pool van f enkelvoudig is, weet ons die parsiële breuk ontbinding van f lyk soos volg:

$$f(z) = h_\infty z + \frac{h_0}{z} + \sum_{j=1}^{k} \frac{2h_j z}{z^2 + \lambda_j^2} = h_\infty z + \frac{h_0}{z} + \sum_{j=1}^{k} f_{\alpha_j,\beta_j}, \quad \text{waar} \quad \alpha_j := \frac{1}{2h_j} > 0, \, \beta_j := \frac{\lambda_j^2}{2h_j} > 0.$$

Hieruit weet ons

$$\mathcal{PRO} \subseteq \{0\} \cup \left\{ f : f(z) = a_0 z + \frac{b_0}{z} + \sum_{j=1}^{k} f_{a_j,b_j}(z), \text{ met } a_0, b_0 \geq 0 \text{ en } a_j, b_j > 0 \right\}.$$

Die omgekeerde insluiting volg uit die feit dat $\mathcal{PRO}$ 'n **kik** is en $f_{a,b} \in \mathcal{PRO}$, vir enige $a, b \geq 0$ waar $a + b > 0$. Gevolglik kry ons (6.2). □

Stelling 6.10 ([8], Waarneming 5.1.1)**.** *Die* ***kik*** *$\mathcal{PRO}$ word voortgebring deur f_∞. Dus $\mathscr{C}(f_\infty) = \mathcal{PRO}$.*

Bewys. Ons weet reeds uit Afdeling 6.1 dat $f_\infty \in \mathcal{PRO}$ en dat $\mathcal{PRO}$ 'n **kik** is. Hieruit volg $\mathscr{C}(f_\infty) \subseteq \mathcal{PRO}$.

Ons wys nou $\mathcal{PRO} \subseteq \mathscr{C}(f_\infty)$. Ons weet uit Stelling 6.9 dat elke $f \in \mathcal{PRO}$ soos volg lyk

$$f(z) = a_0 z + \frac{b_0}{z} + \sum_{j=1}^{k} f_{a_j,a_j}(z), \quad \text{waar} \quad a_0, b_0 \geq 0 \quad \text{en} \quad a_j, b_j > 0.$$

Ons hoef dus net te wys $f_{a_j,b_j} \in \mathscr{C}(f_\infty)$ vir $a_j, b_j > 0$, aangesien ons weet $a_0 f_\infty, \frac{b_0}{f_\infty} \in \mathscr{C}(f_\infty)$ vir $a_0, b_0 \geq 0$, asook dat $\mathscr{C}(f_\infty)$ geslote is onder optelling. Aangesien $a_j, b_j > 0$ vir elke j, weet ons dat $a_j f_\infty(z) + \frac{b_j}{f_\infty(z)} = a_j z + \frac{b_j}{z} \in \mathscr{C}(f_\infty)$ en dat $\left(a_j z + \frac{b_j}{z}\right)^{-1}$ bestaan vir elke j. Dus volg $f_{a_j,b_j}(z) = \left(a_j z + \frac{b_j}{z}\right)^{-1} \in \mathscr{C}(f_\infty)$, vir elke j, aangesien $\mathscr{C}(f_\infty)$ geslote is onder inversie. Hieruit sien ons $\mathcal{PRO} \subseteq \mathscr{C}(f_\infty)$. Dus, $\mathscr{C}(f_\infty) = \mathcal{PRO}$. □

Gevolg 6.11 ([8], Stelling 5.2.1(ii))**.** *Die* ***kik*** *$\mathscr{C}(f_\infty)$ het die volgende vorm*

$$\mathscr{C}(f_\infty) := \{0\} \cup \left\{ f : f(z) = a_0 z + \frac{b_0}{z} + \sum_{j=1}^{k} f_{a_j,b_j}(z), \ \textit{met } a_0, b_0 \geq 0 \ \textit{en } a_j, b_j > 0 \right\}.$$

Alhoewel dit eenvoudig is om te wys dat die versameling (6.2) 'n konvekse keël is, is dit nie eenvouding om met direkte berekeninge te wys dat die versameling geslote is onder die neem van inverses nie. In Lemma 6.12 wys ons deur middel van 'n direkte berekening dat dit wel die geval is vir die som van twee boublokke $f_{a,b}$.

Lemma 6.12. *Vir $a_i, b_i \geq 0$ waar $a_i + b_i > 0$, $i = 1, 2$, volg*

$$\frac{1}{f_{a_1,b_1} + f_{a_2,b_2}} = \frac{1}{f_{\alpha,\beta}} + f_{\delta,\gamma} \quad \textit{met} \quad \alpha := \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \quad \beta := \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2},$$
$$\delta := \frac{(a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \quad \textit{en} \quad \gamma := \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}.$$

Dus, in die besonder volg

$$\frac{1}{f_{a_1,b_1} + f_{a_2,b_2}} = \frac{1}{f_{\alpha,\beta}} + f_{\delta,\gamma} = f_{0,\frac{1}{\alpha}} + f_{\frac{1}{\beta},0} + f_{\delta,\gamma}.$$

Bewys. Neem $z \in \mathbb{C}$, dan

$$\frac{1}{f_{a_1,b_1}(z)+f_{a_2,b_2}(z)} = \frac{1}{\frac{z}{a_1z^2+b_1}+\frac{z}{a_2z^2+b_2}} = \frac{1}{\frac{z(a_2z^2+b_2)+z(a_1z^2+b_1)}{(a_1z^2+b_1)(a_2z^2+b_2)}} = \frac{1}{z}\frac{(a_1z^2+b_1)(a_2z^2+b_2)}{(a_2z^2+b_2)+(a_1z^2+b_1)}$$
$$= \frac{1}{z}\frac{a_1a_2z^4+a_1b_2z^2+a_2b_1z^2+b_1b_2}{(a_1+a_2)z^2+(b_1+b_2)}.$$

Stel dit gelyk aan

$$\frac{X}{z}+\frac{Y}{(a_1+a_2)z^2+(b_1+b_2)} = \frac{1}{z}\frac{X(a_1+a_2)z^2+X(b_1+b_2)+Yz}{(a_1+a_2)z^2+(b_1+b_2)}, \quad \text{met}$$
$$X = x_0+x_1z+x_2z^2+..., \quad Y = y_0+y_1z+y_2z^2+..., \quad \text{waar} \quad x_i, y_i \geq 0 \quad \text{vir alle } i.$$

Dus

$$a_1a_2z^4+a_1b_2z^2+a_2b_1z^2+b_1b_2 = X\left(a_1+a_2\right)z^2+X\left(b_1+b_2\right)+Yz.$$

Ons sien vanuit

$$\begin{aligned} b_1b_2+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)z^2+\left(a_1a_2\right)z^4 = {} & \left(b_1+b_2\right)x_0+\left(\left(b_1+b_2\right)x_1+y_0\right)z \\ & +\left(\left(b_1+b_2\right)x_2+y_1+\left(a_1+a_2\right)x_0\right)z^2 \\ & +\left(\left(b_1+b_2\right)x_3+y_2+\left(a_1+a_2\right)x_1\right)z^3 \\ & +\left(\left(b_1+b_2\right)x_4+y_3+\left(a_1+a_2\right)x_2\right)z^4+..., \end{aligned}$$

dat $x_1, y_0, x_3, y_2, x_4 = 0$ en $x_0 = \frac{b_1b_2}{b_1+b_2}$. Verder volg

$$(b_1+b_2)x_2+y_1+(a_1+a_2)x_0 = (b_1+b_2)x_2+y_1+(a_1+a_2)\frac{b_1b_2}{b_1+b_2} = a_1b_2+a_2b_1, \quad \text{asook}$$
$$y_3+(a_1+a_2)x_2 = a_1a_2.$$

Kies $y_3 = 0$. Dan, $x_2 = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$ en

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1b_2+a_2b_1-\frac{(a_1+a_2)b_1b_2}{b_1+b_2}-\frac{(b_1+b_2)a_1a_2}{a_1+a_2} \\ &= \frac{(a_1b_2+a_2b_1)(b_1+b_2)(a_1+a_2)-(a_1+a_2)^2b_1b_2-(b_1+b_2)^2a_1a_2}{(b_1+b_2)(a_1+a_2)} = \frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(b_1+b_2)(a_1+a_2)}. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \frac{X}{z}+\frac{Y}{(a_1+a_2)z^2+(b_1+b_2)} &= \frac{\frac{b_1b_2}{b_1+b_2}+\left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right)z^2}{z}+\frac{\left(\frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(b_1+b_2)(a_1+a_2)}\right)z}{(a_1+a_2)z^2+(b_1+b_2)} \\ &= \frac{\frac{b_1b_2}{b_1+b_2}+\left(\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right)z^2}{z}+\frac{z}{\left(\frac{(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\right)z^2+\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}}. \end{aligned}$$

Hieruit sien ons

$$\frac{1}{f_{a_1,b_1}(z)+f_{a_2,b_2}(z)} = \frac{1}{f_{\alpha,\beta}}(z)+f_{\delta,\gamma}(z), \quad \text{met} \quad \alpha := \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}, \quad \beta := \frac{b_1b_2}{b_1+b_2},$$
$$\delta := \frac{(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)}{(a_1b_2-a_2b_1)^2} \quad \text{en} \quad \gamma := \frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)^2}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}.$$

$\square$

6.3 Rasionale matriksfunksies en algemene realisasieteorie

In Hoofstuk 5 in [18] word 'n alternatiewe metode bespreek waarvolgens ons kan wys dat die versameling egte funksies in $\mathcal{PRO}$ 'n **kik** vorm en dat elke egte $f \in \mathcal{PRO}$ die Foster voorstelling aanneem. Hierdie alternatiewe metode maak gebruik van reële, rasionale matriksfunksies, asook van realisasieteorie resultate. Ons bespreek vervolgens alle definisies en resultate wat benodig word.

'n $p \times m$ Matrikswaardige funksie

$$W(z) = \begin{bmatrix} f_{11}(z) & \dots & f_{1m}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{p1}(z) & \dots & f_{pm}(z) \end{bmatrix}$$

word 'n reële, rasionale matriksfunksie genoem as elke inskrywing van W uit $\mathcal{R}$ kom. Ons dui die reële algebra van al sodanige matrikse met $\mathcal{R}_{p\times m}$ aan. In die geval waar elke inskrywing van W egte of streng egte, rasionale funksies uit $\mathcal{R}$ is, word W 'n egte of streng egte, rasionale matriksfunksie genoem.

Vervolgens bespreek ons oordragfunksies van diskrete tyd stelsels. Hierdie oordragfunksies is reële, rasionale matriksfunksies. Ons begin met 'n kort inleiding waarin ons sekere basiese begrippe van realisasieteorie herroep. Daarna volg die resultate wat later in die hoofstuk benodig word. Hierdie resultate word sonder bewyse gegee, maar met volledige verwysings. Die volgende inleiding is verkry vanuit [13]. Sien ook [13] vir ontbrekende inligting.

'n Dinamiese stelsel word gekenmerk deur 'n versameling stelsel veranderlikes en hul interverwantskap oor tyd T. Ons beskou stelsels wat ontwikkel in diskrete tyd, $T = \mathbb{Z}$. Vir 'n inset-uitset stelsel is daar twee tipes veranderlikes nl. insette, wat vrylik gekies kan word, en uitsette, wat bepaal word deur die keuse van insette. 'n Stelsel word dan gesien as 'n meganisme wat die wyse waarop die uitsette afhanklik is van die insette bepaal. 'n Stelsel word *lineêr* genoem wanneer die inset-uitset afbeelding 'n lineêre transformasie is. 'n Inset-uitset afbeelding F van 'n stelsel het 'n toestandsruimte voorstelling as die aksie $Fu = y$ deur 'n stelsel vergelykings van die volgende vorm beskryf kan word:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t = 0, 1, 2, ..., \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Ons aanvaar die stelsel is in rus vir $t < 0$. Dus is die uitset $y(t) = 0$, die inset $u(t) = 0$ en $x(t) = 0$ vir $t < 0$. Die veranderlike $x(t)$ som die vroeëre inligting op wat relevant is vir die toekoms, daarom word x die *toestandsveranderlike* genoem. Verder word $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die *oorgangstoestand* matriks genoem en $\mathbb{R}^n$ die *toestandsruimte.* Die matriks $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ word die *inset matriks* genoem, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ die *uitset matriks* en $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ die *uitwendige matriks.* Die viertal (A, B, C, D) word 'n *realisasie* van die stelsel, wat deur die toestandsruimte model (6.3) beskryf word, genoem. Realisasies is nie uniek nie. 'n Realisasie van 'n stelsel word *minimaal* genoem as dit die realisasie is met die kleinste moontlike toestandsruimte dimensie (gegee deur die grootte van A). Die verwantskap tussen die oorsaak en gevolg verhouding van die uitset en inset van 'n stelsel, word gegee deur 'n oordragfunksie. Die toestandsruimte model (6.3) beskryf die inset-uitset afbeelding van 'n lineêre stelsel met oordragfunksie

$$G(z) = D + C\left(zI_n - A\right)^{-1} B \in \mathcal{R}_{p\times m}.$$

Proposisie 6.13 ([13], Proposisie 2.3.2)**.** *Die oordragfunksie van die stelsel wat beskryf word deur die toestandsruimte model* (6.3) *is 'n egte funksie in* $\mathcal{R}_{p\times m}$.

Omgekeerd, elke stelsel met 'n egte, reële, rasionale matriks-oordragfunksie het 'n toestandsruimte voorstelling. Daarom kry ons die volgende stelling.

Stelling 6.14 ([13], Proposisie 2.3.3)**.** *Die inset-uitset afbeelding van 'n lineêre stelsel neem 'n toestandsruimte voorstelling aan as en slegs as die stelsel 'n oordragfunksie het wat reëel, rasionaal en eg is.*

Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ en $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ laat

$$W_{obs} := \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad \text{en} \quad W_{ctr} := \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Definisie 6.15 ([13], Stelling 3.1.1)**.** 'n Realisasie (A, B, C, D) word *beheerbaar* genoem as $\text{rank}(W_{ctr}) = n$.

Die beheerbaarheid van 'n realisasie (A, B, C, D) is onafhanklik van die matrikse C en D en daarom sê ons ook die paar (A, B) is beheerbaar.

Definisie 6.16 ([13], Stelling 3.2.1)**.** 'n Realisasie (A, B, C, D) word *waarneembaar* genoem as $\text{rank}(W_{obs}) = n$.

Die voorwaarde vir waarneembaarheid betrek nie die matrikse B en D nie, daarom sê ons ook die paar (A, C) is waarneembaar wanneer die realisasie (A, B, C, D) waarneembaar is.

In [13] word meer beskrywende definisies vir beheerbaarheid en waarneembaarheid gegee.

