HOOFSTUK 3

ONDERRIG EN LEER VAN FUNKSIES

3.1 INLEIDING

Die funksiekonsep speel 'n belangrike rol in wiskundekurrikula wêreldwyd en word ook as die belangrikste konsep in wiskunde beskou (O'Callaghan, 1998:23; Clement, 2001:745). In die Hersiene Nasionale Kurrikulumverklaringsdokument vir wiskunde word funksies so belangrik geag dat patrone, funksies en algebra deel van een van die leeruitkomste uitmaak wat leerders behoort te bereik (DoE, 2002:9). Hierdie leeruitkoms stel dit dat die leerder in staat behoort te wees om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik. In die algemeen word algebra gesien as die taal waarin verwantskappe tussen hoeveelhede uitgedruk word en vir die ondersoek van patrone (Van Dyke & Craine, 1997:616). In hierdie opsig staan die funksiekonsep sentraal tot leerders se vermoë om verwantskappe tussen veranderlikes te beskryf, asook om grafieke te interpreteer en te analiseer (Clement, 2001:745). Gegewe die belangrike rol wat funksies in die wiskundekurrikulum speel, is dit belangrik om die aard van voornemende onderwysers se kennis ten opsigte van funksies te ondersoek, aangesien dit ook uiteindelik 'n impak op hulle onderrigpraktyk gaan hê (Lloyd & Wilson, 1998:250). 'n Onderwyser se vakspesifieke kennis van funksies is van kardinale belang in die voorsiening van 'n positiewe leeromgewing (kyk 2.5.9.1) (Thomas, 2003:291; Sullivan & McDonough, 2002:249).

In hierdie hoofstuk word die funksiekonsep eers in die algemeen bespreek. Ondersoek word ook ingestel na prosedurele en konseptuele kennis van funksies. Daarna word verskillende teorieë ten opsigte van die ontwikkeling van die funksiekonsep bespreek, waaronder Sfard se hiërargiese model, die konsepbeeld en konsepdefinisie van Vinner, Sierpinska se teorie vir die ontwikkeling van die funksiekonsep, die proses-objekbeskouing van Dubinsky en Harel, en O'Callaghan se funksiemodel. Uiteindelik word daar vir die doel van hierdie navorsing 'n teoretiese raamwerk vir die konseptualisering van funksies wat in die empiriese studie gebruik gaan word, geformuleer.

3.2 Die funksiekonsep

Alhoewel die funksiekonsep sentraal staan in wiskunde (Ferrini-Mundy & Graham, 1991:629), is navorsers dit eens dat dit een van die moeilikste en mees komplekse konsepte vir leerders is (Sajka, 2003:229; Sierpinska, 1992:25; Selden & Selden, 1992:1). Verskeie redes vir die kompleksiteit van die funksiekonsep word deur Dreyfus en Eisenberg (1982:361) aangevoer:

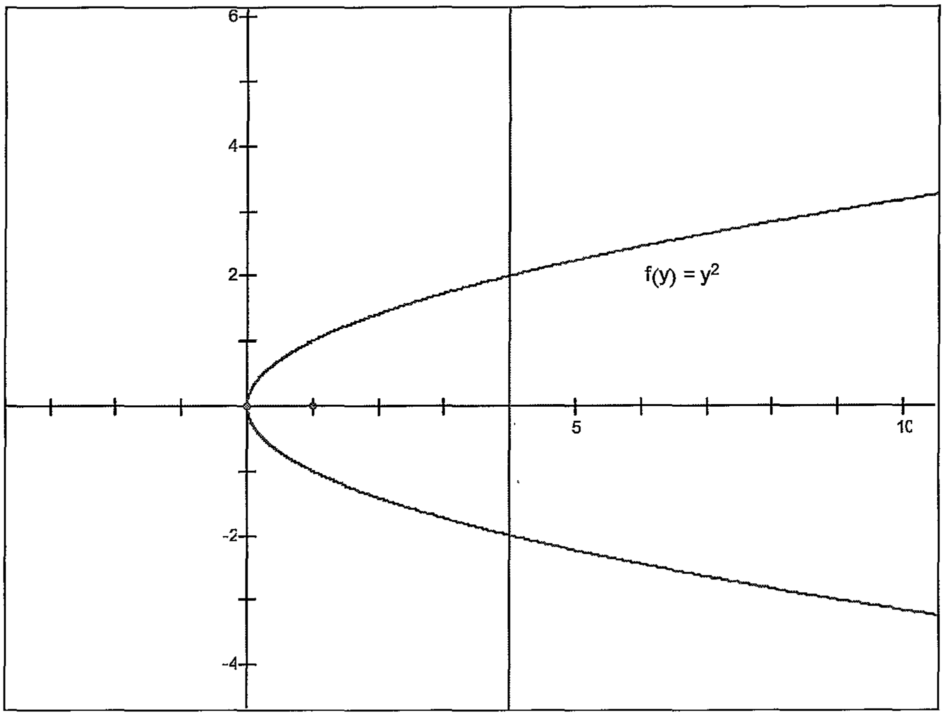
- Die funksiekonsep is nie 'n enkel-konsep op sigself nie, maar het verskeie subkonsepte wat daarmee geassosieer word, soos definisie- en waardeversameling, afbeelding, tempo van verandering, ensovoorts;
- Die funksiekonsep word gebruik om oënskynlik onverwante afdelings van wiskunde, soos meetkunde en algebra, saam te snoer;
- Dieselfde funksie kan op verskillende maniere voorgestel word, byvoorbeeld in tabelvorm, as 'n grafiek, as 'n formule, 'n verbale beskrywing en 'n diagram-afbeelding.

Ten spyte van die belangrike rol van die funksiekonsep het baie leerders nog 'n primitiewe begrip daarvan. Leerders beskou 'n funksie byvoorbeeld as 'n formule waarin hulle sekere waardes moet vervang (Breidenbach *et al.*, 1992:262). Die grafiese voorstelling van 'n funksie sonder 'n formule het geen betekenis vir die meeste leerders nie (Monk,1987, aangehaal deur Ferrini-Mundy & Graham, 1991:629). Aan die een kant slaag leerders nie daarin om die onderliggende ekwivalensie raak te sien wanneer dieselfde versameling koördinate deur 'n grafiek, vergelyking of 'n tabel voorgestel word nie. Aan die ander kant, wanneer aan leerders 'n algebraïese voorstelling vir 'n spesifieke funksie gegee word, slaag hulle nie daarin om algebraïese reëls te gebruik om 'n ekwivalente voorstelling te kry nie (Van Dyke & Craine, 1997:616). In beide gevalle sien hulle verandering in vorm as nie-verwante voorstellings (Thompson, 1994:23).

Funksies kan deur verskillende voorstellingsvorme uitgebeeld word, naamlik lewenswerklike situasies, vergelykings, tabelle, diagramme en grafieke. Leerders moet in staat wees om die verskillende voorstellings te interpreteer, maar ook om die nodige omskakelings tussen die verskillende voorstellingsvorme te maak (O'Callaghan, 1998:23). Volgens Schwarz en Dreyfus (1995:270) is hierdie omskakelingsvaardighede 'n voorvereiste vir die integrering van inligting ten opsigte van funksies in een enkele konseptuele beeld (kyk 3.4.2). Elke voorstellingsvorm verteenwoordig spesifieke aspekte van die funksiebegrip, maar is nie in staat om dit volledig te beskryf nie (Gagatsis & Shiakalli, 2004:648). Even (1998:105) beweer dat die vermoë om dieselfde konsep in verskillende vorme voor te stel en te identifiseer, asook die vermoë om van die een voorstellingsvorm na die ander oor te skakel, aan leerders die geleentheid bied om verwantskappe raak te sien, 'n beter konseptuele begrip te ontwikkel, en sodoende leerders se probleemoplossingsvermoë te verbeter.

Wiskundekonsepte en -prosesse kan aan visuele voorstellings gekoppel word (Dreyfus, 1990:119). Visualisering geskied in twee rigtings: die interpretasie en verstaan van die grafiese voorstellingsvorm van 'n funksie, asook die vermoë om inligting wat in simboliese vorm weergegee word, in visuele vorm om te skakel, byvoorbeeld om die tabelvorm grafies voor te stel. In 'n studie gedoen deur Dreyfus en Eisenberg (1981,1982) waarin hulle die intuïtiewe voorkeure vir die vorming van funksiekonsepte by leerders ondersoek het, is gevind dat die meer suksesvolle leerders 'n voorkeur vir die grafiese voorstellingsvorm van 'n funksie het, terwyl die minder suksesvolle leerders die tabelvorm verkies het (Kieran, 1992:409). In meer onlangse navorsing het Habre en Abboud (2006:57) ook gevind dat die algebraïese voorstelling van funksies by die meeste leerders voorkeur geniet.

Funksies word gewoonlik as 'n verwantskap tussen twee versamelings getalle gedefinieer wat elke getal in die eerste versameling aan 'n unieke getal in die tweede versameling koppel. Hierdie spesiale verwantskap word as 'n grafiek gekarakteriseer waar die vertikale lyn die grafiek in 'n enkele punt sny. As die vertikale lyn die grafiek op meer as een plek sny, dan is dit die grafiek van 'n willekeurige relasie en nie 'n funksie (kyk Fig 3.1). Baie leerders huldig die eng beskouing van funksies as grafieke wat die vertikale-lyn-toets slaag (Dossey *et al.*, 2002: 173-174).



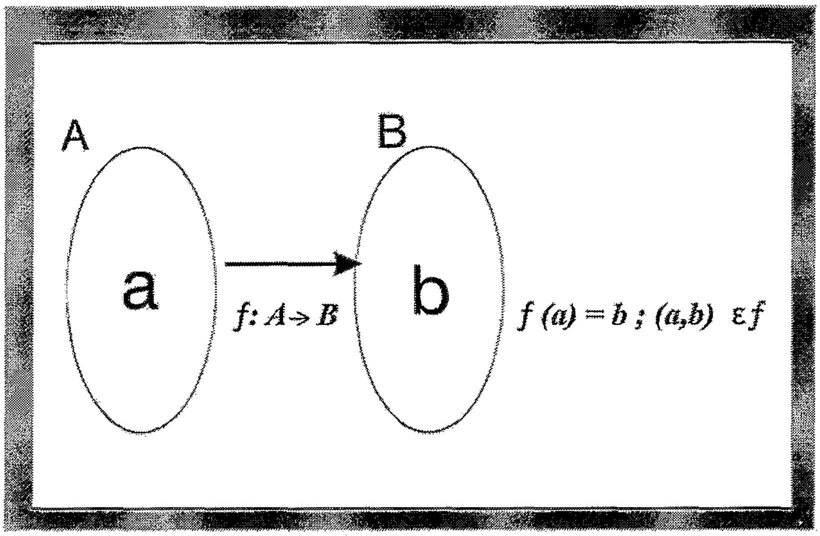
FIGUUR 3.1 : Illustrasie van die vertikale-lyn-toets

Verder sien leerders funksies in terme van die $f(x)$-notasie, terwyl dit nie die funksie is nie, maar slegs 'n simbool vir die waarde van die funksie in 'n punt x. Later kom hulle in aanraking met 'n meer abstrakte bespreking van funksies. Sulke besprekings sluit gewoonlik die som, verskil, produk, kwosiënt en samestelling van twee of meer funksies in. Die wyse waarop oor funksies gedink word, hoe funksies geïnterpreteer en bewerkings daarop uitgevoer word, vereis 'n sterk konseptuele begrip (Dossey *et al.*, 2002:173).

Die funksiekonsep het aanvanklik na vore gekom in 'n poging om die dinamika van beweging en hoeveelheid deur notasie vas te vang (Kleiner, 1989:283). Funksienotasie in terme van geordende pare het onlangs eers op die voorgrond getree (Dossey *et al.* 2002:174):

'n Funksie is 'n ooreenstemming van elemente in een versameling A, genoem die definisiegebied, met elemente in 'n ander versameling B, genoem die waardegebied, sodat

1. elke element in versameling A ooreenstem met 'n element in versameling B;
2. geen element in versameling A met meer as een element in versameling B ooreen stem nie (kyk Fig 3.2)



FIGUUR 3.2 Funksienotasie in terme van geordende pare

Alhoewel hierdie definisie wiskundig korrek is in terme van die ontwikkeling van die struktuur van abstrakte algebra en die daarstelling van stellings aangaande funksies, dra dit nie veel daartoe by om leerders te help om die onderliggende verwantskappe tussen onafhanklike en afhanklike veranderlikes raak te sien nie (Bednarz, Kieran & Lee, 1996:12). Freudenthal (1982, aangehaal deur Kieran, 1992:408) beklemtoon die aspek van afhanklikheid wanneer hy funksies karakteriseer: "Our world is not a calcified relational system but a realm of change, a realm of variable objects depending on each other; functions is a special kind of dependencies, that is, between variables which are distinguished as dependent and independent". Ongelukkig het die gedagte van afhanklikheid in die huidige definisie van 'n funksie verdwyn. In die meeste algebra-handboeke word 'n funksie gedefinieer as 'n relasie tussen elemente van twee versamelings.

Dit gebeur dikwels dat leerders oënskynlik die verwantskappe tussen vergelykings en grafieke verstaan, veral in take wat van hulle vereis om van die vergelykingsvorm na die grafiese vorm om te skakel. Werklike begrip van die verwantskap tussen die algebraïese en grafiese voorstelling is ten beste oppervlakkig. Leerders se antwoorde op vrae illustreer 'n oorweldigende vertroue in algebraïese oplossingsmetodes, dikwels ten koste van 'n eenvoudiger grafiese oplossingsmetode, waarvan hulle onbewus blyk te wees (Knuth, 2000:53).

3.3 Prosedurele en konseptuele kennis van funksies

Dit blyk dat leerders beperkte konseptuele kennis ten opsigte van funksies het; hulle konseptuele kennis is nie in lyn met prosedurele kennis nie, en hulle kan nie hulle kennis op probleemoplossingsituasies toepas nie (O'Callaghan, 1998:23; Hollar & Norwood, 1999:224).