Lemma 6.17. *Vir $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ laat (A, B) 'n beheerbare paar wees en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 'n nie-leë oop versameling waar vir elke $z \in \Omega$ volg $||A|| < |z|$, met $||\cdot||$ enige matriksnorm. Dan volg*

$$\text{span}\left\{(zI_n - A)^{-1} Bu : z \in \Omega,\ u \in \mathbb{C}^m\right\} = \mathbb{C}^n. \tag{6.5}$$

Bewys. Veronderstel (6.5) geld nie. Dan volg uit die feit dat 'n versameling vektore 'n vektorruimte in geheel onderspan as en slegs as nul die enigste vektor is wat ortogonaal is op al die vektore in die versameling, dat daar 'n vektor $0_n \neq x \in \mathbb{C}^n$ bestaan sodanig dat x ortogonaal is op elke vektor in $\text{span}\left\{(zI_n - A)^{-1} Bu : z \in \Omega,\ u \in \mathbb{C}^m\right\}$. Dus, vir elke $z \in \Omega$ en $u \in \mathbb{C}^m$ volg $x^H (zI_n - A)^{-1} Bu = 0$. Uit Gevolg 5.6.16 in [14] weet ons vir enige matriksnorm $||\cdot||$ volg in die geval waar $||A|| < |z|$, dat $(zI_n - A)$ nie-singulier is en $(zI_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} A^{k-1}$. Hieruit weet ons dus

$$0 = x^H (zI_n - A)^{-1} Bu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} x^H A^{k-1} Bu \quad \text{vir elke} \quad z \in \Omega \quad \text{en} \quad u \in \mathbb{C}^m.$$

Omdat die nulfunksie die enigste analitiese funksie is wat 'n konvergente ry nulpunte in sy domein kan hê, lei ons af dat

$$x^H A^{k-1} Bu = 0, \quad \text{vir elke} \quad k \geq 1 \quad \text{en} \quad u \in \mathbb{C}^m. \tag{6.6}$$

Hieruit volg dus dat x^H ortogonaal is op $A^{k-1}Bu$ vir elke $k \geq 1$ en $u \in \mathbb{C}^m$. Gevolglik is x^H in die besonder ortogonaal op die versameling $\{\sum_{i=1}^{n} A^{i-1}Bu_i : u_i \in \mathbb{R}^m\}$. Ons wys nou dat hierdie versameling gelyk is aan die beeld van W_{ctr}, aangedui met $\mathcal{R}_{W_{ctr}}$, soos gedefinieer in Afdeling 3.1. Ons weet dat

$$\mathcal{R}_{W_{ctr}} = \{W_{ctr}\vec{u} : \vec{u} \in \mathbb{R}^{n \cdot m}\}, \quad \text{waar} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad u_i \in \mathbb{R}^m \quad \text{vir} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Hieruit volg

$$\mathcal{R}_{W_{ctr}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} A^{i-1} B u_i : u_i \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Dus $x^H \in \mathcal{R}_{W_{ctr}^{\perp}}$, waar $\mathcal{R}_{W_{ctr}^{\perp}}$ die versameling vektore aandui wat ortogonaal is op $\mathcal{R}_{W_{ctr}}$. Nou volg uit die feit dat $\dim \mathcal{R}_{W_{ctr}} + \dim \mathcal{R}_{W_{ctr}^{\perp}} = n$, dat $\dim \mathcal{R}_{W_{ctr}} = \operatorname{rank}(W_{ctr}) \neq n$. Aangesien hierdie teenstrydig is met ons aanname dat die paar (A, B) beheerbaar is, volg dit dat (6.5) geld. □

Stelling 6.18 ([12], Stelling 19.1)**.** *Laat W 'n egte funksie in $\mathcal{R}_{p \times m}$ wees. Dan bestaan daar 'n $n \in \mathbb{N}$ en matrikse $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sodanig dat*

$$W(z) = D + C\,(zI_n - A)^{-1}\,B,$$

waar (A, B) beheerbaar is en (A, C) waarneembaar.

Stelling 6.19 ([13], Afdeling 3)**.** *'n Realisasie (A, B, C, D) van 'n stelsel is minimaal as en slegs as (A, B) beheerbaar is en (A, C) waarneembaar. As $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ nog 'n minimale realisasie is van die stelsel, waar* $\dim A = \dim \hat{A} = n$*, dan bestaan daar 'n unieke $T \in GL(n, \mathbb{R})$ só dat*

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}.$$

6.4 Die oordragfunksie realisasiestelling vir egte $\mathcal{PRO}$ matriksfunksies

Ons beskou die versameling $\mathcal{PRO}_p$ van egte, rasionale matriksfunksies P, van grootte $p \times p$, wat aan die volgende eienskappe voldoen:

(C1) $\operatorname{Re}(P(z)) \in \overline{\mathbb{P}}_p$ vir $z \in \Pi_+$,

(C2) $-P(z) = P(-\overline{z})^H$ vir enige z wat nie 'n pool van P is nie,

(C3) $P \in \mathcal{R}_{p \times p}$.

Ons sien uit $(C1)$ en $(C2)$ dat P slegs pole op $\mathrm{i}\mathbb{R}$ kan hê en dus analities op $\Pi_+ \cup \Pi_-$ is. Verder volg ook dat $\mathcal{PRO}_1$ ooreenstem met die versameling van egte funksies uit $\mathcal{PRO}$.

Stelling 6.20. *Laat P 'n $p \times p$ egte, rasionale matriksfunksie wees. Dan, $P \in \mathcal{PRO}_p$ as en slegs as daar matrikse $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times p}$ en $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bestaan só dat*

$$P(z) = D + B^T\,(zI_n - A)^{-1}\,B \quad \text{en} \quad D = -D^T, \quad A = -A^T.$$

Bewys. Ons deel die bewys in vier dele.

I: Veronderstel $P \in \mathcal{PRO}_p$. Dus $(C1) - (C3)$ geld. Aangesien P volgens $(C3)$ 'n egte funksie in $\mathcal{R}_{p\times p}$ is, weet ons uit Stelling 6.18 en Stelling 6.19 dat P 'n minimale toestandsruimte realisasie het, dit wil sê, daar bestaan 'n $n \in \mathbb{N}$ en matrikse $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ en $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$ só dat

$$P(z) = D + C\left(zI_n - A\right)^{-1} B,$$

met $\text{rank}(W_{obs}) = \text{rank}(W_{ctr}) = n$. Volgens $(C2)$ weet ons vir enige $z \in \mathbb{C}$, wat nie 'n pool van P is nie, geld

$$-P(z) = P(-\overline{z})^H, \quad \text{oftewel} \quad - D - C(zI_n - A)^{-1}B = \left(D + C\left((-\overline{z})I_n - A\right)^{-1} B\right)^H.$$

Hieruit volg

$$\begin{aligned} -D - C\left(zI_n - A\right)^{-1} B &= B^T \left(\left((-\overline{z})I_n - A\right)^H\right)^{-1} C^T + D^T = D^T + B^T\left(-zI_n - A^T\right)^{-1} C^T \\ &= D^T - B^T\left(zI_n + A^T\right)^{-1} C^T. \end{aligned}$$

Aangesien weerskante van bogenoemde uitdrukking 'n minimale realisasie van $-P$ is, weet ons vanuit Stelling 6.19 dat daar 'n unieke $S \in GL(n, \mathbb{R})$ bestaan, só dat

$$SAS^{-1} = -A^T, \quad SB = C^T, \quad CS^{-1} = B^T, \quad D = -D^T.$$

II: Ons wys S is positief definiet. Eerstens toon ons aan dat S simmetries is. Vanuit $SAS^{-1} = -A^T$ volg $AS^{-1} = -S^{-1}A^T$ en $SA = -A^T S$, asook

$$A^T S^T = (SA)^T = (-A^T S)^T = -S^T A.$$

Nou volg $S^{-1}S^T A = -S^{-1}A^T S^T = AS^{-1}S^T$, dus $S^{-1}S^T$ kommuteer met A. Vanuit $SB = C^T$, $CS^{-1} = B^T$ en $C = (C^T)^T = (SB)^T = B^T S^T$ volg $C = CS^{-1}S^T$. Hieruit volg nou, vir enige $k \in \mathbb{Z}$, dat

$$CA^k = (CS^{-1}S^T)A^k = CA^k S^{-1}S^T, \quad \text{dus} \quad CA^k(I_n - S^{-1}S^T) = 0_{p\times n}. \tag{6.7}$$

In die besonder volg dan

$$W_{obs}\left(I_n - S^{-1}S^T\right) = 0_{(n\cdot p)\times n}.$$

Aangesien $W_{obs} \in \mathbb{R}^{(n\cdot p)\times n}$ rang n het, kry ons

$$(I_n - S^{-1}S^T) = 0_{n\times n} \quad \text{oftewel} \quad S^{-1}S^T = I_n.$$

Dus sien ons dat $S^T = S$ en gevolglik is bewys dat S simmetries is.

Voor ons aantoon dat S positief definiet is, verwys ons na Voorbeeld 5.17 in [3]. Alhoewel daar in hierdie bron gewerk word in die bo-halfvlak $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, kan ons deur middel van 'n transformasie hierdie resultate toepas vir die regter halfvlak Π_+. Vanweë hierdie transformasie na Π_+ kan ons die funksie ρ_ω in Voorbeeld 5.17, wat gedefinieer word op bl 247 in [3], vervang met $\rho_\omega(z) = 2\left(z + \overline{\omega}\right)$ vir $z, \omega \in \Pi_+$. Dus kry ons uit hierdie voorbeeld dat vir $P \in \mathcal{PRO}$ geld dat

$$K(z, w) = \frac{P(z) + P(\omega)^H}{z + \overline{\omega}}, \quad z, \omega \in \Pi_+,$$

’n positiewe kern-funksie is. Dit wil sê vir enige $N \in \mathbb{N}$, $z_1, ..., z_N \in \Pi_+$ en $v_1, ..., v_N \in \mathbb{C}^P$ kry ons

$$\sum_{i,j=1}^{N} v_i^H K(z_i, z_j) v_j \geq 0.$$

Om te sien dat S positief definiet is, neem $z, \omega \in \Pi_+$. Dan volg

$$\begin{aligned}
P(z) + P(\omega)^H &= D + D^T + C(zI_n - A)^{-1} B + B^T \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T \\
&= C(zI_n - A)^{-1} S^{-1} C^T + CS^{-1} \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T \\
&= C(zI_n - A)^{-1} \left(S^{-1}\left(\overline{\omega} I_n - A^T\right) + (zI_n - A) S^{-1}\right) \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T \\
&= C(zI_n - A)^{-1} \left((\overline{\omega} + z) S^{-1} - \left(S^{-1}A^T + AS^{-1}\right)\right) \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T \\
&= C(zI_n - A)^{-1} \left((\overline{\omega} + z) S^{-1}\right) \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T \\
&= (z + \overline{\omega}) C(zI_n - A)^{-1} S^{-1} \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T,
\end{aligned}$$

oftewel

$$K(z, \omega) = \frac{P(z) + P(\omega)^H}{z + \overline{\omega}} = C(zI_n - A)^{-1} S^{-1} \left(\overline{\omega} I_n - A^T\right)^{-1} C^T.$$

Uit Lemma 6.17, toegepas op die paar $\left(A^T, C^T\right)$, wat beheerbaar is vanweë die feit dat (A, C) waarneembaar is, weet ons vir enige $u \in \mathbb{R}^n$ bestaan daar $z_1, ..., z_N \in \Pi_+$ en $v_1, ..., v_N \in \mathbb{C}^p$ só dat

$$u = \sum_{j=1}^{N} \left(\overline{z}_j I_n - A^T\right)^{-1} C^T v_j.$$

Gebruik nou hierdie keuse vir $z_1, ..., z_N \in \Pi_+$ en $v_1, ..., v_N \in \mathbb{C}^p$. Dan volg

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} v_i^H K(z_i, z_j) v_j &= \sum_{i,j=1}^{N} v_i^H \left(\frac{P(z_i) + P(z_j)^H}{z_i + \overline{z}_j}\right) v_j \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(v_i^H C(z_i I_n - A)^{-1}\right) S^{-1} \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\overline{z}_j I_n - A^T\right)^{-1} C^T v_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\left(\overline{z}_i I_n - A^T\right)^{-1} C^T v_i\right)^H S^{-1} \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\overline{z}_j I_n - A^T\right)^{-1} C^T v_j\right) = u^H S^{-1} u.
\end{aligned}$$

Ons sien dus hieruit dat S^{-1} positief semi-definiet is. Aangesien S^{-1} nie-singulier is, weet ons dat S^{-1} positief definiet is. Die eiewaardes van S^{-1} is dus almal streng positief. Vanweë die feit dat die eiewaardes van S net die inverse van die eiewaardes van S^{-1} is, sal die eiewaardes van S ook streng positief wees. Gevolglik is S ook positief definiet.

III: Ons weet uit Stelling 3.25 dat S unitêr diagonaliseerbaar is met slegs reële eiewaardes. Dus $S = UDU^T$, waar D ’n diagonaalmatriks is met die positiewe, reële eiewaardes van S as inskrywings en $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ waar $U^T = U^{-1}$. Dan sal $S^{\frac{1}{2}} = UD^{\frac{1}{2}}U^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ook positief definiet wees. Nou definieer ons

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{\frac{1}{2}} A S^{-\frac{1}{2}} & S^{\frac{1}{2}} B \\ CS^{-\frac{1}{2}} & D \end{bmatrix}.$$

Ons weet reeds dat $D^T = -D$ en nou volg $\hat{D}^T = D^T = -D = -\hat{D}$. Verder volg uit $-A^T = SAS^{-1}$ dat

$$\hat{A}^T = (S^{\frac{1}{2}} A S^{-\frac{1}{2}})^T = S^{-\frac{1}{2}} A^T S^{\frac{1}{2}} = -S^{-\frac{1}{2}} SAS^{-1} S^{\frac{1}{2}} = -S^{\frac{1}{2}} A S^{-\frac{1}{2}} = -\hat{A}.$$

Uit $B^T = CS^{-1}$ volg

$$\hat{B}^T = (S^{\frac{1}{2}} B)^T = B^T S^{\frac{1}{2}} = CS^{-\frac{1}{2}} = \hat{C}.$$

Vir $A = S^{-\frac{1}{2}} \hat{A} S^{\frac{1}{2}}$, $B = S^{-\frac{1}{2}} \hat{B}$, $C = \hat{B}^T S^{\frac{1}{2}}$ en $\hat{D} = D$ volg

$$\begin{aligned}
P(z) = D + C\left(zI_n - A\right)^{-1} B &= \hat{D} + \left(\hat{B}^T S^{\frac{1}{2}}\right)\left(zI_n - S^{-\frac{1}{2}} \hat{A} S^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} S^{-\frac{1}{2}} \hat{B} \\
&= \hat{D} + \hat{B}^T S^{\frac{1}{2}} \left(S^{-\frac{1}{2}}\left(S^{\frac{1}{2}} z I_n S^{-\frac{1}{2}} - \hat{A}\right) S^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} S^{-\frac{1}{2}} \hat{B} \\
&= \hat{D} + \hat{B}^T S^{\frac{1}{2}} \left(S^{-\frac{1}{2}}\left(zI_n - \hat{A}\right)^{-1} S^{\frac{1}{2}}\right) S^{-\frac{1}{2}} \hat{B} = \hat{D} + \hat{B}^T \left(zI_n - \hat{A}\right)^{-1} \hat{B}.
\end{aligned}$$

Hiermee is die een rigting van die stelling bewys.

IV: Vir die omgekeerde, veronderstel daar bestaan matrikse $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$ en $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ só dat

$$P(z) = D + B^T\left(zI_n - A\right)^{-1} B \quad \text{en} \quad D = -D^T, \quad A = -A^T.$$

Aangesien die matrikse reëel is, volg dit dat $P \in \mathcal{R}_{p\times p}$ en gevolglik word aan $(C3)$ voldoen. Dit volg vanuit Stellling 3.27 dat A slegs suiwer imaginêre eiewaardes het, aangesien A 'n reële skeefsimmetriese matriks is. Ons maak gebruik van Cramer se reël om te sien dat $(zI_n - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(zI_n - A)}{\det(zI_n - A)}$, waar die inskrywings van $\operatorname{adj}(zI_n - A)$, wat deur verskeie kofaktore bepaal word, polinome in z is. Hieruit sien ons

$$P(z) = D + \frac{1}{\det(zI_n - A)} B^T \operatorname{adj}(zI_n - A) B.$$

Gevolglik is die wortels van die karakteristieke polinoom $\det(zI_n - A)$, of anders gestel die eiewaardes van A, die pole van P. Dus het P net pole op $i\mathbb{R}$ en is gevolglik analities op $\Pi_+ \cup \Pi_-$. Om te sien dat P aan $(C2)$ voldoen, neem enige $z \in \Pi_+ \cup \Pi_-$, dan volg

$$P(-\overline{z})^H \;=\; D^T + B^T\left(-\overline{\overline{z}} I_n - A^T\right)^{-1} B = -D - B^T\left(zI_n - A\right)^{-1} B = -P(z).$$

Laastens bewys ons dat P aan $(C1)$ voldoen. Vir $z \in \Pi_+$ volg

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}(P(z)) = P(z) + P(z)^H &= D + B^T (zI_n - A)^{-1} B + D^T + B^T \left((zI_n - A)^{-1}\right)^H B \\
&= D + D^T + B^T \left((zI_n - A)^{-1}\right)^H \left((zI_n - A) + (zI_n - A)^H\right) (zI_n - A)^{-1} B \\
&= B^T \left((zI_n - A)^{-1}\right)^H \left(zI_n - A + \overline{z} I_n - A^T\right) (zI_n - A)^{-1} B \\
&= B^T \left((zI_n - A)^{-1}\right)^H (z + \overline{z}) (zI_n - A)^{-1} B \\
&= (z + \overline{z}) B^T \left((zI_n - A)^{-1}\right)^H (zI_n - A)^{-1} B \\
&= (z + \overline{z}) \left((zI_n - A)^{-1} B\right)^H (zI_n - A)^{-1} B.
\end{aligned}$$

Ons weet $(z+\overline{z})>0$. Vanuit die feit dat die produk van 'n matriks en sy kompleks toegevoegde altyd positief semi-definiet is, volg $2\,\mathrm{Re}(P(z))\in\overline{\mathbb{P}}_p$ en gevolglik ook $\mathrm{Re}(P(z))\in\overline{\mathbb{P}}_p$. Hiermee is bewys dat P aan $(C1)-(C3)$ voldoen. Dus $P\in\mathcal{PRO}_p$. □

6.5 Die Foster realisasiestelling vir egte $\mathcal{PRO}$ matriksfunksies

In hierdie afdeling kry ons die Foster realisasiestelling, Stelling 6.9, uit die oordragfunksie realisasiestelling. Ons bepaal eers 'n Foster formule vir matriksfunksies in $\mathcal{PRO}_p$.

Uit Stelling 6.20 weet ons vir $P\in\mathcal{PRO}_p$ bestaan daar matrikse $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times p}$ en $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ só dat

$$P(z)=D+B^T(zI_n-A)^{-1}B \quad \text{met} \quad D=-D^T, \quad A=-A^T. \tag{6.8}$$

Ons weet vanuit Stellings 6.18 en 6.19 dat ons sonder die verlies van algemeenheid kan aanneem dat bogenoemde realisasie minimaal is. Aangesien A skeef-simmetries is, volg vanuit Stelling 3.27 dat $\mathrm{rank}(A)$ ewe is, sê $\mathrm{rank}(A)=2k$ en

$$\begin{aligned}&U^{-1}AU=\mathrm{diag}\left(A_1,A_2,\ldots,A_k,0_{(n-2k)\times(n-2k)}\right), \quad \text{met} \quad A_j:=\begin{bmatrix}0 & \alpha_j\\ -\alpha_j & 0\end{bmatrix}\\ &\text{en} \quad \alpha_j>0 \quad \text{vir} \quad 1\le j\le k, \quad U\in GL(n,\mathbb{R}) \quad \text{waar} \quad U^T=U^{-1}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Deur A en B in (6.8) te vervang met $U^{-1}AU=U^TAU$ en U^TB, kan ons aanneem dat

$$A=\mathrm{diag}\left(A_1,\ldots,A_k,0_{(n-2k)\times(n-2k)}\right). \tag{6.10}$$

Lemma 6.21. *Neem $P\in\mathcal{PRO}_p$ waar*

$$P(z)=D+B^T(zI_n-A)^{-1}B \quad \textit{met} \quad D=-D^T, \quad A=-A^T,$$

vir $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ soos in (6.10), $D\in\mathbb{R}^{p\times p}$ en $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$. Dan volg $(n-2k)\le p$ en elke eiewaarde $\mathrm{i}\alpha_j$ van A, $1\le j\le k$, kom op die meeste p kere voor.

Bewys. Ontbind B soos volg:

$$B=\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_k\\ \hat{B}\end{bmatrix}, \text{ met } B_j=\begin{bmatrix}b_{j1}\\ b_{j2}\end{bmatrix}, \; b_{jl}\in\mathbb{R}^{1\times p} \text{ vir } 1\le j\le k, \; l=1,2, \text{ en } \hat{B}\in\mathbb{R}^{(n-2k)\times p}. \tag{6.11}$$

Aangesien ons mag aanneem die realisasie is minimaal, volg vanuit die beheerbaarheid van die realisasie dat $\mathrm{rank}(W_{ctr})=n$. Veronderstel $n-2k>p$. Dan volg $\mathrm{rank}(\hat{B})\le p$. Ons sien vanuit

$$W_{ctr}=\begin{bmatrix}B & AB & \ldots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & A_1B_1 & \ldots & A_1^{n-1}B_1\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ B_k & A_kB_k & \ldots & A_k^{n-1}B_k\\ \hat{B} & 0_{(n-2k)\times p} & \ldots & 0_{(n-2k)\times p}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times(n\cdot p)},$$

dat $\mathrm{rank}(W_{ctr})=n$ alleenlik as $\mathrm{rank}(\hat{B})=n-2k$. Maar dit is nie moontlik wanneer $n-2k>p$ geld nie. Gevolglik weet ons $n-2k\le p$.

Vir die tweede deel van die lemma, veronderstel $\alpha_{j+1} = ... = \alpha_{j+r} =: \alpha$ is 'n eiewaarde van A wat r keer voorkom. Aangesien W_{ctr} volle ry-rang het, sal dit ook die geval wees vir enige matriks wat saamgestel word uit rye van W_{ctr}. Dus in die besonder volg

$$2r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_{j+1} & A_{j+1}B_{j+1} & \dots & A_{j+1}^{n-1}B_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{j+r} & A_{j+r}B_{j+r} & \dots & A_{j+r}^{n-1}B_{j+r} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_{j+1} & A_\alpha B_{j+1} & \dots & A_\alpha^{n-1}B_{j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{j+r} & A_\alpha B_{j+r} & \dots & A_\alpha^{n-1}B_{j+r} \end{bmatrix},$$

waar $A_\alpha := A_{j+1} = ... = A_{j+r}$. Uit $A_\alpha^2 = -\alpha^2 I_2$ kry ons

$$2r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_{j+1} & A_\alpha B_{j+1} & -\alpha^2 B_{j+1} & -\alpha^2 A_\alpha B_{j+1} & \dots & (-\alpha^2)^s A_\alpha B_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{j+r} & A_\alpha B_{j+r} & -\alpha^2 B_{j+r} & -\alpha^2 A_\alpha B_{j+r} & \dots & (-\alpha^2)^s A_\alpha B_{j+r} \end{bmatrix}, \text{ as } n = 2(s+1), \text{ en}$$

$$2r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_{j+1} & A_\alpha B_{j+1} & -\alpha^2 B_{j+1} & -\alpha^2 A_\alpha B_{j+1} & \dots & (-\alpha^2)^s B_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{j+r} & A_\alpha B_{j+r} & -\alpha^2 B_{j+r} & -\alpha^2 A_\alpha B_{j+r} & \dots & (-\alpha^2)^s B_{j+r} \end{bmatrix}, \quad \text{as } n = 2s+1.$$

Uit beide gevalle hierbo sien ons dat

$$2r = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_{j+1} & A_\alpha B_{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ B_{j+r} & A_\alpha B_{j+r} \end{bmatrix}. \quad \text{Aangesien} \quad \begin{bmatrix} B_{j+1} & A_\alpha B_{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ B_{j+r} & A_\alpha B_{j+r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times 2p} \quad \text{volg} \quad r \leq p.$$

Hiermee is bewys dat elke eiewaarde van A, oftewel elke pool van P, op die meeste p kere kan voorkom. □

Nou volg die hoofresultaat van die afdeling.

Stelling 6.22. *Elke $P \in \mathcal{PRO}_p$ neem die Foster voorstelling aan, dit wil sê daar bestaan matrikse $Q, Q_j \in \overline{\mathbb{P}}_p$ en $R, R_j \in \mathbb{R}^{p\times p}$, waar R, R_j skeef-simmetries is, asook $\delta_j \geq 0$, vir elke $1 \leq j \leq s$, só dat*

$$P(z) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{z^2 + \delta_j^2}(zQ_j + R_j) + \frac{1}{z}Q + R. \tag{6.12}$$

Bewys. Neem $P \in \mathcal{PRO}_p$. Uit Stelling 6.20 weet ons vir $P \in \mathcal{PRO}_p$ bestaan daar matrikse $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$ en $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ só dat

$$P(z) = D + B^T(zI_n - A)^{-1}B, \quad \text{met} \quad D = -D^T, \quad A = -A^T.$$

Veronderstel $\operatorname{rank}(A) = 2k$. Ons weet uit die verduideliking voor Lemma 6.21 dat ons A kan neem soos in (6.10) en B soos in (6.11). Dan volg

$$(zI_n - A) = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} z & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & z \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} z & -\alpha_k \\ \alpha_k & z \end{bmatrix}, zI_{n-2k}\right).$$

Hieruit sien ons

$$(zI_n - A)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_k, \frac{1}{z}I_{n-2k}\right), \quad \text{waar} \quad \tilde{A}_j := \begin{bmatrix} z & -\alpha_j \\ \alpha_j & z \end{bmatrix}^{-1}.$$

Uit bogenoemde en (6.11) volg

$$B^T (zI_n - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & \dots & B_k^T & \hat{B}^T \end{bmatrix} (zI_n - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \\ \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & \dots & B_k^T & \hat{B}^T \end{bmatrix} \operatorname{diag} \left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_k, \frac{1}{z} I_{n-2k} \right) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \\ \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} B_j^T \tilde{A}_j B_j + \frac{1}{z} \hat{B}^T \hat{B}.$$

Hieruit volg dat P die Foster voorstelling aanneem:

$$\begin{aligned}
P(z) &= D + B^T (zI_n - A)^{-1} B = D + \sum_{j=1}^{k} B_j^T \tilde{A}_j B_j + \frac{1}{z} \hat{B}^T \hat{B} \\
&= D + \sum_{j=1}^{k} B_j^T \left(\frac{1}{z^2 + \alpha_j^2} \begin{bmatrix} z & \alpha_j \\ -\alpha_j & z \end{bmatrix} \right) B_j + \frac{1}{z} \hat{B}^T \hat{B} \\
&= D + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{z^2 + \alpha_j^2} B_j^T \left(zI_2 + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j \\ -\alpha_j & 0 \end{bmatrix} \right) B_j + \frac{1}{z} \hat{B}^T \hat{B} \\
&= D + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{z^2 + \alpha_j^2} \left(zB_j^T B_j + B_j^T A_j B_j \right) + \frac{1}{z} \hat{B}^T \hat{B} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{z^2 + \alpha_j^2} (zQ_j + R_j) + \frac{1}{z} Q + R, \\
&\text{waar} \quad Q_j := B_j^T B_j, \quad Q = \hat{B}^T \hat{B}, \quad R_j = B_j^T A_j B_j, \quad R = D, \quad 1 \le j \le k.
\end{aligned}$$

Aangesien die produk van 'n matriks en sy getransponeerde altyd positief semi-definiet is, volg $Q, Q_j \in \overline{\mathbb{P}}_p$, vir $1 \le j \le k$. Ons weet reeds A en $R = D$ is skeef-simmetries en dat $\alpha_j > 0$, vir $1 \le j \le k$. Uit $A^T = -A$ en (6.10) volg dan $A_j^T = -A_j$ vir $1 \le j \le k$. Hieruit sien ons

$$R_j^T = \left(B_j^T A_j B_j \right)^T = B_j^T A_j^T B_j = -\left(B_j^T A_j B_j \right) = -R_j.$$

Dus is $R, R_j \in \mathbb{R}^{p \times p}$ skeef-simmetries, vir $1 \le j \le k$. □

Beskou die spesiale geval $p = 1$. Dan volg uit Stelling 6.22 dat $Q, Q_j \in \overline{\mathbb{P}}_1$ en $R, R_j \in \mathbb{R}$ skeef-simmetries is, vir $1 \le j \le s$. Aangesien 0 die enigste skeef-simmetriese element in $\mathbb{R}$ is, volg

$R = R_1 = ... = R_s = 0$. Laat $Q =: q$ en $Q_j =: q_j$, dus $q, q_j \geq 0$, vir $1 \leq j \leq s$. Nou volg uit (6.12) dat

$$P(z) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{z^2 + \delta_j^2} (zQ_j + R_j) + \frac{1}{z} Q + R = \frac{q}{z} + \sum_{j=1}^{s} \frac{q_j z}{z^2 + \delta_j^2}, \quad \text{waar} \quad q, q_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Dus sien ons uit bostaande en Stelling 6.9 dat $\mathcal{PRO}_1$ ooreenstem met die versameling egte funksies in $\mathcal{PRO}$.

Lemma 6.23. *Die versameling $\mathcal{PRO}_p$ is 'n* **kik***.*

Bewys. Ons begin deur te wys dat $\mathcal{PRO}_p$ geslote is onder optelling. Neem $P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{PRO}_P$. Dan volg

$$\begin{aligned} P(z)^{(1)} + P(z)^{(2)} &= D^{(1)} + \sum_{j=1}^{k_1} \left(B_j^{(1)}\right)^T \tilde{A}_j^{(1)} B_j^{(1)} + \frac{1}{z} \left(\hat{B}^{(1)}\right)^T \hat{B}^{(1)} + D^{(2)} + \sum_{j=1}^{k_2} \left(B_j^{(2)}\right)^T \tilde{A}_j^{(2)} B_j^{(2)} \\ &\quad + \frac{1}{z} \left(\hat{B}^{(2)}\right)^T \hat{B}^{(2)} \\ &= \left(D^{(1)} + D^{(2)}\right) + \sum_{j=1}^{k_1+k_2} \mathfrak{B}_j^T \mathfrak{A}_j \mathfrak{B}_j + \frac{1}{z} \left(\left(\hat{B}^{(1)}\right)^T \hat{B}^{(1)} + \left(\hat{B}^{(2)}\right)^T \hat{B}^{(2)}\right), \end{aligned}$$

$$\text{waar} \quad \mathfrak{B}_j = \begin{cases} B_j^{(1)} & \text{as } j = 1, ..., k_1, \\ B_j^{(2)} & \text{as } j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2, \end{cases} \qquad \text{en} \quad \mathfrak{A}_j = \begin{cases} \tilde{A}_j^{(1)} & \text{as} j = 1, ..., k_1, \\ \tilde{A}_j^{(2)} & \text{as } j = k_1 + 1, ..., k_1 + k_2. \end{cases}$$

Hieruit sien ons dat $P^{(1)} + P^{(2)} \in \mathcal{PRO}_p$ en gevolglik dat $\mathcal{PRO}_p$ geslote onder optelling is.

Aangesien $P = 0_{p \times p}$ aan $(C1)-(C3)$ voldoen, toon ons vervolgens aan dat $\mathcal{PRO}_p$ geslote m.b.t. positiewe skaling is. Hiervoor neem $\lambda > 0$ en $P \in \mathcal{PRO}_p$. Dan

$$\begin{aligned} \lambda P(z) &= \lambda D + \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda}{z^2 + \alpha_j^2} \left(z B_j^T B_j + \alpha_j B_j^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} B_j\right) + \frac{\lambda}{z} \hat{B}^T \hat{B} \\ &= (\lambda D) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{z^2 + \alpha_j^2} \left(z \left(\sqrt{\lambda} B_j\right)^T \left(\sqrt{\lambda} B_j\right) + \alpha_j \left(\sqrt{\lambda} B_j\right)^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\sqrt{\lambda} B_j\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{z} \left(\sqrt{\lambda} \hat{B}\right)^T \left(\sqrt{\lambda} \hat{B}\right). \end{aligned}$$

Aangesien λ reëel is, volg $(\lambda D)^T = \lambda D^T = \lambda(-D) = -(\lambda D)$. Hiermee is bewys dat $\lambda P \in \mathcal{PRO}_p$. Gevolglik is $\mathcal{PRO}_p$ geslote onder nie-negatiewe skaling.