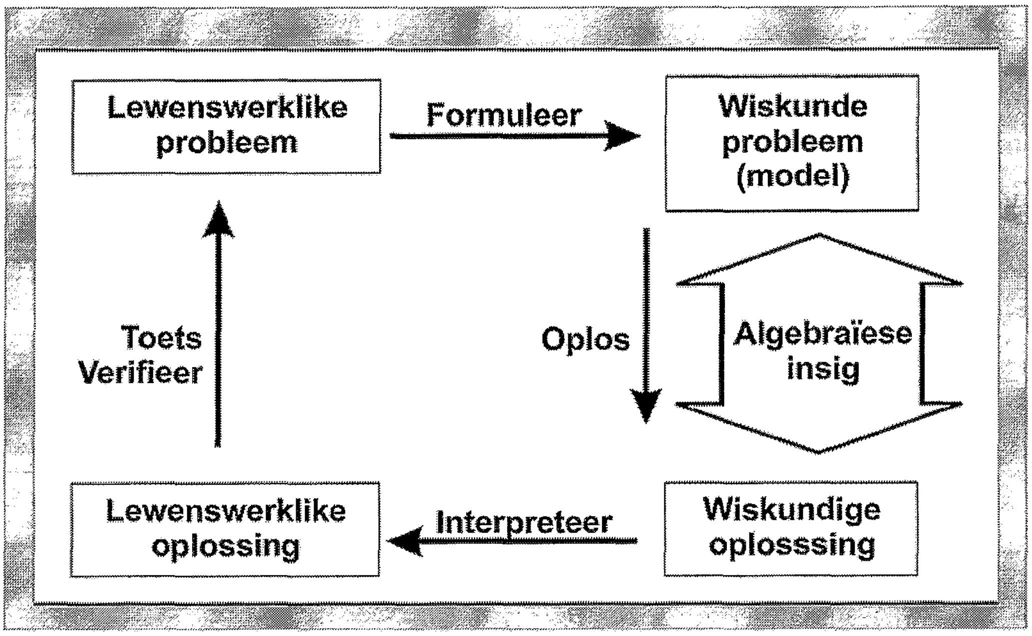
Konseptuele kennis ten opsigte van funksies word gekenmerk deur kennis wat ryk is aan verwantskappe (Hiebert & Lefevre, 1986:3-4) (kyk 2.4 en 2.5.5). Dit behels ook die vermoë om omskakelings tussen die verskillende voorstellingsvorme, naamlik die tabel, grafiese voorstelling, simboliese voorstelling, vergelyking en lewenswerklike situasie van 'n funksie te kan maak (O'Callaghan, 1998: 23). Prosedurele kennis, daarenteen, fokus op die aanleer van vaardighede (Davis, 2005: 36). Prosedurele kennis bestaan uit twee onderskeibare dele, naamlik die formele taal of voorstellingsvorm van wiskunde en die algoritmes of reëls vir die voltooiing van wiskundeprobleme (Hiebert & Lefevre, 1986:6). Binne die simboliese voorstelling van 'n funksie behels hierdie kennis die verstaan van reëls oor hoe om met simbole te werk en die prosedures waarvolgens vergelykings opgelos word.

Die voordeel daaraan verbonde dat leerders eers probleme binne 'n lewenswerklike konteks oplos voordat hulle aan prosedures blootgestel word, is dat hulle konseptuele kennis ontwikkel (Davis, 2005:37, 39). Indien leerders egter eers blootgestel word aan oefeninge waarin vaardighede ontwikkel word (prosedurele kennis), is daar sekere nadele wat daaruit voortspruit: eerstens kan leerders dink dat hierdie doeltreffende prosedures slegs gebruik kan word om probleme binne 'n abstrakte konteks op te los. Tweedens, as leerders slegs prosedurele kennis gebruik om vrae te beantwoord wat binne 'n abstrakte konteks gestel word, mag hulle dalk nie sinvolle strategieë gebruik om hierdie probleme op te los nie. Wanneer leerders byvoorbeeld gevra word om die vergelyking $x^3 - 2x^2 = -3x + 6$ op te los, sal hulle geneig wees om simboliese manipulasie te gebruik. Deur egter tegnologie te gebruik om die funksies $f(x)=x^3-2x^2$ en $g(x)=-3x+6$ grafies voor te stel kan leerders die snypunte van die twee funksies grafies bepaal, of selfs die waardes in 'n tabel ondersoek om die x-waarde te vind waarvoor $f(x)=g(x)$. In die derde plek mag leerders se prosedurele kennis vir die oplos van probleme geskei word van hulle konseptuele kennis. Leerders moet in staat wees om beide prosedurele en konseptuele kennis in die oplos van probleme te gebruik. Die aard van die aktiwiteite waarmee leerders gekonfronteer word, behoort hierdie twee soorte kennis te verbind. Leerders se werk in die oplos van vergelykings behoort aan lewenswerklike situasies, tabelle en grafieke gekoppel te word. Op hierdie manier groei hul kennis en begrip van funksies.

Ball en Stacey (2005:13) definieer *algebraïese insig* as die vermenging van konseptuele en prosedurele kennis, en Pierce en Stacey (2002:623) beskryf algebraïese insig as daardie kennis wat nodig is om 'n wiskundige oplossing vir 'n wiskundig geformuleerde probleem te kry. Leerders benodig algebraïese insig om probleme effektief op te los. Algebraïese insig bestaan uit:

- die erkenning van standaardgebruike, die identifisering van strukture en sleuteleienskappe soos die betekenis van simbole en die volgorde van bewerkings;
- die vermoë om verwantskappe tussen simboliese- en grafiese-, asook simboliese en numeriese voorstellings raak te sien.

Die probleemoplossingsmodel word soos volg deur Pierce en Stacey (2002: 622) voorgestel:



FIGUUR 3.3 : Probleemoplossingsmodel

Beginnende met 'n lewenswerklike probleem, is die eerste stap om dit as 'n wiskundeprobleem te formuleer. Hierdie stap behels om veranderlikes te identifiseer en vergelykings te formuleer om die verwantskappe tussen die veranderlikes algebraïes voor te stel. Die probleem word algebraïes opgelos en in terme van die lewenswerklike situasie geïnterpreteer. Die oplos van die probleem kan ook met behulp van dinamiese sagteware soos Geometer's Sketchpad® geskied (kyk 2.5.8).

3.4 Teorieë ten opsigte van die ontwikkeling van die funksiekonsep

In 3.2 is reeds melding gemaak van die kompleksiteit van die funksiekonsep. Daarmee saam is 'n omvangryke begrip van die funksiekonsep net so kompleks (Selden & Selden, 1992:1). In hierdie onderafdeling gaan ondersoek ingestel word na verskillende teorieë rakende die aanleer van die funksiekonsep.

Navorsers in wiskunde-onderwys is dit eens dat die moderne versameling-teoretiese definisie van 'n funksie, naamlik 'n funksie as 'n versameling geordende pare (kyk 3.2), wat dikwels deur handboeke en onderwysers gebruik word, te formeel en abstrak vir leerders is en dat hulle neig om hierdie definisie te vergeet of te ignoreer wanneer hulle besig is met die oplos van probleme (Tall & Vinner, 1981:153). Vinner en Dreyfus (1989) en Vinner (1992) onderskei tussen die *konsepbeeld* en die *konsepdefinisie* (kyk 3.4.2). Funksies as die verwantskap tussen veranderlikes is meer relevant en betekenisvol vir leerders aangesien hulle gebruik maak van hulle intuïtiewe funksiekonsep (Vinner & Dreyfus, 1989:365). Sfard (1992) beklemtoon leerders se behoefte aan 'n operasionele basis voordat leerders blootgestel word aan die strukturele beskouing van 'n funksie (kyk 3.4.1). Volgens Dubinsky en Harel (1992) kan funksies ook as prosesse en objekte beskou word (kyk 3.4.3). O'Callaghan (1998) stel 'n model voor waarvolgens leerders se konseptuele kennis ten opsigte van die funksiekonsep gekarakteriseer word (kyk 3.4.5).

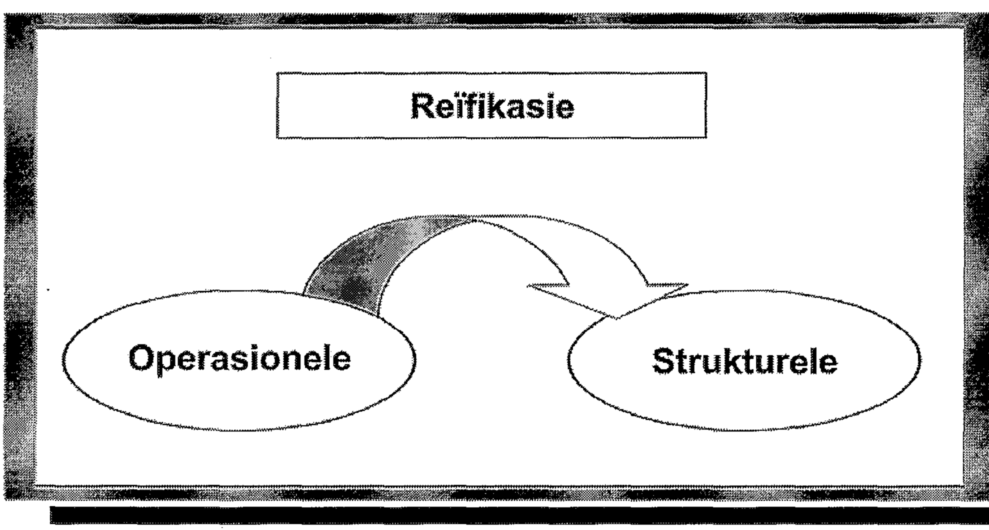
3.4.1 Die strukturele en operasionele beskouing van 'n funksie volgens Sfard

Een van die probleme in leerders se ontwikkeling van die funksiekonsep is die tweeledige aard daarvan. 'n Funksie kan op twee maniere beskou word: struktureel - as 'n objek, en operasioneel - as 'n proses (Sfard, 1992:59-60). Vanuit die strukturele oogpunt is 'n funksie 'n versameling geordende pare, en vanuit die operasionele oogpunt is dit 'n berekeningsproses of goed-gedefinieerde metode om van een voorstellingsvorm na 'n volgende te beweeg (Skemp, 1971:246). Hierdie twee maniere waarop funksies verstaan kan word, moet mekaar nie uitsluit nie, maar eerder aanvul om 'n samehangende eenheid te vorm. Gevolglik is die operasionele en strukturele beskouings van funksies, alhoewel oënskynlik onversoenbaar, in der waarheid aanvullend tot mekaar (Sfard, 1992:61). Aangesien dit blyk asof die strukturele definisie van 'n funksie meer abstrak is, behoort die strukturele benadering beskou te word as die meer gevorderde vlak van konsepontwikkeling (Sfard, 1991: 10).

Sfard (1991:18; 1992:64) voer aan dat die funksiekonsep eers operasioneel aangeleer word en die oorgang na die strukturele vorm (die wiskunde-objek) in drie fases geskied. Hierdie drie fases in konsepontwikkeling staan bekend as internalisering, kondensasie en reïfikasie. In die internaliseringsfase moet daar prosesse uitgevoer word op alreeds bekende (laer-vlak) wiskunde-objekte, wat dan sal lei tot die vorming van nuwe konsepte. In die geval van 'n funksie vind dit plaas wanneer die konsep "veranderlike" verstaan word en die vermoë aangeleer is om 'n formule te gebruik om waardes vir die afhanklike veranderlike te vind.

Die fase van kondensasie is 'n periode waartydens langdradige bewerkings na meer hanteerbare eenhede gekompakteer word (Sfard, 1991:19). Die leerder is in staat om oor die proses as 'n geheel te dink sonder om in detail te verval. Tydens hierdie fase word dit makliker om die proses met ander prosesse te kombineer, vergelykings te tref en veralgemenings te maak. Die fase van kondensasie sal manifesteer in die gemak waarmee daar tussen die verskillende voorstellingsvorme van funksies beweeg word, byvoorbeeld om met die translasie van 'n funksie te eksperimenteer sonder om na spesifieke waardes te kyk (Sfard, 1992:64). Uiteindelik kan die leerder funksies ondersoek, grafieke teken, funksies kombineer deur middel van samestelling van funksies en selfs die inverse van 'n funksie bereken. Hierdie fase duur voort solank as die nuwe entiteit aan 'n sekere proses gekoppel bly (Sfard, 1991:19).

Die laaste fase, reïfikasie, vind plaas wanneer die vermoë aangeleer is om hierdie nuwe entiteit as 'n objek in eie reg te sien (Sfard, 1992: 64; 1991:19, 20). Reïfikasie is die stadium waar die internalisering van hoër-orde-konsepte begin. In die geval van funksies manifesteer reïfikasie in die vaardigheid om vergelykings op te los waarin die onbekendes funksies is, en die vermoë om die algemene eienskappe van verskillende prosesse wat op funksies uitgevoer word, te kommunikeer. Reïfikasie verwys na die oorgang van die operasionele (proses-georïenteerde) na die strukturele (objekgeoriënteerde) beskouing van konsepontwikkeling (Sfard & Thompson, 1994: 24)(kyk Fig. 3.4).



FIGUUR 3.4 : Oorgang van die operasionele na die strukturele fase

Reïfikasie skakel die alreeds gekondenseerde proses om na 'n entiteit (Sfard, 1992:64). Met ander woorde, terwyl kondensasie 'n geleidelike, kwantitatiewe verandering is, moet reïfikasie verstaan word as 'n skielike kwalitatiewe sprong in die manier waarop na objekte gekyk word. Die feit dat 'n proses geïnternaliseer en gekondenseer is, beteken nie op sigself dat 'n leerder die vermoë aangeleer het om op 'n strukturele manier daaroor te dink nie. Sonder reïfikasie sal die benadering tot die proses suiwer operasioneel bly (Sfard, 1992:64).

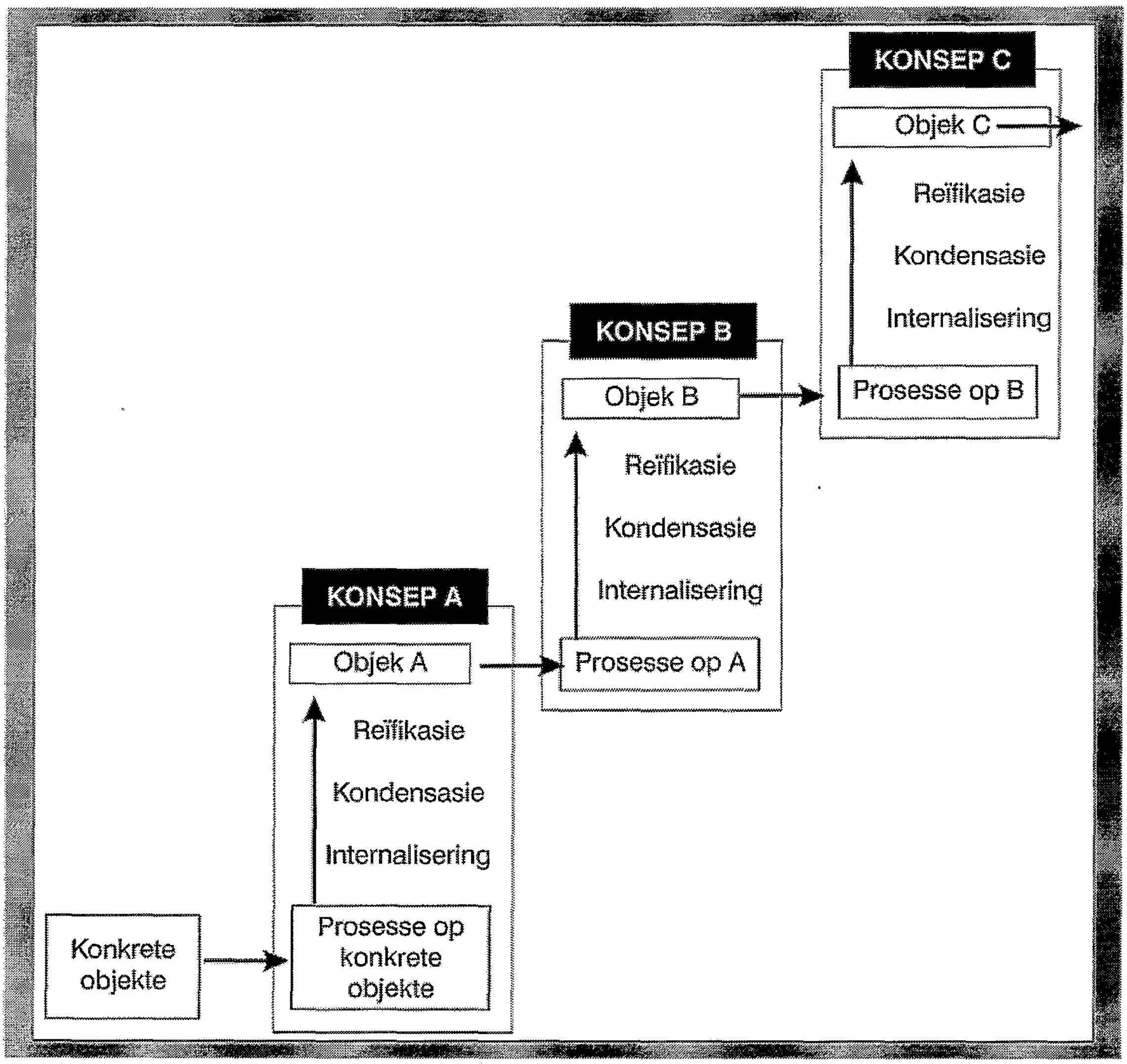
Die gedagte van reïfikasie word soos volg deur Thurston (2005:5) uitgelig:

> *Mathematics is amazingly compressible: you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics*

As hierdie "verdigting" (compression) geïnterpreteer word as reïfikasie, dan bevestig dit eerstens dat operasionele begrip die strukturele voorafgaan: leerders raak eers bekend met die wiskundige prosesse en kom dan by 'n strukturele begrip uit (Thompson & Sfard, 1994:25). Tweedens toon dit hoe voordelig reïfikasie is vir die leerder se verstaan van konsepte en vir die leerder se vermoë om dit te hanteer.

Verskeie studies toon aan dat reïfikasie moeilik is om te bereik (Sfard, 1992:83; Breidenbach *et al.*, 1992:254; Sfard & Linchevski, 1994:87). Die hoofrede vir hierdie inherente probleem is wat Sfard noem die "vicious circle"- 'n klaarblyklike diskrepansie tussen die twee voorwaardes wat nodig is vir die vorming van 'n nuwe wiskundekonsep. Aan die een kant moet reïfikasie enige sprake van hoër-orde-manipulasies voorafgaan. Om die waarheid te sê; solank as wat 'n laer-vlak-objek, (soos 'n funksie) nie beskikbaar is nie, kan die hoër-orde-prosesse (soos die kombinasie van funksies) nie uitgevoer word nie (Sfard & Thompson, 1994:25). Aan die ander kant; voordat 'n behoefte ontstaan om die laer-orde-prosesse (die berekeningsprosedure onderliggend aan die funksie) as wettige objekte te sien, mag dit die leerder aan motivering ontbreek vir die konstruksie van die nuwe ontasbare "iets". Die hoër-orde-prosesse is dus 'n voorwaarde vir 'n laer-orde-reïfikasie, en omgekeerd.

Hierdie drie-fase-skema moet verstaan word as 'n hiërargie, wat impliseer dat 'n volgende fase nie bereik kan word alvorens al die voorafgaande fases deurloop is nie. Die hiërargie begin met prosesse wat op alreeds bekende objekte uitgevoer word. Nadat die drie fases van internalisering, kondensasie en reïfikasie deurloop is, gee dit uiteindelik aanleiding tot die vorming van 'n nuwe objek, objek A. 'n Herhaling van hierdie drie fases word nou weer op objek A uitgevoer om 'n nuwe objek, objek B, die lig te laat sien. Prosesse word uiteindelik omgeskakel na kompakte, statiese eenhede om weer basis-eenhede vir 'n nuwe, hoër-vlak-konsep te word. Hierdie model impliseer dat sekere wiskundekonsepte as volledig ontwikkel beskou kan word slegs as dit beide operasioneel en struktureel begryp word (Sfard, 1991: 16, 23)(kyk Fig.3.5).



FIGUUR 3.5 : 'n Model vir konsepvorming

Wanneer wiskunde in geheel beskou word, kan dit as 'n hiërargie gesien word waarin die konsepte wat suiwer operasioneel op een vlak gevorm word, struktureel op 'n hoër vlak gevorm moet word. So 'n hiërargie kom na vore uit 'n reeks reïfikasies, waar elkeen begin waar die vorige een geëindig het. Sfard (1991:3) onderskei verder tussen die terme "konsep" en "beskouing" ("concept" en "conception"). Konsep verwys na die wiskundige idee in sy amptelike of formele vorm, terwyl die hele versameling interne voorstellings en assosiasies wat deur die konsep ontlok word, as 'n beskouing bekend staan.

3.4.2 Vinner se konsepdefinisie en konsepbeeld

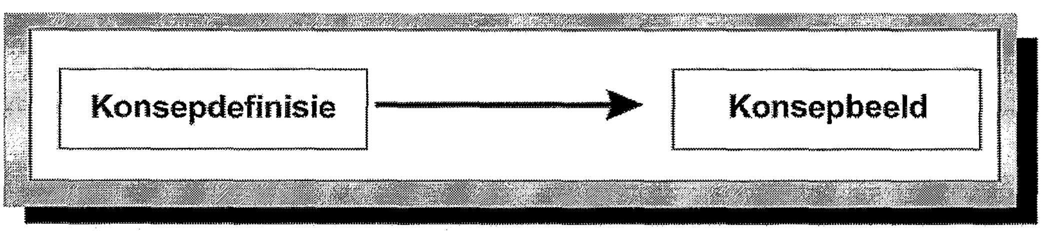
Definisies skep heel dikwels 'n probleem in die leer van funksies. Volgens Vinner (1992:196) verteenwoordig dit, meer as enigiets anders, die konflik tussen die struktuur van wiskunde en die kognitiewe prosesse van konsepverwerwing.

Vinner en Dreyfus (1989:356) en Vinner (1991:68; 1992: 196-197) onderskei tussen die begrippe *konsepbeeld* (nie-verbale entiteit) en *konsepdefinisie* (verbale entiteit). Alle wiskundekonsepte, behalwe die mees basiese en primitiewe, het formele definisies - die *konsepdefinisie*. Leerders kom op een of ander stadium in hulle hoërskooljare in aanraking met baie van hierdie definisies. Die leerder gebruik egter nie noodwendig hierdie definisie om te besluit wanneer 'n gegewe wiskunde-objek 'n voorbeeld of 'n teenvoorbeeld van die konsep is nie. In die meeste gevalle besluit die leerder op grond van 'n *konsepbeeld*. Die konsepbeeld is die versameling van al die geheue-voorstellings (mental pictures) wat 'n leerder met 'n gegewe konsep assosieer, tesame met al die eienskappe wat daardie konsep karakteriseer. Wat funksies betref, kan dit enige voorstellingsvorm, soos die grafiek, diagram of simboliese vorm wees. (Vinner & Dreyfus, 1989:356; Vinner,1992:197). Die leerder se geheue-voorstelling spruit voort uit sy ervarings met voorbeelde en teenvoorbeelde van daardie konsep. Dit beteken dat die versameling wiskunde-objekte wat deur die leerder as voorbeelde van die konsep beskou word, nie noodwendig dieselfde is as die versameling objekte wat deur die definisie bepaal word nie (kyk Fig. 3.6). As hierdie twee versamelings nie dieselfde is nie, mag die leerder se handeling verskil van wat die onderwyser verwag (Vinner & Dreyfus, 1989:356). Die visuele voorstellings, denkbeelde, indrukke en ervaringe wat met die konsepnaam geassosieer word, kan in verbale entiteite vertaal word. Hierdie verbale vorme is nie die eerste ding wat in die gedagte opgeroep word wanneer die konsepnaam gehoor of gesien word nie.

Ten einde 'n konsep aan te leer moet 'n konsepbeeld daarvan gevorm word. 'n Konsep word eers verstaan as die leerder 'n konsepbeeld daarvan het. Om die definisie van 'n konsep uit die kop te ken waarborg nie die verstaan van die konsep nie (Vinner, 1992:197). Leerders het alreeds op skoolvlak met algebra te doene gekry. Dit het tot gevolg dat hulle oor 'n geheuenetwerk van konsepbeelde beskik wat van wanvoorstellings wemel (DeMarois, 1996:3). Leerders se vorige blootstelling aan konsepte het 'n nadelige uitwerking as gevolg van onvanpaste bestaande netwerke. Leerders se konsepbeelde van veranderlikes en vergelykings toon min ooreenstemming met die definisie van hierdie konsepte (De Marois, 1996:3). Wanneer 'n leerder 'n nuwe idee, feit of prosedure binne 'n bestaande netwerk wil inpas, belemmer die bestaande netwerk die verwantskappe wat geskep word. Aan die ander kant bestaan die moontlikheid dat 'n leerder nuwe inligting wil voorstel op 'n manier wat nie met die bestaande netwerk verband hou nie. 'n Gebrek aan ooreenstemming tussen die ou en die nuwe inligting lei tot onbruikbare kennis (kyk 2.4).

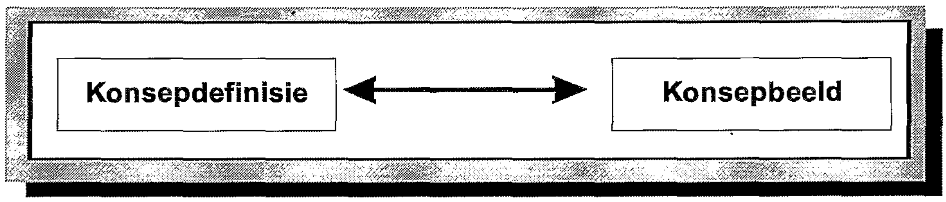
Vinner (1983:294) beweer dat daar twee verskillende “selle” in die kognitiewe struktuur is: een vir die definisie van die konsep en een vir die konsepbeeld. Die konsepbeeld-sel is leeg solank as wat daar nie betekenis met die konsepnaam geassosieer word nie. Dit kan gebeur in gevalle waar die konsepdefinisie op 'n betekenislose manier gememoriseer word.

Baie onderwysers op hoërskoolvlak verwag 'n eenrigtingproses vir konsepvorming, naamlik dat die konsepbeeld deur middel van die konsepdefinisie gevorm sal word (Vinner, 1991:71; 1992:198) (kyk Fig 3.6).



FIGUUR 3.6: 'n Model vir konsepvorming

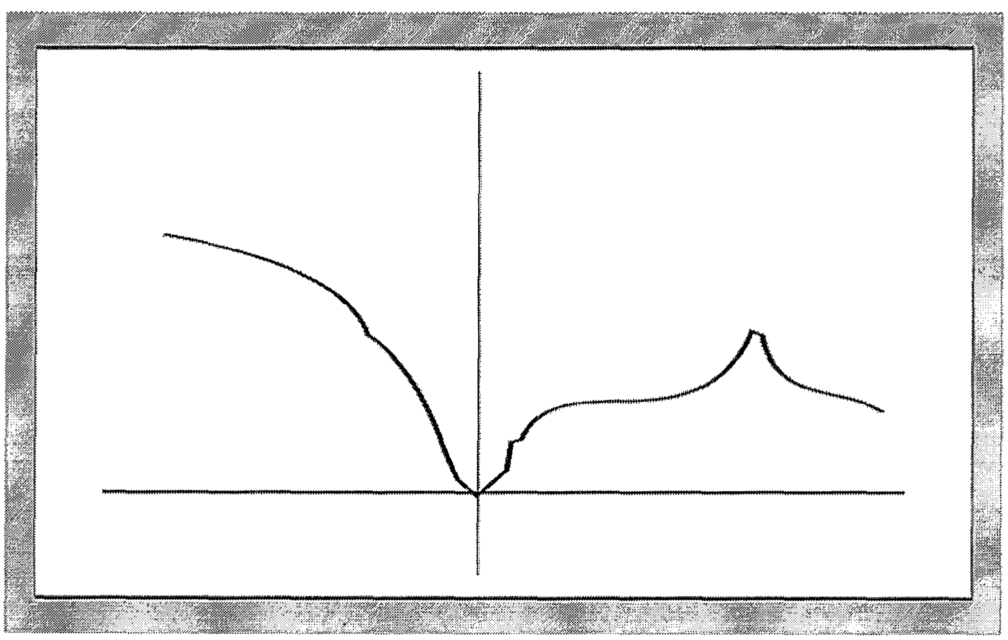
Wanneer 'n konsep aan 'n leerder bekendgestel word, is die konsepbeeld-sel leeg. Dit word geleidelik gevul ná voorbeelde en verduidelikings. Dit reflekteer egter nie al die aspekte van die konsepdefinisie nie. 'n Onvolledige konsepbeeld het 'n kardinale impak op die rekonstruksie van die konsepdefinisie as laasgenoemde vereis word (kyk Fig 3.7).



FIGUUR 3.7 : Wisselwerking tussen die konsepdefinisie en konsepbeeld (Vinner, 1992:198-199)

Wanneer 'n leerder met 'n kognitiewe taak gekonfronteer (kyk Fig 3.8) word, is die konsepbeeld en konsepdefinisie-selle veronderstel om geaktiveer te word. In 'n studie wat deur Vinner onderneem is (1991:74-75), is die volgende vrae aan leerders gegee, waarop hulle "ja" of "nee" moes antwoord en hulle keuse verduidelik.