Laastens wil ons wys dat as $P \in \mathcal{PRO}_p$ nie-singulier is in die klas van egte, rasionale matriksfunksies, dan sal $P^{-1} \in \mathcal{PRO}_p$. Dus, veronderstel $P \in \mathcal{PRO}_p$ is nie-singulier in die klas van egte, rasionale matriksfunksies. Aangesien D die waarde van P by ∞ is en ons weet P en P^{-1} is eg en het gevolglik nie 'n pool by ∞ nie, volg dit dat D^{-1} bestaan. Aangesien D skeef-simmetries is, weet ons uit Stelling 3.27 dat p dan ewe moet wees. Volgens Stelling 2.1 in [4] geld $P(z)^{-1} = D^{-1} - D^{-1} B^T (zI_n - \breve{A})^{-1} B D^{-1}$, waar $\breve{A} = A - BD^{-1}B^T$. Deur van Gevolg 5.6.16 in [14] gebruik te maak, lei ons vervolgens hierdie formule af en toon ook aan dat

$P^{-1} \in \mathcal{PRO}_p$. Uit Gevolg 5.6.16 in [14] weet ons dat as $|z| > ||A||$, waar $||\cdot||$ enige matriksnorm is, volg $(zI_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} A^{k-1}$. Bostaande formule vir P^{-1} volg uit

$$
\begin{aligned}
P(z)P(z)^{-1} &= \left(D + B^T (zI_n - A)^{-1} B\right) \left(D^{-1} - D^{-1}B^T \left(zI_n - \left(A - BD^{-1}B^T\right)\right)^{-1} BD^{-1}\right) \\
&= I_p - B^T \left(\left(zI_n - \left(A - BD^{-1}B^T\right)\right)^{-1} - (zI_n - A)^{-1}\right) BD^{-1} \\
&\quad - B^T \left((zI_n - A)^{-1} BD^{-1}B^T \left(zI_n - \left(A - BD^{-1}B^T\right)\right)^{-1}\right) BD^{-1} \\
&= I_p - B^T \left(\left(\frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} - \frac{BD^{-1}B^T}{z^2} + ...\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{A^2}{z^3} + ...\right)\right) BD^{-1} \\
&\quad - B^T \left(\left(\frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{A^2}{z^3} + ...\right) BD^{-1}B^T \left(\frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} - \frac{BD^{-1}B^T}{z^2}\right)\right) BD^{-1} \\
&= I_p - B^T \left(\left(\frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} - \frac{BD^{-1}B^T}{z^2} + ...\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{A^2}{z^3} + ...\right)\right) BD^{-1} \\
&\quad - B^T \left(\frac{BD^{-1}B^T}{z^2} + \frac{ABD^{-1}B^T}{z^3} + ...\right) BD^{-1} \\
&= I_p - B^T \left(0_{p\times p}\right) BD^{-1} = I_p.
\end{aligned}
$$

Soortgelyk vir $P(z)^{-1}P(z) = I_p$. Dit sal volg dat $P^{-1} \in \mathcal{PRO}_p$ as D^{-1} en $\breve{A}$ skeef-simmetries is, want dan kry ons

$$P(z)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}B^T \left(zI_n - \breve{A}\right)^{-1} BD^{-1} = D^{-1} + \left(BD^{-1}\right)^T \left(zI_n - \breve{A}\right)^{-1} \left(BD^{-1}\right).$$

Vanuit $D^T = -D$ en $A^T = -A$ volg $(D^{-1})^T = (D^T)^{-1} = (-D)^{-1} = -D^{-1}$ en

$$\breve{A}^T = A^T - B(D^{-1})^T B^T = -A - B(-D^{-1})B^T = -(A - BD^{-1}B^T) = -\breve{A}.$$

Hiermee is bewys dat $\mathcal{PRO}_p$ geslote is onder die neem van inverses. Gevolglik is $\mathcal{PRO}_p$ 'n **kik**. $\square$

6.6 Notas

Die inligting en definisies rakende reële, rasionale funksies in Afdeling 6.1 is verkry op bl 401 van [12] en op bl 132 van [5]. In [8] en [5] word genoem en in [2] kortliks bewys dat $\mathcal{PR}, \mathcal{RE}, \mathcal{RO}$ en $\mathcal{PRO}$ **kik**s van $\mathcal{R}$ is. Dit word ook in [2] genoem dat elke funksie in $\mathcal{R}$ geskryf kan word as die som van sy ewe en onewe deel. Verder word met Stelling 4.2.2 in [8] bewys dat funksies van die vorm $f_{a,b}$ die boublokke is vir funksies in $\mathcal{PRO}$, soos genoem aan die einde van Voorbeeld 6.8.

Al die inligting in Afdeling 6.2 oor die nulpunte en pole van 'n funksie in $\mathcal{PRO}$ volg uit [5]. Ons formulering en bewys van Stelling 6.9 berus op inligting uit Hoofstuk 5.2 in [5]. Dit word ook in [2] genoem en in [8] bewys dat elke funksie in $\mathcal{PRO}$ die Foster voorstelling aanneem. Verder volg ook uit [8] dat $\mathcal{PRO}$ voortgebring word deur f_∞. Laastens, in Afdeling 6.2 blyk uit Lemma 6.12, ons eie bydrae, dat Gevolg 6.11 nie maklik deur 'n direkte bewys afgelei kan word nie.

Alle verwysings word volledig gegee in Afdeling 6.3.

Ons verkry die definisie vir die versameling $\mathcal{PRO}_p$ in Afdeling 6.4 uit [18]. Die alternatiewe metode om te wys dat die versameling egte funksies in $\mathcal{PRO}$ 'n Foster voorstelling aanneem, wat volg in die oorblywende Afdelings 6.4 en 6.5, word slegs genoem in [8] en in Afdeling 2.7 in [18]. Gevolglik is die oordragfunksie realisasiestelling, Stelling 6.20, ons eie werk. So ook Lemma 6.21 en die matriksweergawe van die Foster realisasiestelling, Stelling 6.22. Laastens is Lemma 6.23, wat bewys $\mathcal{PRO}_p$ is 'n **kik**, ook ons eie werk.

7 Die Cohen-Lewkowicz interpolasieprobleem

In hierdie hoofstuk bespreek ons die Cohen-Lewkowicz interpolasieprobleem. In Afdeling 7.1 verduidelik ons wat bedoel word met $f(A)$ waar $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met reguliere inersie en $f \in \mathcal{PRO}$. Dan bewys ons $\mathscr{C}(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{PRO}\}$. In die oorblywende afdelings bewys ons Vermoede 5.37 vir alle moontlike 2×2 gevalle.

7.1 Die Cohen-Lewkowicz interpolasiestelling vir 2×2 matrikse

Die Cohen-Lewkowicz interpolasieprobleem poog om vas te stel wanneer daar vir gegewe matrikse $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 'n $f \in \mathcal{PRO}$ bestaan só dat $B = f(A)$, of anders gestel, wanneer volg

$$B \in \mathcal{PRO}(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{PRO}\}.$$

Neem $f \in \mathcal{PRO}$, waar $f = \frac{p}{q}$. Herroep uit Afdeling 6.2 dat die aantal pole en nulpunte van f hoogstens met 1 kan verskil en dat al die pole en nulpunte voorkom op $\mathrm{i}\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en enkelvoudig is. Dus, as ons vereis dat f streng eg is, weet ons die graad van p is ewe. Indien nie, sal p 'n nulpunt by nul hê, aangesien p se nulpunte in toegevoegde pare voorkom en gevolglik sal f 'n pool by ∞ hê. Ons kan nou p en q soos volg faktoriseer

$$\begin{aligned} p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + ... + p_{2k} z^{2k} &= (z - \mathrm{i}\alpha_1)(z + \mathrm{i}\alpha_1)(z - \mathrm{i}\alpha_2)(z + \mathrm{i}\alpha_2)...(z - \mathrm{i}\alpha_k)(z + \mathrm{i}\alpha_k) \\ &= (z^2 + \alpha_1^2)(z^2 + \alpha_2^2) + ... + (z^2 + \alpha_k^2) \quad \text{en} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + ... + q_{2k+1} z^{2k+1} &= z(z - \mathrm{i}\beta_1)(z + \mathrm{i}\beta_1)(z - \mathrm{i}\beta_2)(z + \mathrm{i}\beta_2)...(z - \mathrm{i}\beta_k)(z + \mathrm{i}\beta_k) \\ &= z(z^2 + \beta_1^2)(z^2 + \beta_2^2)...(z^2 + \beta_k^2). \end{aligned}$$

Uit bostaande faktorisering sien ons dat in die geval waar A reguliere inersie het, volg dit dat $p(A)$ en $q(A)$ inverteerbaar is, omdat $\pm\mathrm{i}\alpha_j$ en $\pm\mathrm{i}\beta_j$, $1 \leq j \leq k$, nie eiewaardes van A kan wees nie. Gevolglik weet ons in die geval waar A reguliere inersie het, bestaan $q(A)^{-1}$ en word gegee deur

$$q(A)^{-1} = (A + \mathrm{i}\beta_k I_n)^{-1}(A - \mathrm{i}\beta_k I_n)^{-1}...(A + \mathrm{i}\beta_2 I_n)^{-1}(A - \mathrm{i}\beta_2 I_n)^{-1}(A + \mathrm{i}\beta_1 I_n)^{-1}(A - \mathrm{i}\beta_1 I_n)^{-1}A^{-1}.$$

Bostaande faktorisering vir p en q volg soortgelyk sou ons aanneem f is eg of nie-eg.

Vir die geval waar A reguliere inersie het, interpreteer ons

$$f(A) = \frac{p(A)}{q(A)} \quad \text{as} \quad f(A) = p(A)q(A)^{-1} \quad \text{vir} \quad f = \frac{p}{q} \in \mathcal{PRO}.$$

Aangesien ons uit Stelling 4.2, vir $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, weet $\{A\}''_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[A]$ en uit Gevolg 5.6 weet $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ is 'n **kik**, volg $q(A)^{-1} \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Ons weet ook uit Gevolg 5.6 dat $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ 'n kommutatiewe versameling is, dus kan $f(A)$ ook geskryf word as

$$f(A) = q(A)^{-1}p(A).$$

Aangesien die faktore van p en q in enige volgorde kan voorkom, kan $f(A)$ op verskeie ekwivalente maniere geskryf word.

In [8] word verduidelik dat vir twee gegewe matrikse $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, waar A reguliere inersie het, volg dit dat $B \in \mathscr{C}(A)$ as en slegs as daar ten minste een $f \in \mathcal{PRO}$ bestaan só dat $f(A) = B$. Alvorens ons hierdie resultaat kan bewys, benodig ons die volgende resultaat.

Proposisie 7.1. *Vir $f \in \mathcal{R}$ en $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sodanig dat $f(A)$ bestaan, volg*

$$\mathscr{C}\left(f(A)\right) = \{g(A) : g \in \mathscr{C}\left(f\right) \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}.$$

Bewys. Laat $X_j \subseteq \mathcal{R}$ die j-de vlak in die konstruksie van $\mathscr{C}(f)$ wees, soos volgens Proposisie 2.12 en soortgelyk $\widetilde{X}_j \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ die j-de vlak in die konstruksie van $\mathscr{C}(f(A))$, waar $j \geq 0$. Ons bewys vervolgens deur middel van induksie dat

$$\widetilde{X}_j = \{g(A) : g \in X_j \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}, \quad \text{vir alle} \quad j \geq 0.$$

Hieruit volg dan

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}(f(A)) &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \widetilde{X}_j = \bigcup_{j=0}^{\infty} \{g(A) : g \in X_j \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\} \\
&= \left\{ g(A) : g \in \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j \text{ en } g(A) \text{ bestaan} \right\} = \{g(A) : g \in \mathscr{C}(f) \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}.
\end{aligned}$$

Ons sien uit Proposisie 2.12 dat $X_0 = \mathbb{R}_+ \cdot f$ en $\widetilde{X}_0 = \mathbb{R}_+ \cdot f(A) = \left(\mathbb{R}_+ \cdot f\right)(A)$. Hieruit volg maklik dat

$$\widetilde{X}_0 = \{g(A) : g \in X_0 \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}.$$

Neem $h \in X_j$, waar $h = \frac{p}{q}$. Ons weet $h^{-1} = \frac{1}{h}$ aangesien $X_j \subseteq \mathcal{R}$, asook dat $h(A) = p(A)q(A)^{-1}$ in die geval waar $h(A)$ bestaan. Dus, in die geval waar $\frac{1}{h}(A)$ bestaan, volg

$$\frac{1}{h}(A) = q(A)p(A)^{-1}.$$

Veronderstel $h(A)^{-1}$ bestaan. Dan volg $h(A)^{-1} = \left(p(A)q(A)^{-1}\right)^{-1} = q(A)p(A)^{-1}$. Hieruit sien ons $h(A)^{-1} = \frac{1}{h}(A)$.

Veronderstel nou $\widetilde{X}_j = \{g(A) : g \in X_j \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}$. Dan volg

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_j^{-1} &= \left\{g(A)^{-1} : g(A) \in \widetilde{X}_j \text{ waar } g(A)^{-1} \text{ bestaan}\right\} = \left\{g(A)^{-1} : g \in X_j \text{ en } g(A)^{-1} \text{ bestaan}\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{g}(A) : \frac{1}{g} \in X_j^{-1} \text{ en } \frac{1}{g}(A) \text{ bestaan}\right\} = \left\{\tilde{g}(A) : \tilde{g} \in X_j^{-1} \text{ en } \tilde{g}(A) \text{ bestaan}\right\}.
\end{aligned}$$

Uit bostaande en Proposisie 2.12 volg

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_{j+1} &= \operatorname{conv}\left(\widetilde{X}_j \cup \widetilde{X}_j^{-1}\right) \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i(A) : \; k \in \mathbb{N}, \; \alpha_i \geq 0, \; g_i(A) \in \widetilde{X}_j \cup \widetilde{X}_j^{-1} \text{ vir } i = 1, 2, ..., k \text{ en } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\right\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i(A) : \; k \in \mathbb{N}, \; \alpha_i \geq 0, \; g_i \in X_j \cup X_j^{-1} \text{ en } g_i(A) \; \exists \text{ vir } i = 1, 2, ..., k \text{ en } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\right\} \\
&= \left\{g(A) : g \in \operatorname{conv}\left(X_j \cup X_j^{-1}\right) \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\right\} = \{g(A) : g \in X_{j+1} \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}.
\end{aligned}$$

Hiermee is bewys dat $\widetilde{X}_j = \{g(A) : g \in X_j \text{ en } g(A) \text{ bestaan}\}$ vir alle $j \geq 0$. $\square$

Gevolg 7.2 ([8], Gevolg 5.2.2)**.** *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 'n matriks met reguliere inersie wees. Dan volg*

$$\mathscr{C}(A) = \mathcal{PRO}(A) = \{f(A) : f \in \mathcal{PRO}\}.$$

Bewys. Ons maak gebruik van Stelling 6.10 waaruit volg $\mathcal{PRO} = \mathscr{C}(f_\infty)$. Aangesien vir enige $f \in \mathcal{PRO}$ en 'n matriks A met reguliere inersie volg dat $f(A)$ bestaan, soos bespreek aan die begin van die afdeling, volg uit Proposisie 7.1 dat

$$\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}\left(f_\infty(A)\right) = \{f(A) : f \in \mathscr{C}(f_\infty)\} = \{f(A) : f \in \mathcal{PRO}\}. \qquad \square$$

In Afdeling 5.4 het ons die mening uitgespreek (sien Vermoede 5.37) dat vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Op grond van Gevolg 7.2 lei dit tot 'n verdere vermoede soos in Vermoede 7.3 hieronder gestel en soos in [7] bespreek met verwysing na 'n ongepubliseerde manuskrip waarin Vermoede 5.37 bewys is.