1. Is daar 'n funksie wat aan elke getal ongelyk aan nul die vierkant daarvan toeken en aan 0 die waarde -1?
2. Is daar 'n funksie wat aan elke positiewe getal die waarde 1 toeken, aan elke negatiewe getal die waarde -1 en aan 0 die waarde 0 toeken/
3. Is daar 'n funksie wat deur die volgende grafiek voorgestel word:

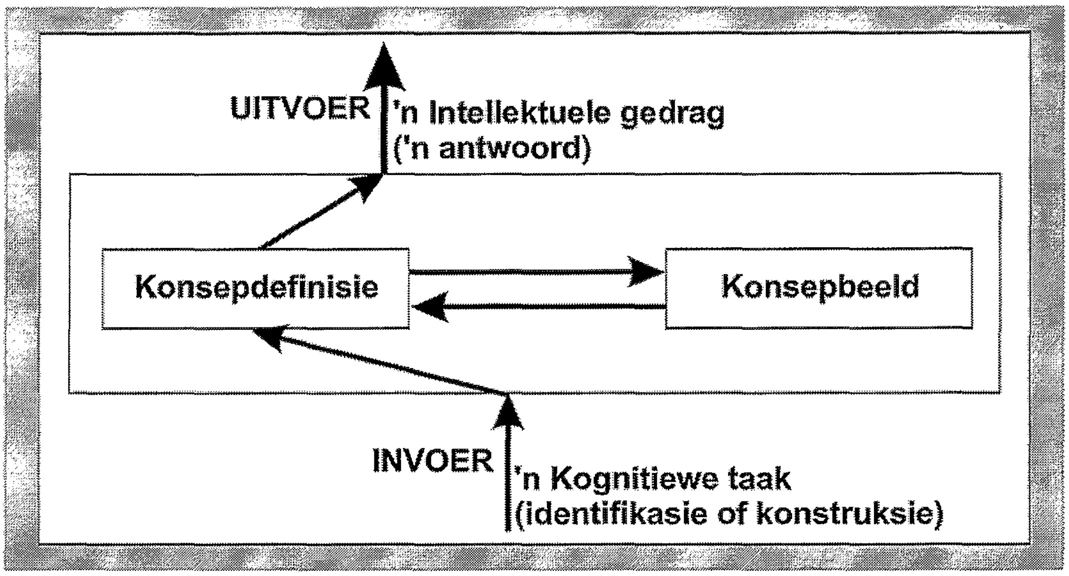


FIGUUR 3.8 : Is hierdie grafiek 'n voorstelling van 'n funksie?

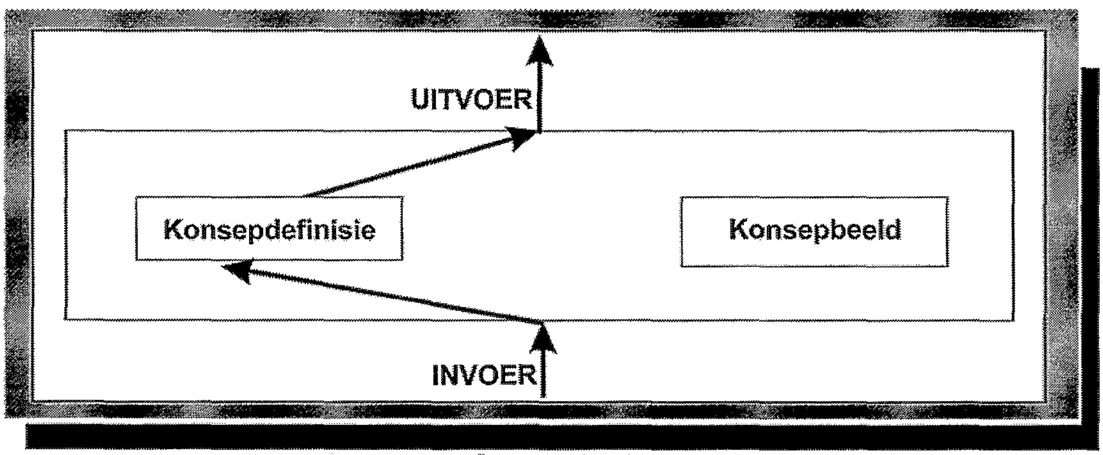
Wat vraag 1 en 2 betref, het meer as die helfte van die leerders gedink dat 'n funksie deur 'n enkele reël gegee moet word, of as twee reëls gegee word, moet die definisiegebied 'n interval wees en nie slegs 'n enkele punt nie. Wat vraag 3 betref, het sommige leerders geglo dat die grafieke van funksie reëlmatig en redelik stygend moet wees. Ten spyte van die feit dat die moderne versameling-teoretiese definisie aan hierdie leerders onderrig is (kyk 3.3), het ongeveer die helfte van die leerders vraag 3 korrek beantwoord. Die meeste leerders wat die begrip funksie korrek gedefinieer het, het dus nie hulle definisie in die beantwoording van vraag 1 en 2 gebruik nie. Slegs 'n derde van daardie leerders wat 'n korrekte definisie van 'n funksie gegee het, het ook vraag 1 en 2 korrek beantwoord. Geen leerder met 'n foutiewe definisie het vraag 1 en 2 korrek beantwoord nie. Dit beteken dat, alhoewel leerders definisies en voorbeelde ken, dit nie genoegsaam is om die gewenste konsepbeelde te vorm nie.

'n Leerder se konsepbeeld kan byvoorbeeld beperk wees tot die grafiek van 'n relasie wat die sogenaamde "vertikale-lyn-toets" slaag of tot 'n masjien wat 'n uitvoer lewer wanneer 'n invoer voorsien word (Clement, 2001:745). Wanneer leerders aan tegnieke soos die vertikale-lyntoets blootgestel word, is hulle geneig om die onderliggende konsepte te ignoreer en hierdie toetse meganies toe te pas. Sodanige meganiese toepassing beperk nie alleen die leerders se verstaan van konsepte nie, maar ook hulle vermoë om binne 'n bepaalde voorstellingsvorm of met verskillende voorstellingsvorme in die oplos van probleme rakende die identifisering van funksies te werk (Fernández, 2005:96).

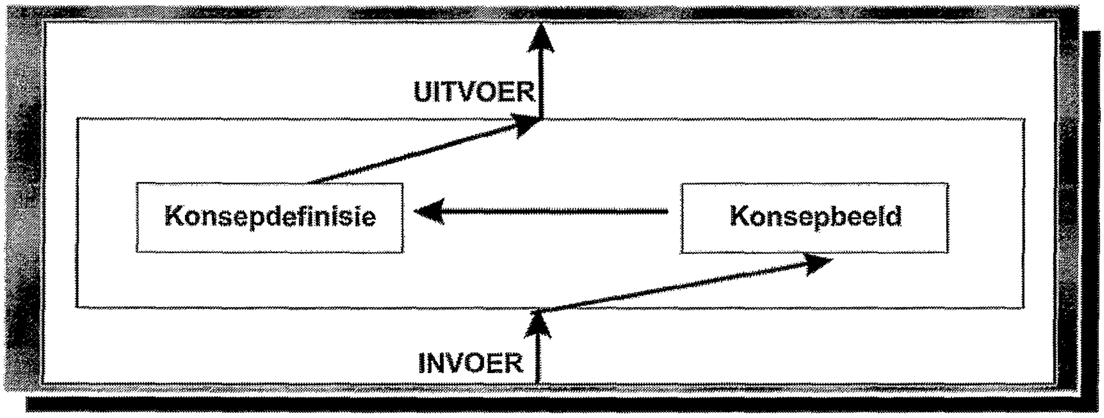
Baie onderwysers op hoërskoolvlak verwag dat die intellektuele prosesse betrokke in die uitvoer van 'n gegewe intellektuele taak skematies deur een van die volgende figure (Fig 3.9-3.11) voorgestel word. Die kognitiewe taak word as 'n invoer beskou word en die resulterende denkhandeling as 'n uitvoer (Vinner,1991:71-73; 1992:198-200). Die pyltjies in die figure stel die verskillende maniere voor waarop 'n kognitiewe struktuur kan funksioneer. Dit is nie te sê dat die konsepdefinisie die eerste reaksie op die gegewe taak is nie (kyk Fig 3.10). Soms is die konsepbeeld die eerste reaksie (kyk Fig 3.11). Tog sal die konsepdefinisie vroeër of later geraadpleeg word.



FIGUUR 3.9 : Wisselwerking tussen definisie en beeld



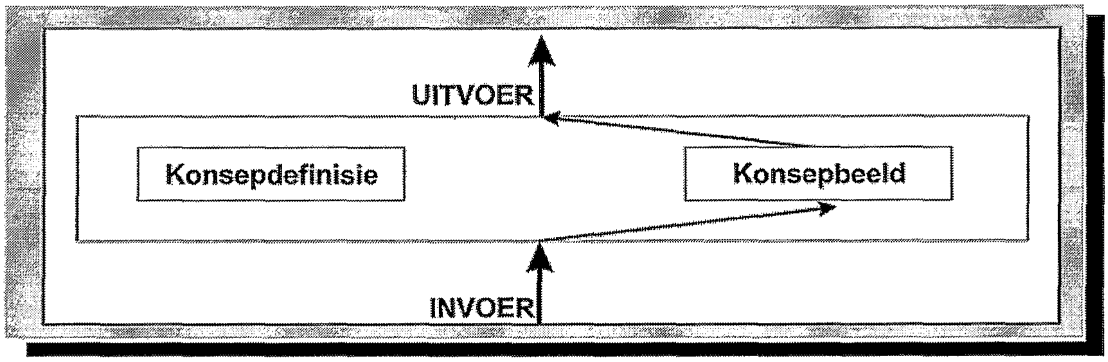
FIGUUR 3.10 : Suiwer formele deduksie



FIGUUR 3.11 : Deduksie wat op intuïtiewe denke volg

Die gemeenskaplike kenmerk van al die prosesse in bogenoemde figure is dat die konsepdefinisie onder ideale omstandighede vroeër of later geraadpleeg sal word wanneer die leerder met 'n kognitiewe taak gekonfronteer word (Vinner,1991:72). In die praktyk werk dit ongelukkig anders. Dit is moeilik om die kognitiewe sisteem te forseer om definisies te raadpleeg wanneer 'n konsepbeeld gevorm word, of wanneer 'n leerder met 'n kognitiewe taak gekonfronteer word (Vinner, 1991:72; Vinner, 1983:295). Sommige definisies is te gekompliseerd en help nie om die gewenste konsepbeelde in die leerder se gedagtes te vorm nie. Aan die ander kant is daar sommige definisies wat wel sin maak, maar die oomblik wanneer spesifieke voorbeelde deur die onderwyser of handboek gegee word, vorm hierdie voorbeelde die konsepbeeld. Omdat leerders konsepbeelde en nie konsepdefinisies nodig het om konsepte te hanteer nie, word hierdie definisies uiteindelik onaktief en gaan verlore (Vinner, 1983:295, 296).

'n Meer gepaste model vir wat in werklikheid gebeur, as gevolg van die aard van spontane denke, is die volgende:



FIGUUR 3.12 : Intuïtiewe response

In hierdie geval word die denkprosesse gerig deur die konsepbeeld, en nie deur die konsepdefinisie nie. Die konsepdefinisie-sel word nie geraadpleeg gedurende die probleemoplossingsproses nie. (Vinner, 1991:73, 1992:198) (Fig 3.12). Die alledaagse denkprosesse neem oor en die leerder is onbewus van die behoefte om die formele definisie te raadpleeg.

Dit is belangrik om te onthou dat 'n konsep nie in een stap aangeleer word nie. Verskeie fases gaan die volledige aanleer en bemeestering van 'n komplekse konsep vooraf (Vinner & Dreyfus, 1989:365).

Enkele aspekte van leerders se konsepbeelde wat as beperkinge ten opsigte van die verstaan van die funksiekonsep beskou kan word, sluit die volgende in (Vinner, 1992:200):

- Die ooreenstemming tussen veranderlikes moet sistematies wees. 'n Willekeurige ooreenstemming word nie as 'n funksie beskou nie;
- 'n Funksie moet 'n algebraïese term, vergelyking of formule wees;
- 'n Funksie moet deur 'n enkele reël gegee word, bv. 'n stuksgewys-gedefinieerde funksie word dikwels as twee of meer funksies gesien;
- Die grafiek van 'n funksie moet sistematies en reëlmatig wees. Skielike veranderinge in die grafiek dui daarop dat dit nie 'n funksie is nie;
- 'n Funksie moet 'n een-tot-een ooreenstemming wees, met die eienskap dat daar vir elke element in die waardeversameling ook net een element in die definisieversameling mag

wees. Dikwels word bv. $y = 6$ nie as 'n funksie gesien nie, aangesien dit nie een-tot-een is nie.

3.4.3 Die Proses-Objekbeskouing van Dubinsky en Harel

Die boustene van wiskunde is onder andere getalle, veranderlikes en funksies, wat as objekte beskou kan word. Daar bestaan bepaalde verwantskappe tussen hierdie objekte - hulle is deel van groter strukture van objekte (Dreyfus, 1990:118). Prosesse bestaan weer uit bewerkings wat op hierdie objekte uitgevoer word. Prosesse transformeer dus hierdie objekte.

Die kompleksiteit van wiskundekennis lê daarin dat die meeste wiskundekonsepte die rol van prosesse of objekte kan aanneem, afhangend van die probleemsituasie of die leerder se konseptualisering (Dreyfus, 1990:118). Sfard (1992:60) beklemtoon dat die begrippe "proses" en "objek" nie gesien moet word as totaal verskillend nie, maar as twee kante van dieselfde muntstuk. Namate die leerder bekend word met 'n bepaalde proses, neem die proses die vorm van 'n reeks bewerkings aan wat met hoofrekene uitgevoer kan word. Die leerder het nou die stadium van *operasionele denke* met betrekking tot hierdie konsep bereik. Op 'n latere stadium kristalliseer die geheuebeeld van hierdie proses in 'n enkele entiteit, 'n nuwe objek. As hierdie fase bereik word, is die leerder in staat om óf dinamies as 'n proses, óf staties as 'n objek oor hierdie begrip te dink. Een van die belangrikste fases in die leer van wiskunde is juis *objektifisering:* om 'n objek uit 'n proses te maak. Laasgenoemde fase word deur Sfard beskryf as reïfikasie (kyk 3.4.1).

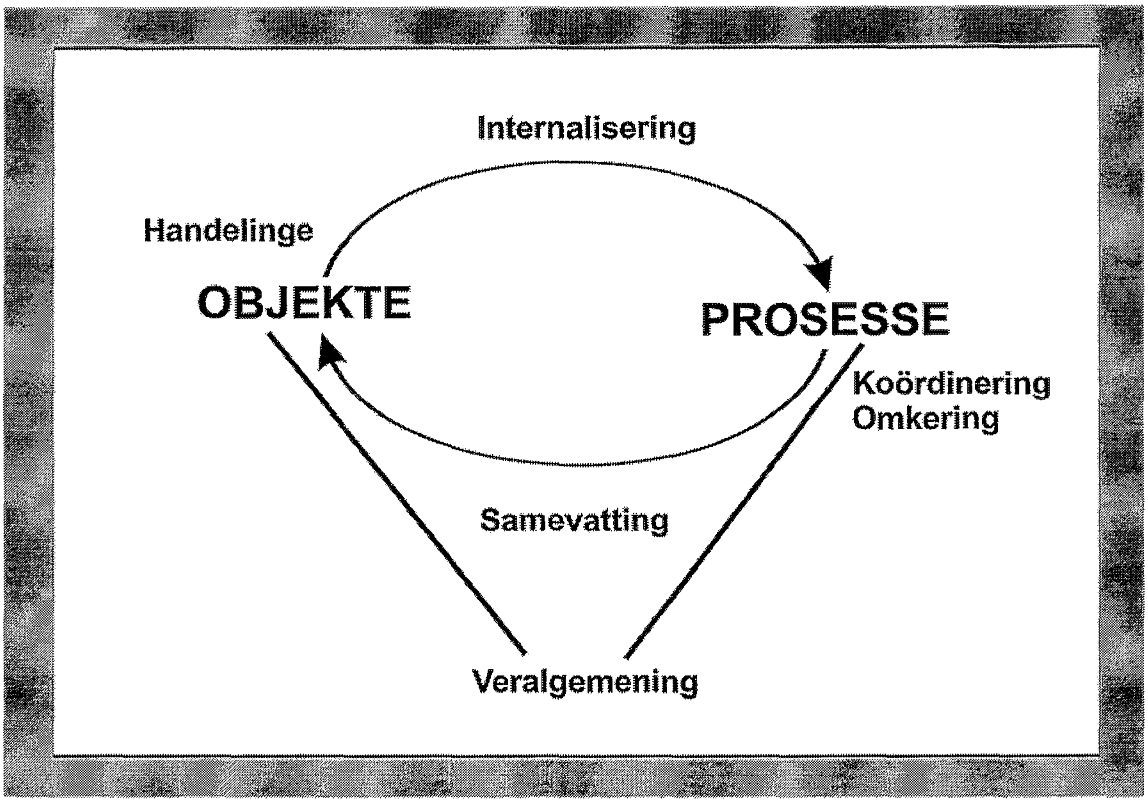
Dubinsky en Harel (1992:85) en Dubinsky (2000:292) stel die sogenaamde APOS-teorie voor. Dit is 'n konstruktivistiese teorie (kyk 2.3.3) wat beskryf hoe die leer van 'n wiskundekonsep kan plaasvind. Volgens hierdie teorie bestaan die leer van wiskunde uit die skep van sekere geheuekonstrukte in antwoord op wiskunde-probleemsituasies. Die belangrikste boublokke in hierdie teorie is **A**ksies, **P**rosesse en **O**bjekte wat gekombineer word in **S**kemas.

- *Uitvoer van Aksies:* Die verstaan van 'n wiskundekonsep begin met die verstandelike of fisiese manipulasie van objekte (Dubinsky, 2000:292; Dubinsky & Harel, 1992:85), wat hierdie objekte na nuwe objekte, of na dieselfde objekte met nuwe eienskappe omskakel. 'n Leerder met 'n aksie-begrip van funksies het 'n duidelike formule vir die funksie nodig en al waaraan hy kan dink, is die vervanging van waardes in die funksie en die berekening daarvan (Dubinsky, 2000:293). Dit is 'n statiese begrip in die sin dat die leerder neig om op een stap op 'n slag te fokus (Dubinsky & Harel, 1992:85). 'n Leerder wat oor 'n beperkte funksiekonsep beskik, mag dalk in staat wees om die samestelling van twee funksies deur middel van algebraïese uitdrukkings te bereken deur stap-vir-stap-vervanging, maar sal heel moontlik nie twee funksies se samestelling in meer algemene situasies kan bereken nie, soos in die geval waar 'n funksie oor verskillende definisiegebiede verskillend gedefinieer word (Dubinsky & Harel, 1992:85);

- *Funksie as 'n Proses* is 'n hoër vlak van begrip waar leerders se handelinge geïnternaliseer is (Dubinsky, 2000:293; Breidenbach *et al.*, 1992:249). Dit behels 'n dinamiese transformasie van objekte op 'n herhaalbare wyse wat, gegewe dieselfde oorspronklike objek, altyd dieselfde getransformeerde objek sal lewer (Dubinsky & Harel, 1992:85). 'n Funksie hoef nie deur 'n formule gedefinieer te word nie. Leerders bereik 'n stadium waar dit onvoldoende is om 'n funksie as 'n proses te beskou wat bewerkings op getalle uitvoer. Die leerder kom in aanraking met prosesse, byvoorbeeld differensiasie, wat bewerkings op funksies uitvoer. Dit word dus nodig om 'n funksie as 'n objek te beskou waarop bewerkings uitgevoer kan word (Dreyfus, 1990:118). Wanneer die leerder 'n prosesbegrip van 'n funksie het, sal hy in staat wees om dit met ander prosesse te kombineer, en die inverse of die samestelling daarvan te bereken (Dubinsky, 2000:293). Die leerder beskik in hierdie geval oor die vermoë om 'n funksie op sigself as 'n invoer-uitvoer-bewerking te beskou. Die leerder beskou die transformasie as 'n volledige aktiwiteit wat begin met 'n objek, gevolg word deur 'n proses wat daarop uitgevoer word en 'n nuwe objek wat as uitvoer gelewer word (Breidenbach *et al.*, 1992:251);
- *Funksie as 'n Objek*: Vir 'n gegewe proses mag daar situasies ontstaan waar dit nodig is om sekere aksies of prosesse daarop toe te pas. Ten einde dit te doen moet die leerder die proses saamvat (encapsulate) tot 'n **objek** (Dubinsky, 2000:293; Breidenbach *et al.*, 1992:250). Dikwels is dit nodig om die objek weer te "ontbind" of te *de-encapsulate* na die proses van waar dit oorspronklik kom om werklik 'n transformasie op die objek uit te voer. Beskou byvoorbeeld die samestelling van funksies: dit behels die neem van twee funksies en dit word op die een of ander manier gekombineer om 'n nuwe funksie daaruit te verkry. Vanuit hierdie oogpunt word al drie funksies as objekte beskou. Om egter die transformasie daarop uit te voer moet die twee "invoerfunksies" na hul oorspronklike prosesse teruggeneem, die twee prosesse so gekombineer word dat die uitvoer van die

een funksie die invoer van die volgende word, en uiteindelik word die resulterende proses saamgevat as 'n objek (Selden & Selden, 1992:4).

- *Skema*: Al bogenoemde interpretasies van 'n funksiekonsep, saam met die eienskappe en verwantskappe wat leerders daaromtrent verstaan, in die skema vir die konsep word georganiseer (kyk Fig 3.12). 'n Skema is 'n versameling van aksies, prosesse, objekte en ander skemas, asook die verwantskappe met 'n bepaalde konsep (Dubinsky, 2000:294), of anders gestel: 'n skema is saamgestel uit kognitiewe objekte en interne prosesse (Sriraman, 2004:206) en stel leerders in staat om verwantskappe tussen nuwe konsepte, prosesse of objekte raak te sien (Harel, Selden & Selden, 2006:157).



FIGUUR 3.13 : Struktuur van 'n skema (Dubinsky, 1991:107)

Die struktuur van 'n skema word in bostaande diagram (Fig.3.13) uiteengesit. 'n Skema is nie 'n lineêre lys van denkhandelinge nie, maar eerder 'n sisteem van sirkelvormige terugvoer. Die diagram begin met *objekte* waarop daar bepaalde handelinge uitgevoer word. 'n Handeling moet geïnternaliseer word. 'n Geïnternaliseerde handeling is 'n *proses*.

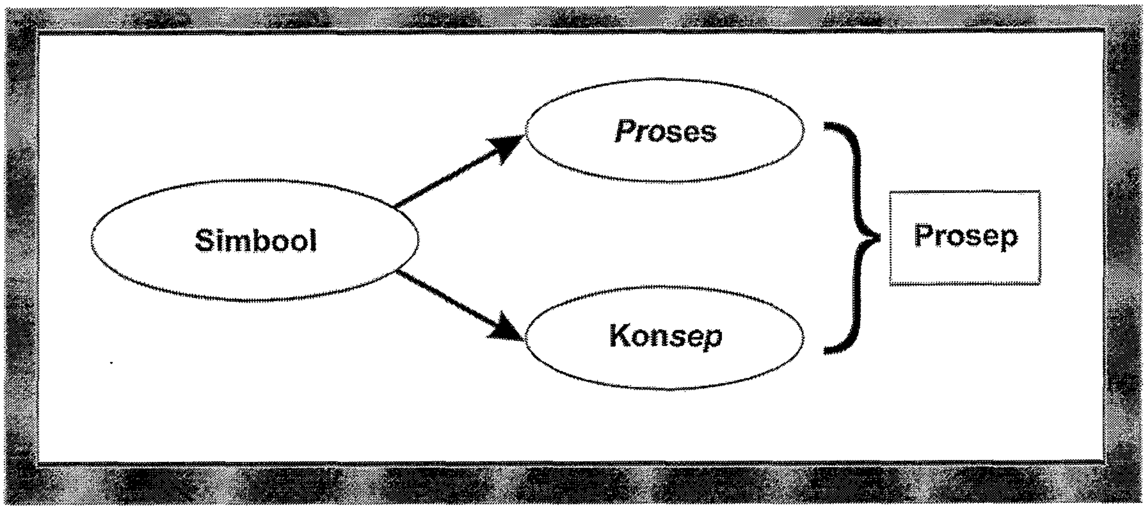
Internalisering stel die leerder in staat om bewus te wees van 'n bepaalde handeling, om daaroor te reflekteer en om dit met ander handelinge te kombineer. Die internalisering van handelinge is een manier om prosesse te vorm. 'n Ander manier is om met bestaande prosesse te werk om nuwe prosesse te vorm. Dit kan byvoorbeeld gedoen word deur omkering. Die leerder mag byvoorbeeld die handeling van die afgeleide van 'n funksie geïnternaliseer het. As die proses geïnternaliseer is, is die leerder in staat om die proses om te keer ten einde die anti-afgeleide of integraal van daardie funksie te bereken. Nog 'n manier om nuwe prosesse uit bestaande prosesse te vorm is om twee of meer prosesse saam te stel of te koördineer. Dit is ook moontlik om oor 'n proses te reflekteer en dit na 'n objek om te skakel. Aanvanklik word funksies as prosesse beskou, en deur middel van die proses van samevatting (encapsulation) word dit as objekte beskou. In die samestelling van funksies is dit belangrik dat die leerder dit afwisselend as 'n proses en objek sal beskou (Schwingendorf, Hawks & Beineke, 1992:135; Dubinsky, 1991:108). In hierdie geval moet die leerder in staat wees om heen en weer tussen die interpretasies te beweeg. So 'n ontrafeling of dekonstruksie ("de-encapsulating") van 'n objek is noodsaaklik vir die leer van hoër-orde-wiskundekonsepte (Sfard, 1989:158)(kyk 2.5.9.1)

'n Belangrike aspek in die leer van wiskunde is nie slegs om bewus te wees van die bewerkings wat jy uitvoer nie, maar ook om oor die betekenis van waarmee jy besig is, te reflekteer. Beide die prosesse van internalisering en samevatting kom na vore deels as gevolg van refleksie oor 'n probleemsituasie en die strategieë wat daarvoor benodig word (Schwingendorf *et al.*, 1992:136)(kyk 2.5.7)

3.4.4 Gray en Tall se beskouing van 'n funksie as 'n *prosep*

Verskeie kurrikulumdokumente (DoE, 2003:2; NCTM, 1989) tref onderskeid tussen die vaardighede of prosedures wat leerders moet aanleer, asook konsepte of feite wat hulle moet ken. Hierdie onderskeid stel 'n tweeledigheid tussen prosedures en konsepte voor, tussen dit wat leerders moet kan doen en dit wat leerders moet weet (Gray & Tall, 1994:117), oftewel tussen leerders se prosedurele en konseptuele kennis (kyk 3.3). Die oorgang van 'n proses na 'n konsep kom dikwels in die literatuur voor en verskillende terme word daarvoor gebruik, soos samevatting (encapsulation) (Dubinsky, 1991:101)(kyk 3.4.3) en reïfikasie (Sfard, 1992:64)(kyk 3.4.1).

Die inkorporering van 'n proses as 'n objek is 'n moeilike aktiwiteit, want soos Sfard (1989:151) dit stel: hoe kan enigiets tegelykertyd 'n proses en objek wees? Gray en Tall (1994:121; 1993:6) definieer die term "prosep" as 'n gekombineerde denkobjek bestaande uit 'n proses, 'n wiskunde-objek of konsep wat uit daardie proses na vore kom, en 'n simbool wat gebruik kan word om die proses of objek voor te stel (kyk Fig.3.14):



FIGUUR 3.14 : Die simbool as spilpunt tussen die proses en die konsep om die prosep te vorm (Tall *et al.*, 2001:5)

Tall *et al.* (2001:4) beweer dat simbole die skakel tussen die konsep- en die prosesbeskouing van simbole is. Dit lei tot 'n fokusverskuiwing van *dink oor* simbole as manipuleerbare entiteite tot die *doen* van wiskunde. Enkele voorbeelde van simbole wat hierdie oorskakeling van proses na konsep moontlik maak, is (kyk tabel 3.1):