Vermoede 7.3. *Laat $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, waar A Lyapunov regulier is. Dan volg $B = f(A)$ vir 'n $f \in \mathcal{PRO}$ as en slegs as $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Die doel van hierdie hoofstuk is om Vermoede 5.37 te bewys vir $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar A Lyapunov regulier is.

Stelling 7.4. *Vir $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar A Lyapunov regulier is, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Ons weet reeds uit die opmerking na Vermoede 5.37 dat ons net die een insluiting $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$ hoef te wys. Uit die verduideliking voor Voorbeeld 5.38 weet ons ook dat ons A as sy reële Jordan-matriks $J_{\mathbb{R}}$ kan beskou. Gevolglik is dit voldoende om die insluiting $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$ vir die volgende matrikse te wys:

(I) A het 'n toegevoede paar komplekse eiewaardes:

$$A = C(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{vir} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad \alpha \neq 0.$$

(II) A het 'n reële eiewaarde met geometriese multiplisiteit 1:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{vir} \quad \lambda > 0 \quad \text{of} \quad \lambda < 0.$$

(III) A het twee verskillende reële eiewaardes:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \text{vir} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{en} \quad \lambda_1\lambda_2 \neq 0.$$

(IV) A het een reële eiewaarde met geometriese multiplisiteit 2:

$$A = \lambda I_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{vir} \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die laaste geval volg uit Voorbeeld 5.38. Hier het ons reeds gesien dat die insluiting $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$ geld vir beide gevalle waar $\lambda > 0$ of $\lambda < 0$. In die volgende drie afdelings bewys ons Stelling 7.4 vir die oorblywende drie gevalle hierbo. Dit gee dan 'n volledige bewys vir Stelling 7.4.

7.2 Geval I: 'n Toegevoegde paar komplekse eiewaardes

In hierdie afdeling bewys ons Stelling 7.4 vir $A = C(\alpha, \beta)$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\alpha \neq 0$. Die eiewaardes van A is $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$. Dus sien ons A is Lyapunov regulier. In die geval waar $\beta = 0$ stem hierdie geval ooreen met geval (IV). Ons neem dus $\beta \neq 0$. Ons neem ook $\alpha > 0$ in die bewys van die volgende resultate omdat ons dan kan werk met die matriks $A_0 = \frac{1}{\alpha}A = C(1, \rho)$, waar $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$. Dit volg omdat $\frac{1}{\alpha} > 0$ en dus

$$\mathscr{C}(A_0) = \mathscr{C}(A) \quad \text{en} \quad \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A),$$

soos gesien uit die rekursiewe konstruksie van $\mathscr{C}(A)$ vanuit sy voortbringende versameling $\{A\}$, Proposisie 2.12 en Gevolg 5.25 (i).

Verder volg uit Lemma 4.3 dat $\{A_0\}''_{\mathbb{R}} = \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Ons kan dus werk met die versamelings $\mathscr{C}(A_0)$, $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0)$ en $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0) \cap \{A_0\}''_{\mathbb{R}}$ in elk van die volgende resultate se bewyse.

In die geval waar $\alpha < 0$, neem $A_0 = -\frac{1}{\alpha}A = C(-1, -\rho)$ en die bewyse volg soortgelyk.

Lemma 7.5. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = C(\alpha, \beta)$, volg*

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \tau \begin{bmatrix} 1 & e \\ -e & 1 \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\ |e| \leq |\rho| \right\}.$$

Bewys. Ons bepaal die **kik** $\mathscr{C}(A_0)$. Uit

$$A_0^{-1} = \frac{1}{1+\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad \text{volg} \quad C(1, -\rho) = (1+\rho^2)A_0^{-1} \in \mathscr{C}(A_0), \quad \text{aangesien} \quad (1+\rho^2) > 0.$$

Dus sal volg dat $D = \tau\left(\epsilon C(1, \rho) + \delta C(1, -\rho)\right) \in \mathscr{C}(A_0)$ vir enige $\tau, \epsilon, \delta \geq 0$ met $\epsilon + \delta = 1$. Ons sien dat

$$D = \tau \left(\epsilon \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right) = \tau \begin{bmatrix} 1 & \rho(\epsilon - \delta) \\ -\rho(\epsilon - \delta) & 1 \end{bmatrix},$$

met $\rho(\epsilon - \delta) \in [-\rho, \rho]$, aangesien $(\epsilon - \delta) \in [-1, 1]$. Stel $e := \rho(\epsilon - \delta)$. Dan volg $\frac{|e|}{|\rho|} = |\frac{e}{\rho}| = |\epsilon - \delta| \leq 1$, oftewel $|e| \leq |\rho|$. Definieer

$$\mathscr{D} := \left\{ \tau \begin{bmatrix} 1 & e \\ -e & 1 \end{bmatrix} :\ \tau \geq 0,\ |e| \leq |\rho| \right\}.$$

Dit is duidelik dat $A_0 \in \mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}(A_0)$. Ons sal vervolgens aantoon dat $\mathscr{D}$ 'n **kik** is. Aangesien $\mathscr{C}(A_0)$ die kleinste **kik** is wat A_0 bevat, sal dan volg dat $\mathscr{C}(A_0) \subseteq \mathscr{D}$ en dus dat $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A_0)$.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ 'n **kik** is, neem $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$, waar

$$D_1 = \tau_1 \begin{bmatrix} 1 & e_1 \\ -e_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \tau_2 \begin{bmatrix} 1 & e_2 \\ -e_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tau_i \geq 0 \quad \text{en} \quad |e_i| \leq |\rho| \quad \text{vir} \quad i = 1, 2.$$

Dan,

$$D_1 + D_2 = \tau_1 + \tau_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tau_1 e_1 + \tau_2 e_2}{\tau_1 + \tau_2} \\ -\frac{\tau_1 e_1 + \tau_2 e_2}{\tau_1 + \tau_2} & 1 \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} 1 & e \\ -e & 1 \end{bmatrix},$$
$$\text{waar} \quad \tau := \tau_1 + \tau_2 \quad \text{en} \quad e := \frac{\tau_1 e_1 + \tau_2 e_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Aangesien $\tau \geq 0$, sal $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$ as $|e| \leq |\rho|$. Hierdie verlangde ongelykheid volg uit

$$\left|\frac{\tau_1 e_1 + e_2\rho_2}{\tau_1 + \tau_2}\right| \leq \frac{\tau_1|e_1| + \tau_2|e_2|}{\tau_1 + \tau_2} \leq |\rho|\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = |\rho|,$$

aangesien $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ en $|e_1|, |e_2| \leq |\rho|$. Dus volg $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$. Gevolglik weet ons $\mathscr{D}$ is geslote onder optelling.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote is onder nie-negatiewe skaling, neem $D \in \mathscr{D}$ en $\phi \geq 0$. Dan,

$$\phi D = \phi\tau \begin{bmatrix} 1 & e \\ -e & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{D}, \quad \text{omdat} \quad \phi\tau \geq 0.$$

Laastens wys ons dat $\mathscr{D}$ geslote onder die neem van inverses is. Neem 'n nie-singuliere $D \in \mathscr{D}$, waar

$$D = \tau \begin{bmatrix} 1 & e \\ -e & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tau > 0 \quad \text{en} \quad |e| \leq |\rho|.$$

Dan

$$D^{-1} = \frac{1}{\tau^2(1+e^2)} \begin{bmatrix} 1 & -e \\ e & 1 \end{bmatrix} = \tilde{\tau} \begin{bmatrix} 1 & \tilde{e} \\ -\tilde{e} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tilde{\tau} := \frac{1}{\tau^2(1+e^2)} \quad \text{en} \quad \tilde{e} := -e.$$

Aangesien $\tilde{\tau} > 0$ en $|\tilde{e}| = |e| \leq |\rho|$, volg $D^{-1} \in \mathscr{D}$ en dit bewys $\mathscr{D}$ is geslote onder die neem van inverses. Gevolglik weet ons $\mathscr{D}$ is 'n **kik** en $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A_0) = \mathscr{C}(A)$. $\square$

Lemma 7.6. *Vir $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $B = C(\delta, \lambda)$, volg*

$$\overline{\mathbb{S}}(B) = \left\{ S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2 : \lambda^2\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right) \leq 4\delta^2 \det(S) \right\}.$$

Vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(B)$ volg in die geval waar $\delta \neq 0$ dat $\delta\,(s_{11} + s_{22}) > 0$.

Bewys. Neem $S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2$. Dan volg

$$\begin{aligned} H := SB + B^H S &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & \lambda \\ -\lambda & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & -\lambda \\ \lambda & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{11}\delta - s_{12}\lambda & s_{11}\lambda + s_{12}\delta \\ s_{12}\delta - s_{22}\lambda & s_{12}\lambda + s_{22}\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta s_{11} - \lambda s_{12} & \delta s_{12} - \lambda s_{22} \\ \lambda s_{11} + \delta s_{12} & \lambda s_{12} + \delta s_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\,(\delta s_{11} - \lambda s_{12}) & \lambda(s_{11} - s_{22}) + 2\delta s_{12} \\ \lambda(s_{11} - s_{22}) + 2\delta s_{12} & 2\,(\delta s_{22} + \lambda s_{12}) \end{bmatrix} \in \overline{\mathbb{P}}_2 \end{aligned}$$

as en slegs as $\operatorname{tr}(H), \det(H) \geq 0$. Ons sien dat $\operatorname{tr}(H) = 2\delta(s_{11} + s_{22})$ en

$$\begin{aligned} \det(H) &= 4(\delta^2 s_{11}s_{22} + \delta\lambda s_{11}s_{12} - \delta\lambda s_{22}s_{12} - \lambda^2 s_{12}^2) - (\lambda(s_{11} - s_{22}) + 2\delta s_{12})^2 \\ &= 4(\delta^2 s_{11}s_{22} + \delta\lambda(s_{11} - s_{22})s_{12} - \lambda^2 s_{12}^2) - (\lambda^2(s_{11} - s_{22})^2 + 4\delta\lambda(s_{11} - s_{22})s_{12} + 4\delta^2 s_{12}^2) \\ &= 4\delta^2(s_{11}s_{22} - s_{12}^2) - \lambda^2(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2) = 4\delta^2 \det(S) - \lambda^2(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2). \end{aligned}$$

Dus volg $\det(H) \geq 0$ as en slegs as

$$\lambda^2\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right) \leq 4\delta^2 \det(S). \tag{7.1}$$

Nou wys ons met behulp van 'n teenspraak dat $\det(H) \geq 0$ impliseer $\mathrm{tr}(H) \geq 0$. Neem aan $\det(H) \geq 0$ en $\mathrm{tr}(H) < 0$. In die geval waar $\delta = 0$ volg $\mathrm{tr}(H) = 0$; dus weet ons $\delta \neq 0$. Ons sien uit $\mathrm{tr}(H) < 0$ dat $\delta s_{11} < -\delta s_{22}$. In die geval waar $\delta > 0$, volg $s_{11} < -s_{22}$ en aangesien ons uit (7.1) kry dat $\det(S) \geq 0$, volg nou

$$0 \leq \det(S) = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 < (-s_{22})s_{22} - s_{12}^2 = -(s_{22}^2 + s_{12}^2) < 0, \quad \text{wat teenstrydig is.}$$

In die geval waar $\delta < 0$, volg $s_{11} > -s_{22}$ en aangesien ons uit (7.1) kry dat $\det(S) \geq 0$, volg nou

$$0 \leq \det(S) = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 < -s_{11}s_{11} - s_{12}^2 = -(s_{11}^2 + s_{12}^2) < 0, \quad \text{wat teenstrydig is.}$$

Hieruit sien ons as $\det(H) \geq 0$ dan ook $\mathrm{tr}(H) \geq 0$. Dus, vir $S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2$ volg $S \in \overline{\mathbb{S}}(B)$ as en slegs as aan (7.1) voldoen word.

Vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(B)$ volg in die geval waar $\delta \neq 0$ dat $\mathrm{tr}(H) = 0$ as en slegs as $s_{11} + s_{22} = 0$. Veronderstel $s_{11} = s_{22} = 0$. Ons weet uit (7.1) dat $\det(S) \geq 0$, maar aangesien $\det(S) = -s_{12}^2 < 0$ weet ons as $s_{11} = s_{22} = 0$ dan ook $s_{12} = 0$. Dus, in die geval waar $s_{11} = s_{22} = 0$, volg $S = 0_{2\times 2}$. Gevolglik geld $s_{11} + s_{22} = 0$ alleenlik wanneer $s_{11} = -s_{22}$. Ons sien dat hierdie geval ook nie moontlik is nie, aangesien ons uit (7.1) weet $\det(S) \geq 0$ en dit nie moontlik is in die geval waar s_{11} en s_{22} verskillende tekens het nie. Dus weet ons vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(B)$ volg in die geval waar $\delta \neq 0$, dat $\mathrm{tr}(H) = 2\delta\,(s_{11} + s_{22}) > 0$. □

Proposisie 7.7. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ waar $A = C(\alpha, \beta)$, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Bewys. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0) \cap \{A_0\}''_{\mathbb{R}}$. Ons weet uit Stelling 4.17 dat vir $B \in \{A_0\}''_{\mathbb{R}}$ volg $B = C(\delta, \lambda)$. Aangesien $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0)$, weet ons B het reguliere inersie en dus $\delta \neq 0$, omdat δ die reële gedeelte van die toegevoegde paar komplekse eiewaardes van B is, soos verduidelik in Afdeling 3.5. Herskryf B as $B = \delta C(1, \frac{\lambda}{\delta})$. Aangesien dit volg dat $\overline{\mathbb{S}}(A_0) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$, sien ons uit Lemma 7.6 dat vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(A_0)$ volg

$$\rho^2\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right) \leq 4\det(S), \quad \text{asook} \quad \frac{\lambda^2}{\delta^2}\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right) \leq 4\det(S). \tag{7.2}$$

Ons weet ook uit die bewys van Lemma 7.6 dat (7.2) impliseer $\mathrm{tr}(SA_0 + A_0^H S) = 2(s_{11} + s_{22}) > 0$, asook $\mathrm{tr}(SB + B^H S) = 2\delta(s_{11} + s_{22}) > 0$. Hieruit weet ons dus $\delta > 0$. Kies s_{11}, s_{22} en s_{12} só dat $4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2 \neq 0$ en $\rho^2\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right) = 4\det(S)$. Dan volg uit (7.2) dat

$$\frac{\lambda^2}{\delta^2}\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right) \leq 4\det(S) = \rho^2\left(4s_{12}^2 + (s_{11} - s_{22})^2\right), \quad \text{oftewel} \quad \frac{\lambda^2}{\delta^2} \leq \rho^2.$$

Hieruit volg

$$\left|\frac{\lambda}{\delta}\right| \leq |\rho|$$

en dus sien ons uit Lemma 7.5 dat $B \in \mathscr{C}(A_0)$. Gevolglik het ons bewys $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0) \cap \{A_0\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A_0)$. □

Die volgende resultaat wys dat dit nie eenvoudig is om die versameling $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ direk te bepaal sonder dat ons weet $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ het dieselfde vorm as A nie, soos volg wanneer B ook in $\{A\}''_{\mathbb{R}}$ is.