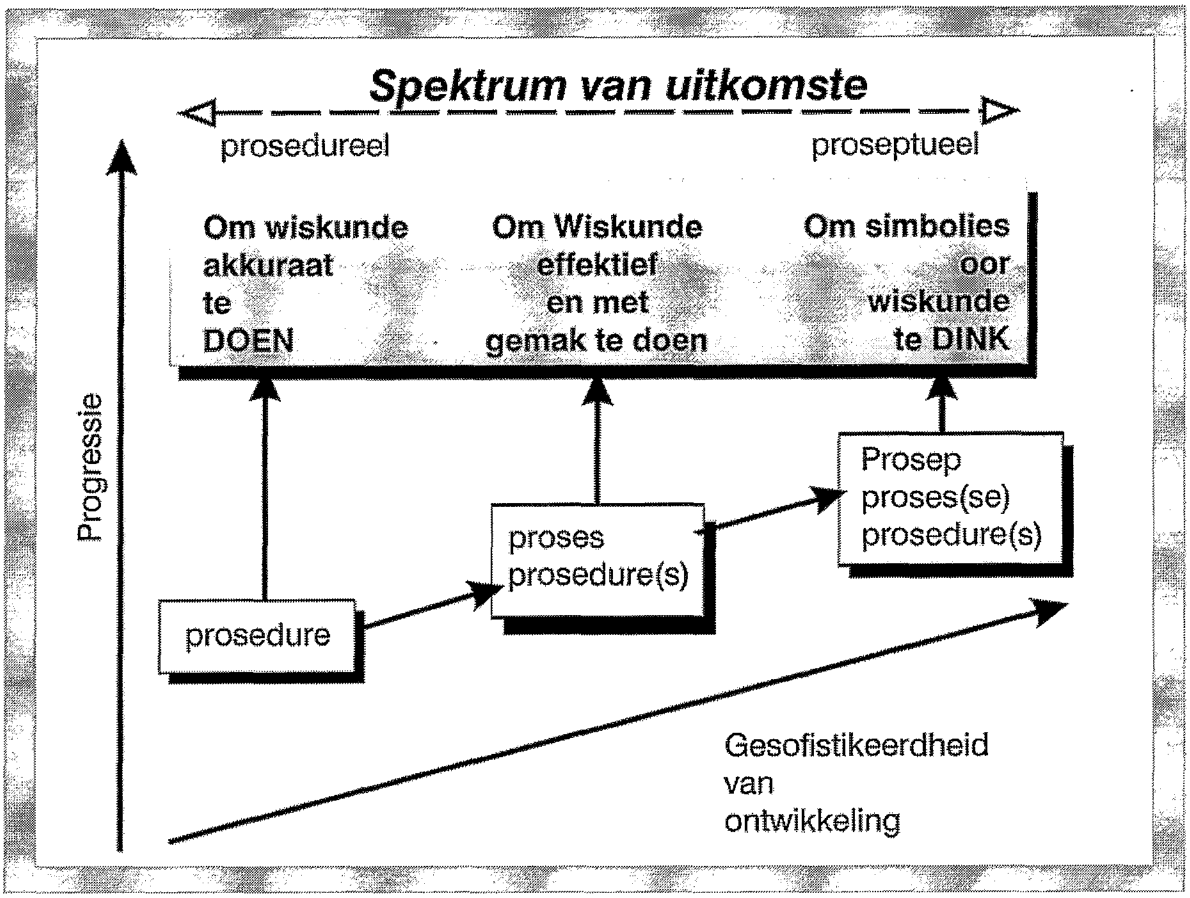
TABEL 3.1 : Simbole as proses en konsep

SIMBOOL	PROSES	KONSEP
$3+2x$	Bepaal die waarde van	Uitdrukking
$y=f(x)$	'n uitvoerwaarde moet verkry word vanuit 'n invoerwaarde	Funksie

$\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$	"neig na 'n limiet"	Waarde van die limiet
$\int f(x)dx$	Integrasie	Integraal

Die kragtigheid van die simbool lê juis in die dubbelsinnigheid daarvan (De Marois, 1996:2; Gray & Tall, 1991:2), wat uiteindelik buigsame denke bevorder (Gray & Tall, 1993:6). Leerders wat met gemak tussen die verskillende betekenisse van sulke simbole kan beweeg, het die inligting inherent aan hierdie simbool "gekompakteer" (kyk 3.4.1). Betekenis vir simbole ontwikkel dikwels deur eers prosedures te doen, soos die bepalings van die funksiewaarde vir 'n sekere invoerwaarde. Prosedures ontwikkel dan in prosesse, waar die gedagte dat 'n funksie 'n uitvoer vanuit 'n bepaalde invoer lewer, deur die leerder verstaan word sonder dat die leerder 'n algoritme op 'n invoerwaarde moet toepas om 'n uitvoer te kry.

Op 'n bepaalde stadium ontwikkel die konsep in 'n objek. In hierdie geval kan die leerder bewerkings, soos samestelling of differensiasie, op die objek "funksie" uitvoer. Die vermoë om die funksiekonsep as beide 'n proses en 'n objek te beskou, staan bekend as *proseptuele* denke (Gray & Tall, 1993:8). In teenstelling hiermee staan denke wat op die korrekte keuse en toepaslike uitvoer van prosedures fokus, as *prosedurele denke* bekend (Gray & Tall, 1994:132). Prosedures stel die leerder in staat om wiskunde te *doen*, maar om verskillende prosedures te leer en die toepaslike prosedure vir 'n gegewe doel te kies word toenemend moeiliker vir die leerder (Tall, 1996:12). Deur een of meer beskikbare alternatiewe te hê laat dit ruimte vir die leerder om die gepaste strategie vir 'n bepaalde doel te kies. Prosepte stel die leerder nie slegs in staat om prosedures uit te voer nie, maar ook om simbole as denkobjekte te sien. Hulle kan dus nie slegs wiskunde doen nie, maar ook dink oor die konsepte. Dit lei tot 'n spektrum van uitkomste (kyk Fig 3.15). Leerders wat prosedureel georiënteerd is, is beperk tot 'n spesifieke prosedure, met die aandag gefokus op die stappe in die prosedure, terwyl dié wat die simbool as 'n proses of 'n konsep sien, 'n meer doeltreffende gebruik van kognitiewe prosessering het (Tall *et al.*, 2001:8).



FIGUUR 3.15 : Spektrum van uitkomste (Tall *et al.*, 2001: 8)

Hierdie uiteenlopendheid tussen leerders wat prosesse slegs interpreteer in terme van prosedures, en dié wat prosesse sien as buigsame prosepte, noem Gray en Tall (1993:8) die *proseptuele skeiding*. Leerders wat slegs vertrou op prosedurele denke, doen wiskunde wat klaarblyklik moeiliker lyk, omdat wiskunde vir hulle bestaan uit onverwante kognitiewe eenhede van algoritmes wat deur 'n spesifieke soort probleem ontlok word, en hulle sien nie die verwantskappe raak nie (Tall, 1996:12). Hulle raak vasgevang in lang opeenvolgende prosesse wat meer las plaas op 'n reeds oorlaaide kognitiewe struktuur (Tall *et al.*, 2001:8; Gray & Tall, 1991:6). Wanneer 'n leerder terugval op prosedurele denke en vertroud raak met die inoefening van prosedures, word die proseptuele skeiding net groter (DeMarois, 1996:2). Leerders probeer om so baie prosedures te memoriseer met so min begrip, dat algebra 'n mengelmoes van onverwante prosedures vir hulle word. Wanneer leerders byvoorbeeld met 'n funksie gekonfronteer word soos $f(x) = x^2 + 5x - 6$, sal hulle die funksie gelyk aan nul stel en vir x oplos sonder dat dit deel van die vraag was. In hierdie verband sê Tall en Bakar (1992:3) dat die probleme wat tersiêre leerders met algebra het, as gevolg van die reëlgebonde benadering tot hierdie vak is. Namate die kognitiewe las toeneem, mag 'n leerder wat tot op hierdie stadium nog suksesvol was, terugval op die sekuriteit van 'n prosedure, eerder as die buigsaamheid van 'n prosep (Gray & Tall, 1993:8). Van hier af is mislukking feitlik onvermydelik.

Daarenteen beskik die meer suksesvolle leerder oor proseptuele denke wat gekenmerk word deur die vermoë om fases in die manipulering van simbole te kompakteer totdat simbole gesien word as objekte wat "ontbind" of gedekonstrueer kan word en hersaamgestel word op 'n verskeidenheid maniere (Gray & Tall, 1994:132)(kyk 3.4.3). Suksesvolle leerders bou 'n gekonnekteerde netwerk van bekende feite en verwantskappe wat hulle in staat stel om nuwe feite en verwantskappe af te lei en sodoende die las verminder om feite te onthou (Gray & Tall, 1991:6).

3.4.5 Die ontwikkeling van die funksiekonsep volgens O'Callaghan

Wiskunde-probleemoplossing behels 'n oorgang van 'n probleemsituasie na 'n wiskundige voorstelling van daardie situasie. Omdat funksies beskou kan word as die instrumente waarmee verwantskappe tussen veranderlikes beskryf kan word, lê dit aan die kern van die probleemoplossingsproses in wiskunde (O'Callaghan, 1998:24). Die model wat hier voorgestel word, is gegrond op die probleemoplossingsomgewing en geformuleer in terme van die gebruik van funksies om probleme op te los.

Die funksiemodel bestaan uit vier bevoegdheidskomponente, naamlik modellering, interpretasie, omskakeling en reïfikasie (O'Callaghan, 1998:24).

3.4.5.1 Modellering

Die vermoë om 'n probleemsituasie voor te stel deur die gebruik van funksies staan bekend as *modellering* (kyk 2.5.6). Fey (1989:199) beweer dat modellering met die bepaling van verwantskappe tussen veranderlikes begin. Die modellering van lewenswerklike situasies om die fisiese wêreld te organiseer, is een van die mees algemene gebruike van funksies (Selden & Selden, 1992:1). Volgens Sierpinska (1992:42) is die beskouing van 'n funksie as 'n gepaste hulpmiddel vir modellering of matematisering van verwantskappe 'n noodsaaklike voorvereiste om tot volle begrip van die funksiekonsep te kom. Modellering word deur O'Callaghan (1998:24) beskou as die eerste komponent in die verstaan van die funksie-konsep. Lesh en Lehrer (2003:109) beskryf modellering as 'n wiskundige beskrywing van 'n spesifieke situasie.

Die volgende voorbeeld illustreer die modelleringskomponent in O'Callaghan se model (O'Callaghan, 1998:30):

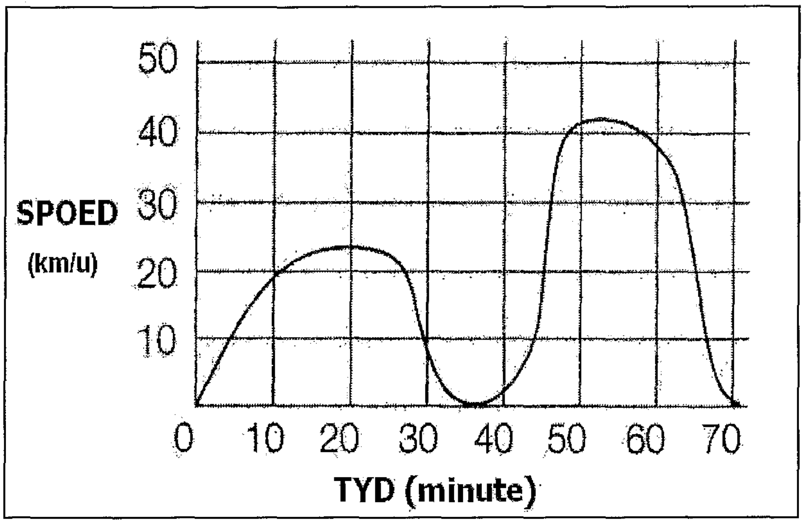
> 'n Vragmotor is gelaai met kartonbokse met 'n massa van 10 kg elk. As die leë vragmotor 2000 kg weeg, bepaal die volgende:
>
> (a) Die totale massa van die vragmotor as daar 75 bokse is
>
> (b) Die aantal bokse as die totale massa van die vragmotor 3000 kg is
>
> (c) Deur G te gebruik as die totale massa van die vragmotor en x vir die aantal bokse, skryf 'n vergelyking neer wat die massa uitdruk as 'n funksie van die aantal bokse.

3.4.5.2 Interpretasie

Die tweede komponent in hierdie model is die vermoë om funksies in hulle verskillende voorstellingsvorme in terme van lewenswerklike toepassings te interpreteer (O'Callaghan, 1998:25) en word gesien as die omgekeerde proses van modellering. Hierdie komponent kan weer onderverdeel word in subkomponente wat ooreenstem met die verskillende voorstellingsvorme van funksies. Van 'n leerder kan byvoorbeeld verwag word om verskillende soorte interpretasies te maak of om op spesifieke aspekte van 'n grafiek te fokus. Die interpretasie van grafieke vereis van leerders om op 'n abstrakte vlak te dink (Van Dyke & White, 2004:116). Leerders behoort algebra te sien as 'n hulpmiddel om verwantskappe tussen veranderende hoeveelhede uit te druk en te analiseer. In die bereiking van hierdie doelwit is die verstaan en interpretasie van grafieke 'n belangrike komponent.

Die volgende voorbeeld illustreer die interpretasiekomponent in O'Callaghan se model (O'Callaghan, 1998:30):

Die grafiek hieronder gee die spoed van 'n fietsryer op sy daaglikse oefenrit. Gedurende hierdie rit moet hy teen 'n opdraande uitry, waar hy dan vir 'n slukkie Energade stilhou voordat hy weer teen 'n afdraande afry. Gebruik die grafiek om die volgende vrae te beantwoord:



a) Bepaal die spoed na 25 minute
b) Bepaal op watter tydstip die spoed 30 km/u is
c) Gedurende watter tydsintervalle neem die spoed toe?
d) Gedurende watter 10-minute tydsinterval het die spoed die meeste afgeneem?
e) Wanneer was die fietsryer aan die bopunt van die opdraande?

3.4.5.3 Omskakeling

Soos reeds genoem in 3.2, kan funksies op verskillende maniere voorgestel word, waarvan die mees algemene tabelle, grafieke en vergelykings is (Van Dyke & Craine, 1997:616), asook 'n lewenswerklike situasie (Demana, Schoen & Waits, 1993:13). Omskakeling is die vermoë om dieselfde funksie in verskillende voorstellingsvorme te herken (Demana *et al.* 1993:13) en van die een voorstellingsvorm van 'n funksie na 'n ander oor te skakel, byvoorbeeld van die grafiese vorm na 'n vergelyking, of van die tabelvorm na die grafiese (O'Callaghan,1998:25). Die vermoë om met gemak van die een voorstellingsvorm na die ander om te skakel, stel leerders in staat om ryk verwantskappe raak te sien en 'n beter konseptuele begrip te ontwikkel en versterk die leerder se probleemoplossingsvermoë (Even, 1998:105). In aansluiting hierby toon navorsing deur Gagatsis en Shiakalli (2004:654) dat die vermoë om van die een voorstellingsvorm na 'n ander om te skakel, verwant is aan sukses in probleemoplossing. Aangesien daar nie 'n reglynige verband bestaan nie, kan die gevolgtrekking nie gemaak word dat leerders wat 'n omskakelingstaak suksesvol uitvoer, ook suksesvol in probleemoplossing sal wees nie. Omgekeerd kan die gevolgtrekking ook nie gemaak word dat leerders wat in probleemoplossing faal, ook in omskakelingstake sal faal nie. Die omskakelingsvermoë is maar een van die faktore wat probleemoplossing beïnvloed.

Omskakeling behels twee vorme van voorstelling: die bron (aanvanklike voorstelling) en die doelwit (finale voorstelling). Die omskakelingsvermoë word ten beste ontwikkel wanneer leerders gevra word om beide omskakelings te doen: van die bron na die doelwit en omgekeerd van die doelwit na die bron (Janvier, 1987:29).

Die volgende voorbeeld illustreer die omskakelingskomponent in O'Callaghan se model (O'Callaghan, 1998:30):

Die volgende tabel gee die waarde (W) van 'n motor vir die aantal jare (t) nadat dit gekoop is:

t	W
0	R160 000
2	R135 000
4	R110 000
6	R85 000

Gee 'n algebraïese reël waar W uitgedruk word as 'n funksie van t.

3.4.5.4 Reïfikasie

Die laaste bevoegdheidskomponent in die model vir die konseptualisering van funksies is reïfikasie en word gedefinieer as die skep van 'n geheue-objek van dit wat aanvanklik as 'n proses of prosedure waargeneem is. Hierdie wiskunde-objek word gesien as 'n enkele entiteit wat sekere eienskappe besit en waarop hoër-orde-denkprosesse uitgevoer kan word, soos transformasie of samestelling van funksies (O'Callaghan, 1998:25). Reïfikasie (kyk 3.4.1) verwys na die oorgang van die operasionele na die strukturele fases van konsepontwikkeling (Hollar & Norwood, 1999:221). Reïfikasie is die laaste stadium in die aanleer van die funksiekonsep en is een van die mees noodsaaklike stappe in die leer van wiskunde (Kieran, 1992:411). Dit is 'n moeilike proses wat 'n konseptualisering van funksies behels wat deur min leerders bereik word. Dit is nie 'n proses wat onderrig kan word nie, maar wel die skuif wat in die oorgang van die operasionele na die strukturele verstaan van 'n konsep betrokke is (Sfard, 1992:67).

Die volgende voorbeeld illustreer die reïfikasiekomponent in O'Callaghan se model (O'Callaghan, 1998:30):

Voorbeeld:

'n Klein maatskappy bereken sy bydrae (B) tot liefdadigheid deur sy wins (w), wat afhanklik is van die aantal items (n) wat verkoop word, met behulp van die volgende formules:

$B = 0{,}1(w - 1000)$ en $w = 100n - n^2$

(a) Wat sal die maatskappy bydra tot liefdadigheid as hy 50 items verkoop?

(b) Skryf 'n formule neer wat B uitdruk as 'n funksie van n

O'Callaghan (1998:36) het gevind dat leerders wat aan 'n tegnologies-verrykte leeromgewing blootgestel is, in die algemeen oor 'n beter funksiekonsep beskik as leerders wat aan 'n tradisionele leeromgewing blootgestel is. Sodanige leerders het beter presteer in modellering, interpretering en omskakeling, maar het nie verskil ten opsigte van reïfikasie nie. Daarteenoor het Hollar en Norwood (1999:224-225) 'n betekenisvolle verskil in reïfikasie tussen 'n eksperimentele groep leerders wat aan grafiese sakrekenaars blootgestel was, en 'n kontrolegroep wat geen toegang tot tegnologie gehad het nie, gerapporteer. Hierdie verskil in resultate mag toe te skryf wees aan die feit dat die eksperimentele groep leerders geleentheid gehad het om abstrakte toepassings van funksies te ondersoek met behulp van die grafiese sakrekenaar.

3.4.5.5 Prosedurele vaardighede

'n Versameling prosedurele vaardighede word met elkeen van bogenoemde bevoegdheidskomponente vereenselwig. Hierdie vaardighede bestaan uit transformasies en ander prosedures wat leerders in staat stel om binne 'n bepaalde voorstellingsvorm te funksioneer. Dit sluit onder andere in die berekening van 'n funksiewaarde in 'n gegewe punt (Akkoc & Tall, 2003:1). Hierdie vaardigheid stem ook ooreen met Sfard se operasionele beskouing van 'n funksie (kyk 3.4.1). Sodanige vaardighede is in 'n groot mate die fokus van die tradisionele onderrigmodel en verteenwoordig 'n groot deel van algebra vir baie onderwysers en leerders (O'Callaghan, 1998:26). Alhoewel minder klem op prosedurele vaardighede gelê moet word, is 'n sekere hoeveelheid kennis van algebraïese metodes tog noodsaaklik vir die bestudering van funksies (Sierpinska, 1992:57).

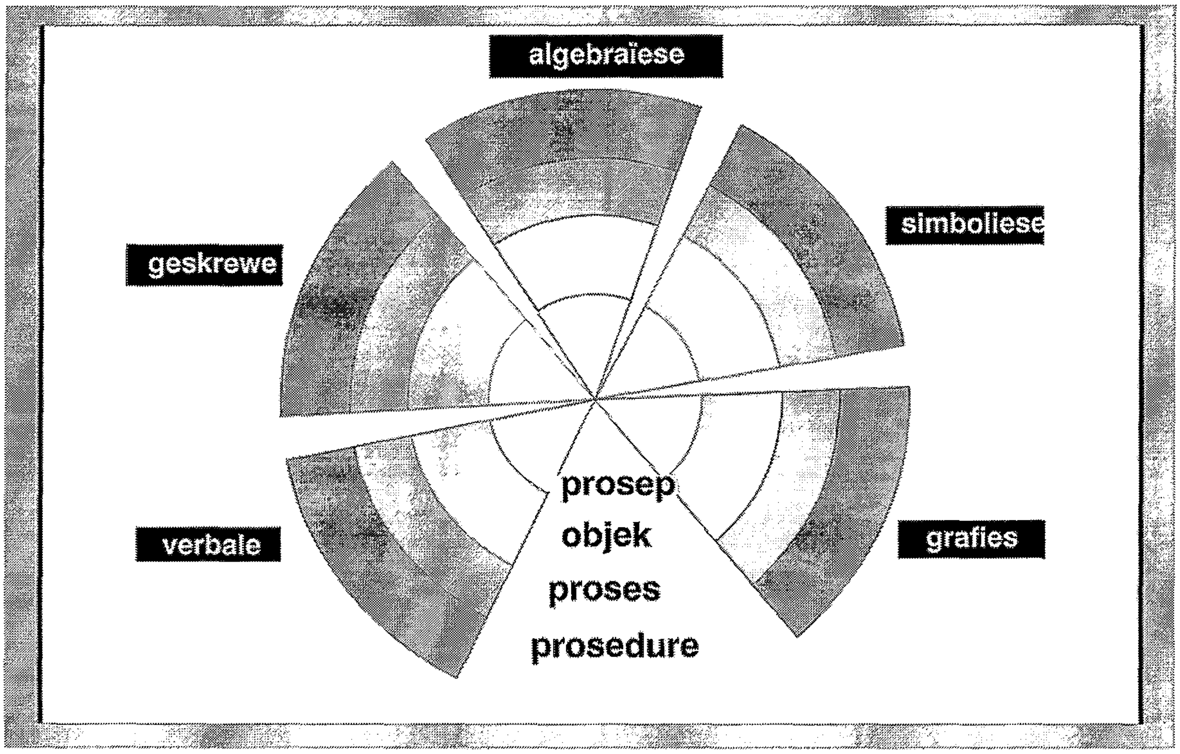
3.5 'n Teoretiese raamwerk vir die konseptualisering van funksies

Die funksiekonsep is een van die mees fundamentele konsepte in wiskunde. Soos uit 3.2-3.4 afgelei kan word, is die funksiekonsep die afgelope paar dekades al 'n navorsingsfokuspunt. Navorsing poog om die leer van die funksiekonsep, asook die probleme wat leerders met die funksiekonsep ervaar, vanuit verskeie teoretiese perspektiewe te ondersoek.

Sfard (1991, 1992) voer aan dat die funksiekonsep op twee maniere beskou kan word: operasioneel as 'n proses en struktureel as 'n objek. Die proses van die leer van konsepte sluit drie fases in, naamlik internalisering, kondensasie en reïfikasie: die leerder kan die konsep as 'n objek in eie reg beskou. Die nuwe entiteit word losgemaak van die proses waardeur dit tot stand gekom het. Die eerste twee fases verteenwoordig die operasionele aspek van die wiskundekonsep en die laaste verteenwoordig die strukturele aspek (Attorps, 2007:2). 'n Vergelyking kan tussen Sfard se "konsep" en Vinner se konsepdefinisie aan die een kant, en Sfard se versameling van beskouings en Vinner se konsepbeeld aan die ander kant, getref word.

Daar is twee duidelik onderskeibare riglyne in die literatuur waarneembaar: Sommige navorsers ondersoek die funksiekonsep as 'n proses en geheue-objek (Breidenbach *et al.*, 1992:247; Dubinsky & Harel, 1992:85; Gray & Tall, 1993:6), terwyl ander navorsers op die veelvuldige voorstelling van die funksie fokus (Kaput, 1992; Leinhardt *et al.*, 1990:1; Keller &

Hirsch, 1998:1; Schwarz & Dreyfus, 1995:260). Sommige navorsers (Scwingendorf *et al.*, 1992:133; DeMarois & Tall, 1999:257) kombineer hierdie denkrigtings deur te fokus op die vertikale groei (die verdigting van die konsep vanaf die proses na die geheue-objek deur die lae van prosedure, proses, objek, prosep) en die horisontale groei (deur verwantskappe tussen die verskillende voorstellingsvorme te maak)(kyk Fig. 3.16):



FIGUUR 3.16 : Groei van die funksiekonsep (DeMarois & Tall, 1999: 261)

Die konseptualisering van 'n funksie moet verby die fase van "proses-begrip" beweeg (kyk 3.3.4), en die konsep moet 'n objek word wat as 'n enkele entiteit gemanipuleer kan word (Sierpinska, 1992:47). 'n Sekere hoeveelheid algebraïese bewustheid op die strukturele vlak (kyk 3.3.1) is nodig vir die verstaan van funksies.

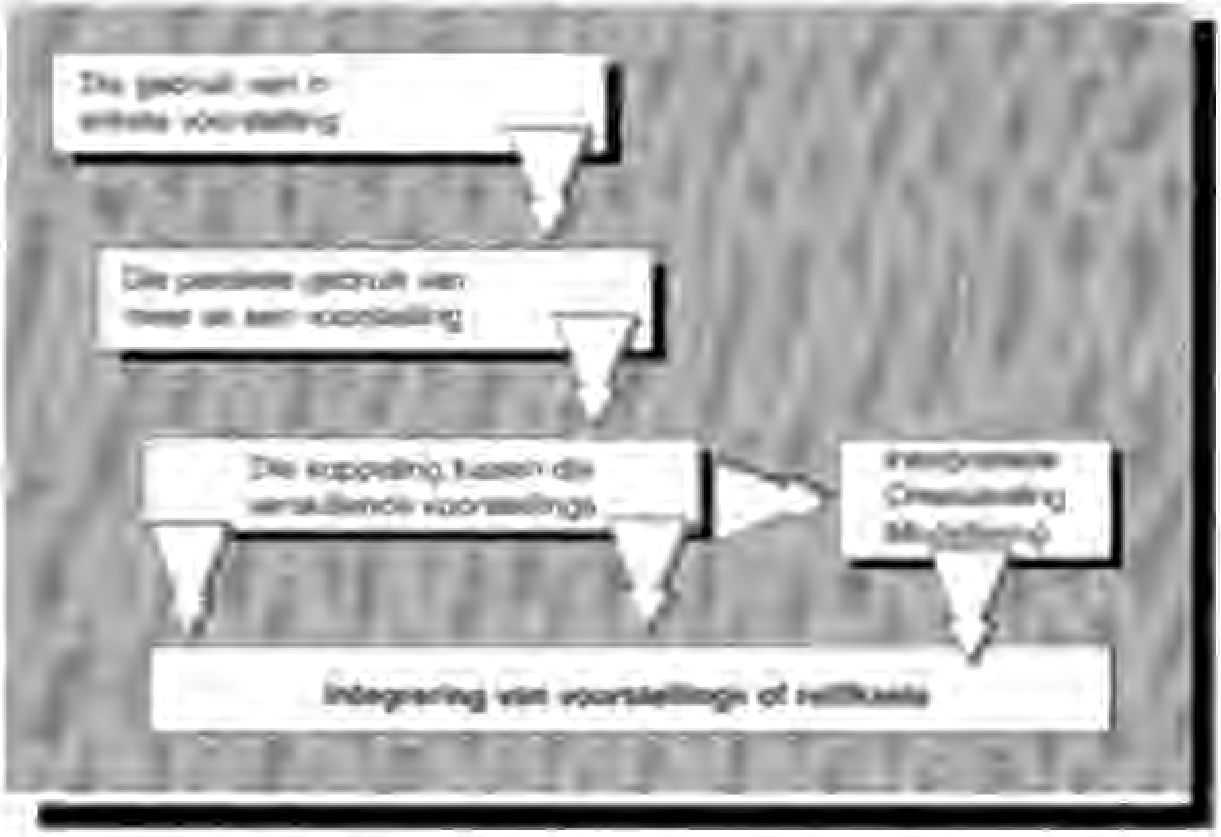
Aangesien die funksiekonsep sentraal staan tot leerders se vermoë om die verwantskap tussen veranderlikes te beskryf, en grafieke te interpreteer en te analiseer, mag die diskrepansie wat daar tussen leerders se konsepdefinisie en konsepbeeld bestaan (kyk 3.3.2), juis 'n verklaring bied vir die feit dat leerders probleme ondervind om funksies op verskillende maniere voor te stel en die ooreenkomste tussen die verskillende maniere van voorstellings raak te sien (Clement, 2001:747-748).

Die model van O'Callaghan toon ooreenkomste met die ander teorieë wat bespreek is. Die proses-objek-tweeledigheid (kyk 3.4.3) word beslis geakkommodeer. Vergelykings kan selfs tussen die aksie-beskouing van funksies en die versameling van prosedurele vaardighede; tussen die prosesbeskouing en die komponente van modellering, interpretasie en omskakeling, en tussen die objekbeskouing en die reïfikasie-komponent getref word. Die model toon ook ooreenkomste met teorieë aangaande veelvuldige voorstellings van funksies. Die model soos aangebied deur O'Callaghan is nie 'n hiërargiese model nie, met ander woorde dit is nie 'n beskrywing van wat leerders doen terwyl hulle tot begrip van funksies kom nie. Dit is eerder 'n weergawe van die onderskeie komponente relevant tot die funksiekonsep in 'n probleemoplossingsomgewing (O'Callaghan, 1998:27).

In die onderhawige studie word van 'n integrasie van die teorieë van O'Callaghan en Dreyfus (1991:39) gebruik gemaak. Alhoewel O'Callaghan se model nie 'n hiërargiese model is nie, bied die vier fases waarin Dreyfus die leerproses verdeel, tog 'n mate van vlakke waardeur leerders in die aanleer van die funksiekonsep beweeg. Dreyfus sien die leerproses as bestaande uit vier fases, naamlik

- die gebruik van 'n enkele (eksterne) voorstelling;
- die parallelle gebruik van meer as een voorstelling;
- die koppeling of omskakeling tussen hierdie parallelle voorstellings;
- die integrering van voorstellings en die gemak waarmee studente tussen die verskillende voorstellingsvorme beweeg (ook genoem reïfikasie).