Lemma 7.8 ([7], Lemma 12)**.** *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = C(\alpha, \beta)$, volg*

$$\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) = \left\{ \tau \begin{bmatrix} 1+c & d+f \\ d-f & 1-c \end{bmatrix} : |f| + \sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)} \leq |\rho|,\ \tau > 0 \right\}. \tag{7.3}$$

Bewys. Om $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0)$ te bepaal, ondersoek ons watter voorwaardes op 'n $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar B reguliere inersie het, verseker dat $\overline{\mathbb{S}}(A_0) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$. Ons begin deur $\overline{\mathbb{S}}(A_0)$ te bepaal.

Neem $S \in \mathbb{S}_2$, met skaling $\operatorname{tr}(S) = 2$. Dan volg

$$S = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Ons maak van Lemma 7.6 gebruik, waarvolgens vir S soos in (7.4) volg $S \in \overline{\mathbb{S}}(A_0)$ as en slegs as

$$\rho^2 \left(a^2 + b^2\right) \leq 1 - a^2 - b^2.$$

Hierdie is ekwivalent aan $b^2(\rho^2+1) + a^2(\rho^2+1) \leq 1$, oftewel $a^2 + b^2 \leq \frac{1}{1+\rho^2}$. Dus volg

$$\overline{\mathbb{S}}(A_0) = \left\{ \begin{bmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix} : \quad a^2 + b^2 \leq \frac{1}{1+\rho^2} \right\}.$$

Vervolgens vind ons die voorwaardes waaronder vir 'n $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, met reguliere inersie, sal volg dat $A_0 \leq B$. Beskou 'n matriks $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ waar

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Indien ons vereis dat $\operatorname{tr}(B) = b_{11} + b_{22} = 2$, kan ons B as volg skryf:

$$B = \begin{bmatrix} 1+c & d+f \\ d-f & 1-c \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad c := \frac{b_{11} - b_{22}}{2}, \quad d := \frac{b_{12} + b_{21}}{2}, \quad \text{en} \quad f := \frac{b_{12} - b_{21}}{2}.$$

Ons bepaal vervolgens onder watter voorwaardes volg $SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_2$ vir $S \in \overline{\mathbb{S}}(A_0)$, waar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ met reguliere inersie en skaling $\operatorname{tr}(B) = 2$. Definieer

$$E := SB + B^H S = \begin{bmatrix} 2(1+a+c+ac+bd-bf) & 2(d+af+b) \\ 2(d+af+b) & 2(1-a-c+ac+bd+bf) \end{bmatrix}.$$

Dit sal volg dat $E \in \overline{\mathbb{P}}_2$ as en slegs as $\operatorname{tr}(E), \det(E) \geq 0$. Na direkte berekening volg $\frac{1}{4}\operatorname{tr}(E) = 1 + ac + bd$ en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\det(E) &= (1+a+c+ac+bd-bf)(1-a-c+ac+bd+bf) - (d+af+b)^2 \\
&= \left(1 + 2bd + 2abf + 2bcf + 2abcd - a^2 - c^2 + (ac)^2 + (bd)^2 - (bf)^2\right) \\
&\quad - \left(d^2 + b^2 + (af)^2 + 2adf + 2bd + 2abf\right) \\
&= \left(1 + (ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd - \left(a^2 + b^2 + c^2 - 2bcf + (bf)^2 + d^2 + 2adf + (af)^2\right)\right) \\
&= 1 + (ac+bd)^2 - \left(a^2 + b^2 + (c-bf)^2 + (d+af)^2\right).
\end{aligned}$$

In die geval waar $c = d = 0$ volg $\frac{1}{4}\operatorname{tr}(E) = 1$ en $\frac{1}{4}\det(E) = 1 - \big(a^2(1+f^2) + b^2(1+f^2)\big)$. Kies nou a en b só dat $a^2 + b^2 = \frac{1}{1+\rho^2}$. Indien $\det(E) \geq 0$ volg

$$0 \leq \frac{1}{4}\det(E) = 1 - \left(\left(a^2+b^2\right)\left(1+f^2\right)\right) = 1 - \left(\frac{1+f^2}{1+\rho^2}\right), \quad \text{oftewel} \quad 1+f^2 \leq 1+\rho^2.$$

Hieruit sien ons $|f| \leq |\rho|$ en dus word aan (7.3) voldoen in die geval waar $c = d = 0$.

Ons neem nou aan c en d is nie gelyktydig nul nie en maak van Lagrange vermenigvuldigers gebruik. Stel $f_1(a,b) = 1 + ac + bd$ en $g(a,b) = a^2 + b^2$, waar die beperking nou as 'n gelykheid beskou word, dus $g(a,b) = \frac{1}{1+\rho^2}$. Vir

$$\nabla f_1(a,b) = \Gamma \nabla g(a,b), \quad \text{volg} \quad (c,d) = \Gamma(2a, 2b). \quad \text{Hieruit sien ons} \quad a = \frac{c}{2\Gamma} \quad \text{en} \quad b = \frac{d}{2\Gamma}.$$

Vanuit $a^2 + b^2 = \frac{1}{1+\rho^2}$, volg $\Gamma = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}$ asook

$$\frac{1}{4}\operatorname{tr}(E) = 1 + ac + bd = 1 \pm \frac{c^2}{\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}} \pm \frac{d^2}{\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}}.$$

Uit bostaande sien ons dat $\frac{1}{4}\operatorname{tr}(E) > 0$ vir alle $a, b \in \mathbb{R}$ as $\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}$. Vir die geval waar $\Gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}$ volg

$$\begin{aligned} 1 + ac + bd = 1 - \frac{c^2}{\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}} - \frac{d^2}{\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}} = 1 - \left(\frac{c^2+d^2}{\sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}}\right) \\ = 1 - \frac{\sqrt{(c^2+d^2)}}{\sqrt{(1+\rho^2)}}. \quad \text{Hieruit sien ons dat} \quad \frac{1}{4}\operatorname{tr}(E) \geq 0 \quad \text{as} \quad c^2+d^2 \leq 1+\rho^2. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Stel nou $f_2(a,b) = 1 + (ac+bd)^2 - \big(a^2 + b^2 + (c-bf)^2 + (d+af)^2\big)$ en neem weer $g(a,b) = a^2 + b^2$ met $g(a,b) = \frac{1}{1+\rho^2}$. Dan volg

$$\begin{gathered} \nabla f_2(a,b) = \Gamma \nabla g(a,b) \\ (2(ac+bd)(c) - 2a - 2(d+af)(f), 2(ac+bd)(d) - 2b - 2(c-bf)(-f)) = \Gamma(2a, 2b). \\ \text{Dus kry ons} \quad a = \frac{d(bc-f)}{1+\Gamma-c^2+f^2} \quad \text{en} \quad b = \frac{c(ad+f)}{1+\Gamma-d^2+f^2}. \end{gathered}$$

Dit word in Lemma 12 in [7] genoem dat hierdie 'n eenvoudige, kwadratiese programmeringsprobleem oplewer. 'n Program soos Matlab kan dus gebruik word om Γ uit $a^2 + b^2 = \frac{1}{1+\rho^2}$ te bepaal, waarna a en b bepaal kan word. Vervang hierdie waardes in $\det(E)$ en dan volg dat $\det(E) \geq 0$ as en slegs as $\rho^2 - \left(|f| + \sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}\right)^2 \geq 0$, oftewel $|\rho| \geq |f| + \sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}$. Ons sien dat (7.5) ook hierin bevredig word, want indien $c^2 + d^2 > 1 + \rho^2$ volg

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho^2 - \left(|f| + \sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}\right)^2 &= \rho^2 - |f|^2 - 2|f|\sqrt{(\rho^2+1)(c^2+d^2)} - (1+\rho^2)(c^2+d^2) \\ < \rho^2 - |f|^2 - 2|f|(1+\rho^2) - (1+\rho^2)^2 &= \rho^2 - |f|^2 - 2|f| - 2|f|\rho^2 - 1 - 2\rho^2 - \rho^4 < 0. \end{aligned}$$

Uit bogenoemde teenstrydigheid volg dat as $\rho^2 - \left(|f| + \sqrt{(1+\rho^2)(c^2+d^2)}\right)^2 \geq 0$, dan moet $c^2 + d^2 \leq 1 + \rho^2$. Aangesien uit Lemma 5.13 volg dat $\overline{\mathbb{S}}(\tau B) = \overline{\mathbb{S}}(B)$ vir $\tau > 0$, weet ons as $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0)$ dan ook $\tau B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0)$ vir $\tau > 0$. Hiermee sien ons $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A_0) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$ het die vorm soos in (7.3). $\square$

7.3 Geval II: Een reële eiewaarde met geometriese multiplisiteit 1

In hierdie afdeling bewys ons Stelling 7.4 vir $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, met $\lambda < 0$ of $\lambda > 0$.

Lemma 7.9. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, volg*

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \tau \begin{bmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\, |\rho| \leq 1 \right\}.$$

Bewys. Aangesien A Lyapunov regulier is, weet ons $\lambda \neq 0$. Dus bestaan A^{-1} en word gegee deur

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\mathscr{C}(A)$ 'n **kik** is, volg $A_0 := \frac{1}{\lambda^2} A \in \mathscr{C}(A)$ en ook

$$A_0^{-1} = \lambda^2 A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathscr{C}(A).$$

Hieruit weet ons $D = \tau\left(\epsilon A + \delta A_0^{-1}\right) \in \mathscr{C}(A)$ vir enige $\tau, \epsilon, \delta \geq 0$ met $\epsilon + \delta = 1$. Ons sien

$$D = \tau \left(\epsilon \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \tau \left(\begin{bmatrix} \lambda & \epsilon - \delta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right).$$

Laat $\rho := \epsilon - \delta$, dan volg $\rho \in [-1, 1]$, oftewel $|\rho| \leq 1$. Stel

$$\mathscr{D} \;\; := \;\; \left\{ \tau \begin{bmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\, |\rho| \leq 1 \right\}.$$

Dit is duidelik dat $A \in \mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}(A)$. Ons bewys $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A)$ deur te wys $\mathscr{D}$ is 'n **kik**. Aangesien $\mathscr{C}(A)$ die kleinste **kik** is wat A bevat, sal dan volg dat $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{D}$.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote onder optelling is, neem $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$, met

$$D_1 = \tau_1 \begin{bmatrix} \lambda & \rho_1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \tau_2 \begin{bmatrix} \lambda & \rho_2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tau_i \geq 0 \quad \text{en} \quad |\rho_i| \leq 1 \quad \text{vir} \quad i = 1, 2.$$

Dan,

$$D_1 + D_2 = \begin{bmatrix} \lambda(\tau_1 + \tau_2) & \tau_1\rho_1 + \tau_2\rho_2 \\ 0 & \lambda(\tau_1 + \tau_2) \end{bmatrix} = (\tau_1 + \tau_2) \begin{bmatrix} \lambda & \frac{\tau_1\rho_1 + \tau_2\rho_2}{(\tau_1 + \tau_2)} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\tau := \tau_1 + \tau_2 \geq 0$, sal volg $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$ as $\left| \frac{\tau_1\rho_1 + \tau_2\rho_2}{\tau_1 + \tau_2} \right| \leq 1$. Hierdie verlangde ongelykheid volg uit

$$\left| \frac{\tau_1\rho_1 + \tau_2\rho_2}{\tau_1 + \tau_2} \right| \leq \frac{\tau_1|\rho_1| + \tau_2|\rho_2|}{\tau_1 + \tau_2} \leq \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 1,$$

aangesien $\tau_1, \tau_2, \geq 0$ en $|\rho_1|, |\rho_2| \leq 1$. Hieruit sien ons $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$. Gevolglik is $\mathscr{D}$ geslote onder optelling.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote is onder nie-negatiewe skaling, neem $D \in \mathscr{D}$ en $\phi \geq 0$, dan

$$\phi D = \phi\tau \begin{bmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\phi\tau \geq 0$, volg dit dat $\phi D \in \mathscr{D}$. Gevolglik is $\mathscr{D}$ geslote onder nie-negatiewe skaling.

Laastens wys ons dat $\mathscr{D}$ geslote is onder die neem van inverses deur vir 'n nie-singuliere $D \in \mathscr{D}$, D^{-1} te bereken en te wys $D^{-1} \in \mathscr{D}$. Laat

$$D \quad = \quad \tau \begin{bmatrix} \lambda & \rho \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tau > 0 \quad \text{en} \quad |\rho| \leq 1. \quad \text{Dan} \quad D^{-1} = \frac{1}{\tau\lambda^2} \begin{bmatrix} \lambda & -\rho \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\frac{1}{\tau\lambda^2} > 0$ en $|-\rho| = |\rho| \leq 1$, sien ons dat $D^{-1} \in \mathscr{D}$. Hiermee is bewys dat $\mathscr{D}$ geslote is onder die neem van inverses en gevolglik weet ons $\mathscr{D}$ is 'n **kik**. Dus volg $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A)$. $\square$

Lemma 7.10. *Vir $B \in \mathcal{T}_{+,2} \cap \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$, volg*

$$\overline{\mathbb{S}}(B) = \left\{ S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2 : b_2^2 s_{11}^2 \leq 4b_1^2 \det(S) \text{ en } b_1\left(s_{11} + s_{22}\right) + b_2 s_{12} \geq 0 \right\}. \tag{7.6}$$

Vir $S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2$ geld:

(I) As $S \in \overline{\mathbb{S}}(B)$, dan $b_1 s_{11} \geq 0$.

(II) As $b_1 s_{11} > 0$, dan $S \in \overline{\mathbb{S}}(B)$ as en slegs as $b_2^2 s_{11}^2 \leq 4b_1^2 \det(S)$.

(III) As $S \neq 0_{2\times 2}$ en $b_1 \neq 0$, dan $b_1 s_{11} > 0$ of $b_1 s_{22} > 0$.

Bewys. Neem $S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2$. Dan volg

$$\begin{aligned} H := SB + B^H S &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{11}b_1 & s_{11}b_2 + s_{12}b_1 \\ s_{12}b_1 & s_{12}b_2 + s_{22}b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 s_{11} & b_1 s_{12} \\ b_2 s_{11} + b_1 s_{12} & b_2 s_{12} + b_1 s_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2b_1 s_{11} & b_2 s_{11} + 2b_1 s_{12} \\ b_2 s_{11} + 2b_1 s_{12} & 2b_2 s_{12} + 2b_1 s_{22} \end{bmatrix} \in \overline{\mathbb{P}}_2 \end{aligned}$$

as en slegs as $\operatorname{tr}(H), \det(H) \geq 0$. Ons sien dat $\operatorname{tr}(H) = 2\left(b_1\left(s_{11} + s_{22}\right) + b_2 s_{12}\right)$ en

$$\begin{aligned} \det(H) &= 4\left(b_1 b_2 s_{11} s_{12} + b_1^2 s_{11} s_{22}\right) - \left(b_2 s_{11} + 2b_1 s_{12}\right)^2 = 4b_1^2\left(s_{11}s_{22} - s_{12}^2\right) - b_2^2 s_{11}^2 \\ &= 4b_1^2 \det(S) - b_2^2 s_{11}^2. \end{aligned}$$

Dus volg dat $\det(H) \geq 0$ as en slegs as

$$b_2^2 s_{11}^2 \leq 4b_1^2 \det(S). \tag{7.7}$$

Dit wys $\overline{\mathbb{S}}(B)$ is soos in (7.6).

Aangesien die diagonaalinskrywings van 'n positief semi-definiete matriks nie-negatief is, sien ons geval (I) is waar. Vir geval (II), laat $H = [h_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2}$. Aangesien uit $\det(H) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \geq 0$ volg dat $h_{11}h_{22} \geq 0$, sien ons dat $h_{11} > 0$ impliseer $\mathrm{tr}(H) = h_{11} + h_{22} \geq 0$. Gevolglik is geval (II) waar. Ons weet in die geval waar $b_1, s_{11} \neq 0$ volg $b_1 s_{11} > 0$ uit geval (I). Ons sien uit (7.7) dat $\det(S) \geq 0$. Dus, as $s_{11} = 0$ dan ook $s_{12} = 0$. Dan volg $H \in \overline{\mathbb{P}}_2$ as en slegs as $b_1 s_{22} \geq 0$, met $b_1 s_{22} = 0$ slegs in die geval waar $S = 0_{2\times 2}$. Hieruit sien ons dat geval (III) waar is. □

Proposisie 7.11. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Bewys. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Ons weet uit Stelling 4.17 dat vir $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ volg

$$B \in \mathcal{T}_{+,2} \cap \mathbb{R}^{2\times 2}. \quad \text{Dus} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \quad \text{met} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Aangesien $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$, weet ons B het reguliere inersie en dus $b_1 \neq 0$. Herskryf B as

$$B = \frac{b_1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda & \frac{\lambda b_2}{b_1} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ons gebruik Lemma 7.10 om vanuit $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ te sien dat vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ volg

$$\begin{gathered} s_{11}^2 \leq 4\lambda^2 \det(S) \quad \text{en} \quad b_2^2 s_{11}^2 \leq 4b_1^2 \det(S), \quad \text{asook} \\ \lambda s_{11}, b_1 s_{11} > 0 \quad \text{in die geval waar} \quad s_{11} \neq 0, \quad \text{of andersins} \quad \lambda s_{22}, b_1 s_{22} > 0. \end{gathered} \tag{7.8}$$

Ons sien dus uit bostaande dat b_1 en λ dieselfde teken het en gevolglik dat $\frac{b_1}{\lambda} > 0$. Kies $s_{11} \neq 0$, s_{22} en s_{12} só dat $\frac{s_{11}^2}{\lambda^2} = 4\det(S)$. Dan volg uit (7.8) dat

$$\frac{b_2^2 s_{11}^2}{b_1^2} \leq 4\det(S) = \frac{s_{11}^2}{\lambda^2}, \quad \text{oftewel} \quad \frac{\lambda^2 b_2^2}{b_1^2} \leq 1.$$

Hieruit kry ons

$$\left| \frac{\lambda b_2}{b_1} \right| \leq 1$$

en dus volg uit Lemma 7.9 dat $B \in \mathscr{C}(A)$. Gevolglik weet ons $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$. □

7.4 Geval III: Twee reële eiewaardes in dieselfde halfvlak

In hierdie afdeling bewys ons Stelling 7.4 vir $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ met $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ en $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Daar ontstaan twee moontlikhede, naamlik $\lambda_1\lambda_2 > 0$ of $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Wanneer ons na die geval $\lambda_1\lambda_2 > 0$ kyk, neem ons $\lambda_1 < \lambda_2$. Vir die geval waar $\lambda_2 < \lambda_1$ kan λ_1 en λ_2 net omgeruil word in die resultate en bewyse.

Soortgelyk, vir die geval waar $\lambda_1\lambda_2 < 0$ neem ons $\lambda_1 > -\lambda_2$. Vir die geval waar $\lambda_1 < -\lambda_2$ kan λ_1 en λ_2 net omgeruil word in die resultate en bewyse.

Lemma 7.12. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, met $\lambda_1\lambda_2 > 0$ en $\lambda_1 < \lambda_2$, volg*

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\ \alpha, \beta \in [\lambda_1, \lambda_2],\ \alpha + \beta = \lambda_1 + \lambda_2 \right\}.$$

Bewys. Aangesien A Lyapunov regulier is, weet ons $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Dus bestaan A^{-1} en word gegee deur $A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\operatorname{diag}(\lambda_2, \lambda_1)$. Dit volg dat $A_0^{-1} := \lambda_1\lambda_2 A^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_2, \lambda_1) \in \mathscr{C}(A)$. Hieruit weet ons $D = \tau\left(\epsilon A + \delta A_0^{-1}\right) \in \mathscr{C}(A)$ vir enige $\tau, \epsilon, \delta \geq 0$ met $\epsilon + \delta = 1$. Ons sien dat

$$D = \tau\left(\epsilon\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \tau\begin{bmatrix} \epsilon\lambda_1 + \delta\lambda_2 & 0 \\ 0 & \epsilon\lambda_2 + \delta\lambda_1 \end{bmatrix} = \tau\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$
$$\text{met} \quad \alpha := \epsilon\lambda_1 + \delta\lambda_2 \quad \text{en} \quad \beta := \epsilon\lambda_2 + \delta\lambda_1.$$

Verder volg $\alpha + \beta = \epsilon(\lambda_1 + \lambda_2) + \delta(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$. Aangesien $\lambda_1 < \lambda_2$ volg $\alpha, \beta \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Definieer nou

$$\mathscr{D} := \left\{ \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\ \alpha, \beta \in [\lambda_1, \lambda_2],\ \alpha + \beta = \lambda_1 + \lambda_2 \right\}.$$

Dit is duidelik dat $A \in \mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}(A)$. Ons bewys $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A)$ deur te wys $\mathscr{D}$ is 'n **kik**. Aangesien $\mathscr{C}(A)$ die kleinste **kik** is wat A bevat, sal dan volg dat $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{D}$.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote onder optelling is, neem $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ waar

$$D_1 = \tau_1\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \tau_2\begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tau_i \geq 0, \quad \alpha_i, \beta_i \in [\lambda_1, \lambda_2] \quad \text{en}$$
$$\alpha_i + \beta_i = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \text{vir} \quad i = 1, 2.$$

Dan,

$$D_1 + D_2 = \begin{bmatrix} \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 & 0 \\ 0 & \tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2 \end{bmatrix} = (\tau_1 + \tau_2)\begin{bmatrix} \frac{\tau_1\alpha_1+\tau_2\alpha_2}{\tau_1+\tau_2} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_1\beta_1+\tau_2\beta_2}{\tau_1+\tau_2} \end{bmatrix}.$$

Dit volg dat $\tau := \tau_1 + \tau_2 \geq 0$ en $\alpha := \frac{\tau_1\alpha_1+\tau_2\alpha_2}{\tau_1+\tau_2}, \beta := \frac{\tau_1\beta_1+\tau_2\beta_2}{\tau_1+\tau_2} \in [\lambda_1, \lambda_2]$, aangesien $\alpha_i, \beta_i \in [\lambda_1, \lambda_2]$, vir $i = 1, 2$. Hieruit volg

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \frac{\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\tau_1(\alpha_1 + \beta_1) + \tau_2(\alpha_2 + \beta_2)}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\tau_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \tau_2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\tau_1 + \tau_2} \\ &= \lambda_1 + \lambda_2.\end{aligned}$$

Dus, $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$ en gevolglik is bewys dat $\mathscr{D}$ geslote is onder optelling.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote is onder nie-negatiewe skaling, neem $D \in \mathscr{D}$ en $\phi \geq 0$, dan

$$\phi D = \phi\tau\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\phi\tau \geq 0$, volg $\phi D \in \mathscr{D}$ en hiermee is bewys dat $\mathscr{D}$ geslote is onder nie-negatiewe skaling.

Laastens wys ons dat $\mathscr{D}$ geslote is onder die neem van inverses deur vir 'n nie-singuliere $D \in \mathscr{D}$, D^{-1} te bereken en te wys $D^{-1} \in \mathscr{D}$. Laat

$$D = \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \text{waar} \quad \tau > 0, \quad \alpha, \beta \in [\lambda_1, \lambda_2] \quad \text{en} \quad \alpha + \beta = \lambda_1 + \lambda_2.$$

$$\text{Dan volg,} \quad D^{-1} = \frac{1}{\tau\alpha\beta} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\lambda_1\lambda_2 > 0$ en $\alpha, \beta \in [\lambda_1, \lambda_2]$, volg $\alpha\beta > 0$ en dus ook $\frac{1}{\tau\alpha\beta} > 0$. Hieruit volg $D^{-1} \in \mathscr{D}$. Gevolglik weet ons $\mathscr{D}$ is geslote onder die neem van inverses. Hiermee is bewys dat $\mathscr{D}$ 'n **kik** is en dus $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A)$. □

Lemma 7.13. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, met $\lambda_1\lambda_2 < 0$ en $\lambda_1 > -\lambda_2$, volg*

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\ \alpha \in [-\lambda_2, \lambda_1],\ \beta \in [-\lambda_1, \lambda_2],\ \alpha - \beta = \lambda_1 - \lambda_2 \right\}.$$

Bewys. Aangesien A Lyapunov regulier is, weet ons $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Dus bestaan A^{-1} en word gegee deur $A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \operatorname{diag}(\lambda_2, \lambda_1)$. Dit volg dat $A_0^{-1} := -\lambda_1\lambda_2 A^{-1} = \operatorname{diag}(-\lambda_2, -\lambda_1) \in \mathscr{C}(A)$. Hieruit weet ons $D = \tau\left(\epsilon A + \delta A_0^{-1}\right) \in \mathscr{C}(A)$ vir enige $\tau, \epsilon, \delta \geq 0$ met $\epsilon + \delta = 1$. Ons sien dat

$$D = \tau \left(\epsilon \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \right) = \tau \begin{bmatrix} \epsilon\lambda_1 - \delta\lambda_2 & 0 \\ 0 & \epsilon\lambda_2 - \delta\lambda_1 \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$
$$\text{met} \quad \alpha := \epsilon\lambda_1 - \delta\lambda_2 \quad \text{en} \quad \beta := \epsilon\lambda_2 - \delta\lambda_1.$$

Verder volg $\pm(\alpha - \beta) = \pm(\epsilon(\lambda_1 - \lambda_2) + \delta(\lambda_1 - \lambda_2)) = \pm((\lambda_1 - \lambda_2))$. Aangesien $\lambda_1 > -\lambda_2$, volg $\alpha \in [-\lambda_2, \lambda_1]$ en $\beta \in [-\lambda_1, \lambda_2]$. Definieer nou

$$\mathscr{D} := \left\{ \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} : \tau \geq 0,\ \alpha \in [-\lambda_2, \lambda_1],\ \beta \in [-\lambda_1, \lambda_2],\ \alpha - \beta = \lambda_1 - \lambda_2 \right\}.$$

Dit is duidelik dat $A \in \mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}(A)$. Ons bewys $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A)$ deur te wys $\mathscr{D}$ is 'n **kik**. Aangesien $\mathscr{C}(A)$ die kleinste **kik** is wat A bevat, sal dan volg dat $\mathscr{C}(A) \subseteq \mathscr{D}$.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote onder optelling is, neem $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ waar

$$D_1 = \tau_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D_2 = \tau_2 \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \text{met} \quad \tau_i \geq 0, \quad \alpha_i \in [-\lambda_2, \lambda_1], \quad \beta_i \in [-\lambda_1, \lambda_2] \quad \text{en}$$
$$\alpha_i - \beta_i = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \text{vir} \quad i = 1, 2.$$

Dan,

$$D_1 + D_2 = \begin{bmatrix} (\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2) & 0 \\ 0 & (\tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2) \end{bmatrix} = (\tau_1 + \tau_2) \begin{bmatrix} \frac{\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2}{\tau_1 + \tau_2} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2}{\tau_1 + \tau_2} \end{bmatrix}.$$

Dit volg dat $\tau := \tau_1 + \tau_2 \geq 0$, asook $\alpha := \frac{\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2}{\tau_1 + \tau_2} \in [-\lambda_2, \lambda_1]$ en $\beta := \frac{\tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2}{\tau_1 + \tau_2} \in [-\lambda_1, \lambda_2]$, aangesien $\alpha_i \in [-\lambda_2, \lambda_1]$, $\beta_i \in [-\lambda_1, \lambda_2]$, vir $i = 1, 2$. Dus volg dat $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$ indien $\alpha - \beta =$

$\lambda_2 - \lambda_1$. Hierdie verlangde gelykheid volg uit

$$\alpha - \beta = \frac{\tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{\tau_1\beta_1 + \tau_2\beta_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\tau_1(\alpha_1 - \beta_1) + \tau_2(\alpha_2 - \beta_2)}{\tau_1 + \tau_2}$$
$$= \frac{\tau_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \tau_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tau_1 + \tau_2} = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Hieruit sien ons dat $\mathscr{D}$ geslote is onder optelling.

Om te sien dat $\mathscr{D}$ geslote onder nie-negatiewe skaling is, neem $D \in \mathscr{D}$ en $\phi \geq 0$, dan

$$\phi D = \phi\tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Aangesien $\phi\tau \geq 0$, volg $\phi D \in \mathscr{D}$ en hiermee is bewys dat $\mathscr{D}$ geslote is onder nie-negatiewe skaling.

Laastens wys ons dat $\mathscr{D}$ geslote is onder die neem van inverses deur vir 'n nie-singuliere $D \in \mathscr{D}$, D^{-1} te bereken en te wys $D^{-1} \in \mathscr{D}$. Laat

$$D = \tau \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \text{waar} \quad \tau > 0, \quad \alpha \in [-\lambda_2, \lambda_1], \quad \beta \in [-\lambda_1, \lambda_2], \quad \text{en} \quad \alpha - \beta = \lambda_1 - \lambda_2.$$

$$\text{Dan volg,} \quad D^{-1} = \frac{1}{\tau\alpha\beta} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

In die geval waar $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 < 0$, volg $\alpha > 0$ en $\beta < 0$. In die geval waar $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 > 0$, volg $\alpha < 0$ en $\beta > 0$. Dus in beide gevalle volg $\tilde{\tau} = \frac{-1}{\tau\alpha\beta} > 0$. Dan,

$$D^{-1} = \tilde{\tau} \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Aangesien $-\beta - (-\alpha) = -\beta + \alpha = \alpha - \beta = \lambda_1 - \lambda_2$ en $-\beta \in [-\lambda_2, \lambda_1]$ asook $-\alpha \in [-\lambda_1, \lambda_2]$, volg $D^{-1} \in \mathscr{D}$. Gevolglik is $\mathscr{D}$ geslote onder die neem van inverses en daarmee is bewys dat $\mathscr{D}$ 'n **kik** is. Dus, $\mathscr{D} = \mathscr{C}(A)$. $\square$

Lemma 7.14. *Vir $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2)$, volg*

$$\overline{\mathbb{S}}(B) = \left\{ S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2 : \left(b_1^2 + b_2^2\right) s_{12}^2 \leq b_1 b_2 \left(4 s_{11} s_{22} - 2 s_{12}^2\right) \;\; en \;\; b_1 s_{11} + b_2 s_{22} \geq 0 \right\}. \quad (7.9)$$

Vir $S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2$ geld:

(I) As $S \in \overline{\mathbb{S}}(B)$, dan $b_1 s_{11} \geq 0$ en $b_2 s_{22} \geq 0$.

(II) As $b_1 s_{11} > 0$, dan $S \in \overline{\mathbb{S}}(B)$ as en slegs as $\left(b_1^2 + b_2^2\right) s_{12}^2 \leq b_1 b_2 \left(4 s_{11} s_{22} - 2 s_{12}^2\right)$.

(III) As $S \neq 0_{2\times 2}$, dan volg $b_1 s_{11} > 0$ of $b_2 s_{22} > 0$ in beide gevalle waar $b_1 b_2 > 0$ of $b_1 b_2 < 0$.

Bewys. Neem $S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \mathbb{S}_2$. Dan volg

$$H := SB + B^H S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}b_1 & s_{12}b_2 \\ s_{12}b_1 & s_{22}b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 s_{11} & b_1 s_{12} \\ b_2 s_{12} & b_2 s_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2b_1 s_{11} & (b_1 + b_2)s_{12} \\ (b_1 + b_2)s_{12} & 2b_2 s_{22} \end{bmatrix} \in \overline{\mathbb{P}}_2$$

as en slegs as $\mathrm{tr}(H), \det(H) \geq 0$. Ons sien dat $\mathrm{tr}(H) = 2\,(b_1 s_{11} + b_2 s_{22})$ en

$$\begin{aligned}\det(H) &= 4b_1b_2s_{11}s_{22} - (b_1+b_2)^2\, s_{12}^2 = 4b_1b_2s_{11}s_{22} - \left(b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2\right) s_{12}^2 \\ &= b_1b_2\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right) - \left(b_1^2 + b_2^2\right) s_{12}^2.\end{aligned}$$

Dus volg dat $\det(H) \geq 0$ as en slegs as

$$\left(b_1^2 + b_2^2\right) s_{12}^2 \leq b_1b_2\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right). \tag{7.10}$$

Dit wys $\overline{\mathbb{S}}(B)$ is soos in (7.9).

Die bewys vir geval (I) en (II) volg soos in Lemma 7.10. In die geval waar $s_{11} \neq 0$ volg $b_1 s_{11} > 0$ uit geval (I). Verder volg uit (7.10) in die geval waar $b_1 b_2 > 0$, dat $2s_{11}s_{22} - s_{12}^2 \geq 0$. Dus as $s_{11} = 0$ dan ook $s_{12} = 0$. Dan volg $SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_2$ as en slegs as $b_2 s_{22} \geq 0$, met $b_2 s_{22} = 0$ slegs in die geval waar $S = 0_{2\times 2}$. Soortgelyk volg uit (7.10) in die geval waar $b_1 b_2 < 0$ dat $2s_{11}s_{22} - s_{12}^2 \leq 0$. As $s_{11} = 0$ volg $SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_2$ as en slegs as $0 \leq \mathrm{tr}(SB + B^H S) = 2b_2 s_{22}$ en

$$0 \leq \det(SB + B^H S) = -s_{12}^2\,(b_1 + b_2)^2.$$

Aangesien bogenoemde determinant voorwaarde nie moontlik is nie, weet ons as $s_{11} = 0$ dan ook $s_{12} = 0$. Hieruit sien ons dat in die geval waar $s_{11} = 0$ volg $SB + B^H S \in \overline{\mathbb{P}}_2$ as en slegs as $b_2 s_{22} \geq 0$, met $b_2 s_{22} = 0$ slegs in die geval waar $S = 0_{2\times 2}$. Hieruit sien ons dat geval (III) waar is. □

Proposisie 7.15. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, met $\lambda_1\lambda_2 > 0$ en $\lambda_1 > \lambda_2$, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Bewys. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Ons weet uit Stelling 4.17 dat vir $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ volg $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2)$.

Aangesien $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$, weet ons B het reguliere inersie en dus $b_i \neq 0$, vir $i = 1, 2$. Ons gebruik Lemma 7.14 om uit $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ te sien dat vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ volg

$$\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) s_{12}^2 \leq \lambda_1\lambda_2\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right), \quad \text{met} \quad \lambda_1 s_{11} > 0 \quad \text{in die geval waar} \quad s_{11} \neq 0, \quad \text{of andersins} \quad \lambda_2 s_{22} > 0, \tag{7.11}$$

asook

$$\left(b_1^2 + b_2^2\right) s_{12}^2 \leq b_1b_2\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right), \quad \text{met} \quad b_1 s_{11} > 0 \quad \text{in die geval waar} \quad s_{11} \neq 0, \quad \text{of andersins} \quad b_2 s_{22} > 0. \tag{7.12}$$

Ons sien uit (7.11) dat $(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2) \geq 0$, aangesien $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Kies 'n $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ waar $s_{12} \neq 0$. Dan volg uit (7.11) dat $(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2) > 0$ en uit (7.12) dat $b_1 b_2 > 0$. Hieruit volg dan $\eta := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{b_1 + b_2} > 0$. Aangesien ons uit Lemma 5.13 weet $\overline{\mathbb{S}}(\eta B) = \overline{\mathbb{S}}(B)$ en uit Lemma 4.3 weet $\eta B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$, volg $\eta B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$, met $\mathrm{tr}(\eta B) = \lambda_1 + \lambda_2$. Ons kan dus vir $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$ eis dat $\mathrm{tr}(B) = b_1 + b_2 = \lambda_1 + \lambda_2$. As ons kan wys $b_1, b_2 \in [\lambda_1, \lambda_2]$, dan volg $B \in \mathscr{C}(A)$, soos gesien uit Lemma 7.12.

Kies nou s_{11}, s_{22} en $s_{12} \neq 0$ só dat $s_{12}^2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right)$. Laat $b_1 := \lambda_1 + \rho$ en $b_2 := \lambda_2 - \rho$, met $\rho \in \mathbb{R}$. Dit sal volg dat $b_1, b_2 \in [\lambda_1, \lambda_2]$ as $\rho \in [0, \lambda_2 - \lambda_1]$. Nou volg uit (7.12) dat

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right) = s_{12}^2 \leq \frac{b_1b_2}{\left(b_1^2+b_2^2\right)}\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right). \quad \text{Dus} \quad \frac{b_1b_2}{b_1^2+b_2^2} \geq \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}.$$

$$\text{Hieruit volg} \quad \frac{(b_1+b_2)^2}{b_1^2+b_2^2} = 1 + 2\frac{b_1b_2}{b_1^2+b_2^2} \geq 1 + 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}, \quad \text{oftewel}$$

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{b_1^2+b_2^2} \geq \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}. \quad \text{Dus volg} \quad b_1^2+b_2^2 \leq \lambda_1^2+\lambda_2^2, \quad \text{wat impliseer dat}$$

$$\begin{aligned} b_1^2+b_2^2 &= (\lambda_1+\rho)^2 + (\lambda_2-\rho)^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+2\rho^2+2\rho\lambda_1-2\rho\lambda_2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+2\rho(\rho-(\lambda_2-\lambda_1)) \\ &\leq \lambda_1^2+\lambda_2^2. \end{aligned}$$

Uit laasgenoemde ongelykheid volg dat $\rho(\rho-(\lambda_2-\lambda_1)) \leq 0$. As $\rho \leq 0$, dan $\rho-(\lambda_2-\lambda_1) \geq 0$ oftewel $\rho \geq (\lambda_2-\lambda_1) > 0$. Hierdie geval is dus nie moontlik nie, daarom moet $\rho \geq 0$. Dan, $\rho-(\lambda_2-\lambda_1) \leq 0$ oftewel $\rho \leq (\lambda_2-\lambda_1)$. Dus $\rho \in [0, \lambda_2-\lambda_1]$. Hiermee is bewys dat $B \in \mathscr{C}(A)$ en gevolglik weet ons $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(A)$. □

Proposisie 7.16. *Vir 'n Lyapunov reguliere matriks $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, waar $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, met $\lambda_1\lambda_2 < 0$ en $\lambda_1 > -\lambda_2$, volg $\mathscr{C}(A) = \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$.*

Bewys. Neem $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. Ons weet uit Stelling 4.17 dat vir $B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$ volg $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2)$.

Aangesien $B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$, weet ons B het reguliere inersie en dus $b_i \neq 0$, vir $i = 1, 2$. Ons gebruik Lemma 7.14 om uit $\overline{\mathbb{S}}(A) \subseteq \overline{\mathbb{S}}(B)$ te sien dat vir $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ volg

$$\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)s_{12}^2 \leq \lambda_1\lambda_2\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right), \quad \text{met} \quad \lambda_1 s_{11} > 0 \quad \text{in die geval waar} \quad s_{11} \neq 0 \quad \text{of andersins} \quad \lambda_2 s_{22} > 0, \tag{7.13}$$

asook

$$\left(b_1^2+b_2^2\right)s_{12}^2 \leq b_1b_2\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right), \quad \text{met} \quad b_1 s_{11} > 0 \quad \text{in die geval waar} \quad s_{11} \neq 0 \quad \text{of andersins} \quad b_2 s_{22} > 0. \tag{7.14}$$

Ons sien uit (7.13) dat $(4s_{11}s_{22}-2s_{12}^2) \leq 0$, aangesien $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Kies 'n $0_{2\times 2} \neq S = [s_{ij}]_{i=1,2}^{j=1,2} \in \overline{\mathbb{S}}(A)$ waar $s_{12} \neq 0$. Dan volg uit (7.13) dat $(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2) < 0$ en uit (7.14) dat $b_1b_2 < 0$.

Veronderstel $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 < 0$. Dan volg $b_1 > 0$ in die geval waar $s_{11} \neq 0$ en dus ook $b_2 < 0$. Indien $s_{11} = 0$ volg $b_2 < 0$ en dus ook $b_1 > 0$. Dus volg in beide gevalle dat $b_1 - b_2 > 0$. Verder volg ook $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$. Dus, $\eta := \frac{\lambda_1-\lambda_2}{b_1-b_2} > 0$.

Veronderstel volgende $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 > 0$. Dan volg op 'n soortgelyke wyse as hierbo dat $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ en $b_2 - b_1 > 0$. Dus ook in hierdie geval volg $\eta = \frac{-(\lambda_1-\lambda_2)}{-(b_1-b_2)} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{b_2-b_1} > 0$.

Aangesien ons uit Lemma 5.13 weet $\overline{\mathbb{S}}(\eta B) = \overline{\mathbb{S}}(B)$ en uit Lemma 4.3 weet $\eta B \in \{A\}''_{\mathbb{R}}$, volg $\eta B \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$, waar $\eta b_1 - \eta b_2 = \lambda_1 - \lambda_2$ of $\eta b_2 - \eta b_1 = \lambda_2 - \lambda_1$. Ons kan dus eis dat $\pm(b_1 - b_2) = \pm(\lambda_1 - \lambda_2)$ vir $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2) \in \mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A) \cap \{A\}''_{\mathbb{R}}$. As ons kan wys dat $b_1 \in [-\lambda_2, \lambda_1]$ en $b_2 \in [-\lambda_1, \lambda_2]$, dan volg $B \in \mathscr{C}(A)$, vir beide gevalle, soos gesien uit Lemma 7.13.

Kies nou s_{11}, s_{22} en $s_{12} \neq 0$ só dat $s_{12}^2 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left(4s_{11}s_{22} - 2s_{12}^2\right)$. Laat $b_1 := \lambda_1 + \rho$ en $b_2 := \lambda_2 + \rho$. Dit sal volg dat $b_1 \in [-\lambda_2, \lambda_1]$ en $b_2 \in [-\lambda_1, \lambda_2]$, as $\rho \in [-\lambda_1 - \lambda_2, 0] = [-\lambda_2 - \lambda_1, 0]$. Nou volg uit

(7.14) dat

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\left(4s_{11}s_{22}-2s_{12}^2\right)=s_{12}^2\leq\frac{b_1b_2}{(b_1^2+b_2^2)}\left(4s_{11}s_{22}-2s_{12}^2\right). \quad \text{Dus} \quad \frac{b_1b_2}{b_1^2+b_2^2}\leq\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}.$$

$$\text{Hieruit volg} \quad \frac{(b_1-b_2)^2}{b_1^2+b_2^2}=1-2\frac{b_1b_2}{b_1^2+b_2^2}\geq 1-2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}, \quad \text{oftewel}$$

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{b_1^2+b_2^2}\geq\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}. \quad \text{Dus volg} \quad b_1^2+b_2^2\leq\lambda_1^2+\lambda_2^2, \quad \text{wat impliseer dat}$$

$$\begin{aligned} b_1^2+b_2^2 &= (\lambda_1+\rho)^2+(\lambda_2+\rho)^2=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+2\rho^2+2\rho\lambda_1+2\rho\lambda_2)=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+2\rho(\rho+(\lambda_1+\lambda_2))) \\ &\leq \lambda_1^2+\lambda_2^2. \end{aligned}$$

Uit laasgenoemde ongelykheid volg $\rho(\rho+(\lambda_1+\lambda_2))\leq 0$. As $\rho\geq 0$, dan $\rho+(\lambda_1+\lambda_2)\leq 0$ oftewel $\rho\leq(-\lambda_1-\lambda_2)<0$. Hierdie geval is dus nie moontlik, daarom moet $\rho\leq 0$. Dan, $\rho+(\lambda_1+\lambda_2)\geq 0$ oftewel $\rho\geq(-\lambda_1-\lambda_2)$. Dus $\rho\in[-\lambda_1-\lambda_2,0]$. Hiermee is bewys dat $B\in\mathscr{C}(A)$ en gevolglik weet ons $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)\cap\{A\}''_{\mathbb{R}}\subseteq\mathscr{C}(A)$. □

7.5 Notas

Die inligting aan die begin van die hoofstuk, voor ons Stelling 7.4 bewys, kom voor in [7] en [8]. Alhoewel Gevolg 7.2 in [8] verskyn, is Proposisie 7.1, waaruit Gevolg 7.2 volg, ons eie werk. Verder is die bewys van Stelling 7.4 vir elk van die afsonderlike 2×2 gevalle ook ons eie werk. Daar word wel in [7] gekyk na resultate rakende geval (I), onder andere na die versamelings $\mathbb{S}(A)$, $\mathscr{C}(A)$ en $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}(A)$.

Verwysings

[1] Aliprantis, Charalambos D.; Tourky, Rabee. *Cones and duality.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] Alpay, Daniel; Lewkowicz, Izchak. *Convex cones of generalized positive rational functions and the Nevanlinna-Pick interpolation.* Linear Algebra Appl. 438 (2013), no. 10, 3949-3966.

[3] Arov, Damir Z.; Dym, Harry. *J-contractive matrix valued functions and related topics.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[4] Bart, Harm; Gohberg, Israel; Kaashoek, Marinus A.; Ran, André C. M. *Factorization of matrix and operator functions: the state space method.* Operator Theory: Advances and Applications, 178. Linear Operators and Linear Systems. Birkhuser Verlag, Basel, 2008.

[5] Belevitch, V. *Classical network theory.* Holden-Day, San Francisco, Calif.-Cambridge-Amsterdam, 1968.

[6] Bhatia, Rajendra. *Matrix analysis.* Graduate Texts in Mathematics, 169. Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] Cohen, Nir; Lewkowicz, Izchak. *The Lyapunov order for real matrices.* Linear Algebra Appl. 430 (2009), no. 7, 1849-1866.

[8] Cohen, Nir; Lewkowicz, Izchak. *Convex invertible cones and positive real analytic functions.* Linear Algebra Appl. 425 (2007), no. 2-3, 797-813.

[9] Cohen, Nir; Lewkowicz, Izchak. *Convex invertible cones and the Lyapunov equation.* Linear Algebra Appl. 250 (1997), 105-131.

[10] Cohen, Nir; Lewkowicz, Izchak. *Convex invertible cones of state space systems.* Control Signals Systems, 10 (1997), no. 3, 265-286.

[11] Cullen, Charles G. *Matrices and linear transformations.* Addison-Wesley Publishing Co., 1966.

[12] Dym, Harry. *Linear Algebra in Action.* Graduate Studies in Mathematics, 78. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[13] Heij, Christiaan; Ran, André; van Schagen, Freek. *Introduction to mathematical systems theory.* Linear systems, identification and control. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[14] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Matrix analysis.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[15] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. *Topics in matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[16] Jacobson, Nathan. *Lectures in abstract algebra.* Vol. II. Linear algebra. D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto-New York-London, 1953.

[17] Lay, David C. *Linear Algebra and its Applications.* Forth edition. Pearson Education, Inc., USA, 2012.

[18] Vongpanitlerd, Sumeth; Anderson, Brian D. O. *Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach.* Dover Publications, Inc., New York, 2006.

[19] Youla, D. C.; Saito, M. *Interpolation with positive-real functions.* J. Franklin Inst. 284 (1967), 77-108.

[20] Zhang, Fuzhen. *Matrix Theory. Basic results and techniques.* Second edition. Universitext. Springer, New York, 2011.