Diagrammaties kan 'n samevoeging van O'Callaghan en Dreyfus se teorieë soos volg voorgestel word:



FIGUUR 3.17 : Integrasie van O'Callaghan en Dreyfus se teorieë

3.6 Probleme in die leer van funksies en implikasies vir onderrig

Navorsing ten opsigte van die funksiekonsep het die volgende interverwante probleemareas uitgewys :

Diskrepansie wat daar tussen die konsepdefinisie en die konsepbeeld bestaan wat die leerder gebruik wanneer hy 'n probleem oplos (Van Dyke & White, 2004:111; Clement, 2001:745; Dreyfus, 1990:122; Hitt, 1998:127; Tall & Vinner,1981:154) (kyk 3.4.2).

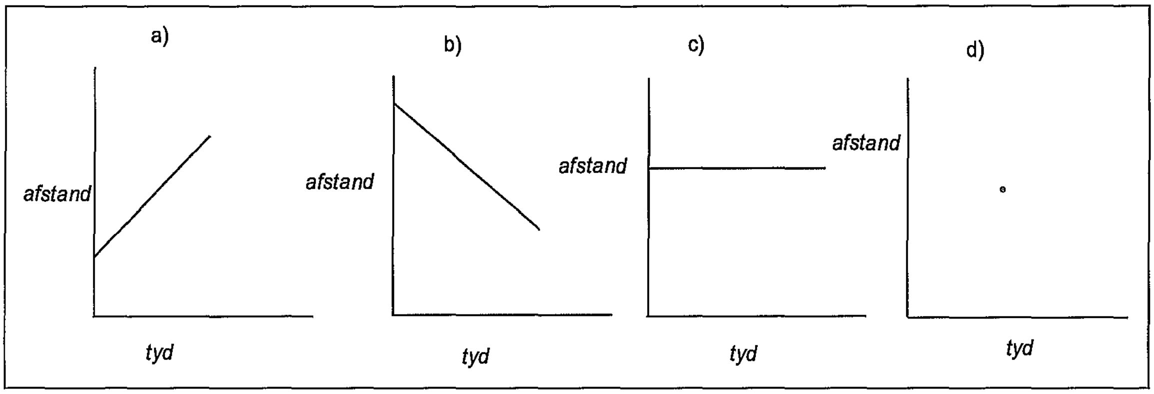
Omskakeling van een voorstellingsvorm na 'n ander

Leerders ondervind probleme om 'n funksie wat in algebraïese vorm gegee is, grafies voor te stel, asook om inligting wat in grafiese vorm gegee is, te interpreteer (Van Dyke & White, 2004:111; Dreyfus, 1990:12), waarskynlik omdat dit leerders aan visuele denkvermoëns ontbreek. Hoërskoolleerders en voornemende- sowel as praktiserende onderwysers ervaar probleme met die omskakeling van een voorstellingsvorm na 'n ander (Gagatsis & Shiakalli, 2004:648; Hitt, 1998:134). Hulle vermy die grafiese voorstellingsvorm van 'n funksie, terwyl hulle die algebraïese voorstellingsvorm verkies (Hitt, 1998:134). Die meer algemene omskakelingstaak behels die skets van 'n grafiek gebaseer op 'n gegewe algebraïese uitdrukking. Hoërskoolleerders word selde gevra om 'n algebraïese uitdrukking vir die grafiese voorstelling van 'n grafiek te gee, of om 'n verbale beskrywing vir 'n algebraïese uitdrukking te gee (Gagatsis & Shiakalli, 2004:648). 'n Moontlike verklaring wat deur Habre en Abboud (2006: 67) vir hierdie gebrekkige visuele denkvermoëns van leerders gegee word, is die tradisionele onderrig-agtergrond waaruit die meeste leerders kom.

Interpretasie

Volgens Dugdale (1993:103) ondervind leerders probleme in die konseptualisering van funksionele verwantskappe en om kwalitatiewe interpretasies van grafieke te maak. Monk (1992:175-176) vind in hierdie verband dat leerders oor die algemeen nie 'n probleem het om spesifieke waardes vanaf 'n grafiek te lees nie, maar dat hulle sukkel om die spoed van 'n motor oor 'n gegewe tydsinterval af te lees. Wanneer van leerders gevra word om grafieke te interpreteer, word hulle probleme met wiskundige beskrywing van die tempo van verandering duidelik (Van Dyke & White, 2004:115). Daar is ook 'n neiging by leerders om grafieke op 'n ikoniese wyse te interpreteer, met ander woorde hulle verwag 'n presiese ooreenkoms tussen die vorm van die grafiek en die situasie waarna die grafiek verwys (Hitt, 1998:132; Dugdale, 1993:109; Monk, 1992:176). Hierdie verskynsel is ook deur Van Dyke en White (2004:115) bevestig met die volgende vraag wat hulle aan leerders gegee het:

Kies 'n grafiek wat by die volgende stelling pas: Dawid staan op 'n sekere afstand vanaf 'n standbeeld.

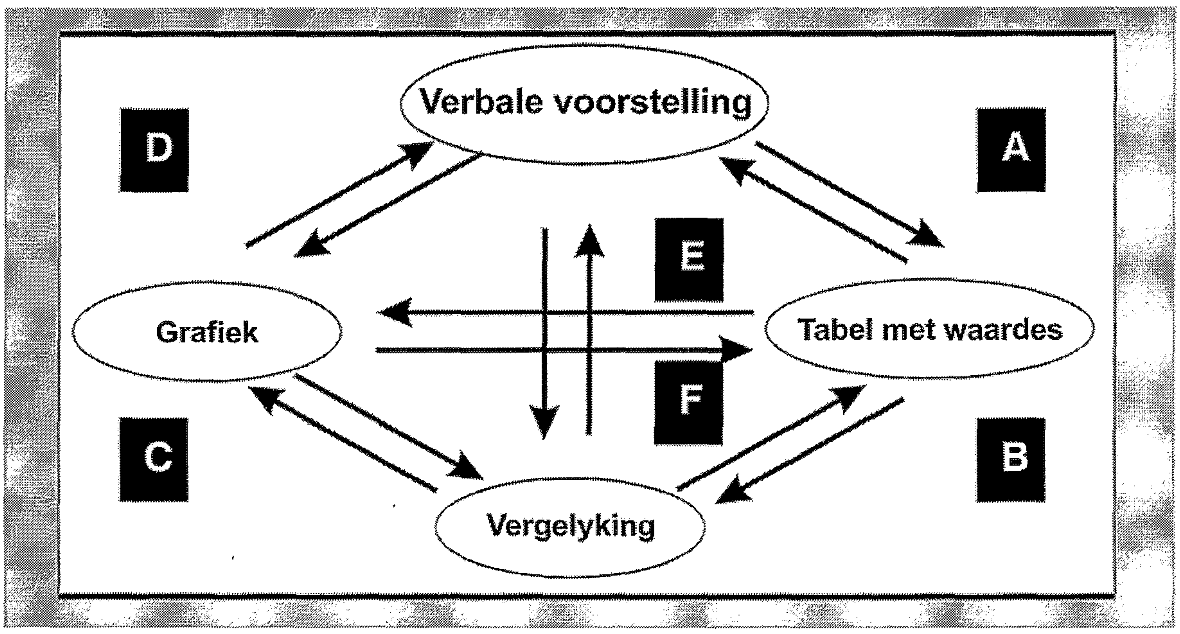


Die meeste leerders het ten gunste van (d) gekies

Reïfikasie: Leerders ondervind probleme om 'n funksie as 'n enkele entiteit en nie slegs as 'n prosedure nie, te beskou (Dreyfus,1990:122).

3.7 Implikasies vir die onderrig van funksies

Clement (2001:747) beveel aan dat tyd spandeer moet word om funksies op verskillende maniere te bespreek. Leerders se eng begrip van en foutiewe aannames omtrent funksies mag deels veroorsaak word deur dit wat hulle as prototipes van funksies in handboeke en in die klaskamer sien. Volgens Van Dyke en Craine (1997:616) vereis die onderrig van funksies meer as om vir leerders 'n realistiese konteks te skep en hulle aan 'n grafiese sakrekenaar bloot te stel. Die verstaan van die funksiekonsep in een voorstellingsvorm waarborg nie die verstaan van die funksiekonsep in ander voorstellingsvorme nie (Even, 1998:524). Voornemende onderwysers moet self die funksiekonsep in sy verskillende voorstellingsvorme verstaan en in staat wees om die nodige omskakelings en verwantskappe tussen voorstellingsvorms te maak (Even, 1990:524; Moschkovich *et al.*, 1993:97; Eisenberg, 1992:159). Die verwantskappe tussen die verskillende voorstellingsvorme moet aan leerders duidelik gemaak word, naamlik 'n verbale voorstelling van die lewenswerklike konteks, 'n tabel met waardes, die grafiese voorstellingsvorm en die vergelykingsvorm. Onderwysers maak dikwels die aanname dat leerders na 'n paar voorbeelde die fundamentele konneksie tussen 'n vergelyking en die ooreenstemmende grafiek maak, maar dit is nie noodwendig die geval nie (Van Dyke & White, 2004:112). 'n Belangrike aspek van die ontwikkeling van die funksiekonsep is nie slegs om te weet watter voorstellingsvorm die mees gepaste een in 'n bepaalde situasie is nie, maar ook die vermoë om van die een voorstellingsvorm na die ander om te skakel. Onderwysers moet dit as 'n belangrike onderrigdoelwit raaksien, en leerders die geleentheid gee om verwantskappe tussen die verskillende voorstellingsvorme te vorm (Knuth, 2000:53). Leerders moet die onderliggende ekwivalensie tussen voorstellings, en ook ekwivalensie binne elke voorstelling verstaan. Om leerders te help om van die een voorstelling na enige ander voorstelling om te skakel, kan enige van twaalf rigtings gekies word:



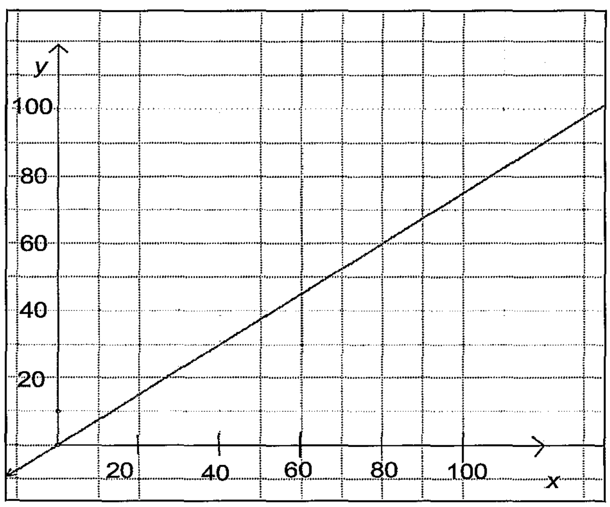
FIGUUR 3.18 : Moontlikhede vir die omskakeling tussen voorstellings van 'n funksie (Van Dyke & Craine, 1997:617)

Voorbeeld van die omskakeling tussen verskillende voorstellingsvorme (Van Dyke & Craine, 1997:617):

'n Winkel het 'n uitverkoping waar 25% afslag op alle items gegee word. In die oefening word die uitverkopingsprys as 'n funksie van die oorspronklike prys beskou. In plaas daarvan dat leerders dadelik die vergelyking of algebraïese uitdrukking moet bepaal, kan hulle eers die tabel met ooreenstemmende waardes voltooi (pyltjie A):

TABEL VAN INVOER-UITVOER-WAARDES	
Invoer (x)	Uitvoer (y)
R0	R0
R10	R7,50
R20	R15
R50	R37,50
R100	R75
R1000	R750

Grafiek:



Algebraïese voorstelling:

Alle pare (x, y) sodat $y = x - 0,25x$

Funksie: $f(x) = x - 0,25x = 0,75x$

Die tabelwaardes kan dan grafies voorgestel word (pyltjie E), hetsy met behulp van 'n grafiese sakrekenaar of met Geometer's Sketchpad® en uiteindelik kan 'n vergelyking bepaal word (pyltjie C). Leerders kan dan waardes uit die tabel, of die koördinate van die grafiek gebruik en in lewenswerklike konteks verduidelik wat die koördinate beteken (pyltjies D en A). Uiteindelik kan hulle ook kontroleer of die algebraïese voorstelling met die verbale voorstelling (pyltjie F) ooreenstem. Vanuit die algebraïese voorstelling kan leerders ook gevra word om die gradiënt van die grafiek in terme van lewenswerklike konteks te verduidelik.

In die lig van die operasionele teenoor die strukturele beskouing van die funksiekonsep (kyk 3.4.1) blyk dit aanvaarbaar te wees om te sê dat so 'n strukturele benadering 'n ernstige bron van probleme in die klaskamer kan wees. In sommige gevalle lê die sleutel tot die probleem in leerders se onvermoë om vir hulleself hierdie abstrakte objekte te skep waaroor die onderwyser met soveel selfvertroue praat. Vir 'n leerder is nie net die funksiekonsep nie, maar ook die meer basiese begrippe van versameling en element te vreemd om met vertroue te gebruik en bewerkings daarop uit te voer. Twee didaktiese beginsels kan hieruit geformuleer word: (1) nuwe konsepte behoort nie in strukturele terme bekendgestel te word nie, en (2) strukturele begrip moet nie vereis word solank die leerder daarsonder kan klaarkom nie (Sfard, 1992:68-69).

Alhoewel die onvermoë van leerders om struktureel te dink omtrent konsepte soos funksies nie die leerder verhoed om matriek met beperkte wiskundekennis te slaag nie, blyk die vorming van strukturele konsepte noodsaaklik te wees vir verdere leer. Daarom, ter wille van daardie leerders wat hul wiskunde-onderrig wel op die een of ander wyse wil voortsit, behoort strukturele denke aangemoedig te word (Sfard, 1992:78). Die blootstelling van leerders aan verskeie voorstellingsvorme kan tot die opgradering van 'n strukturele begrip lei (Sfard, 1992:78-79).

Vanuit 'n konstruktivistiese benadering tot onderrig en leer is dit die onderwyser se taak om wiskunde-leeromgewings daar te stel wat die ondersoek en konstruksie van kennis aanmoedig (Even, 1993:113). Dit is moontlik dat onderwysers in situasies sal beland waar hulle met onbekende probleme te doen kry. Die besluite wat hulle neem, is deels op hulle vakkennis gebaseer. Daarom is dit so belangrik dat voornemende onderwysers 'n grondige konseptuele kennis van die funksiekonsep sal hê.

Sajka (2005:319) lig belangrike wiskundekennis uit waaroor 'n onderwyser (en derhalwe ook die voornemende onderwyser) moet beskik en wat nodig is vir die onderrig van funksies (kyk 2.5.9.1). 'n Onderwyser moet oor 'n grondige kennis van die oorsprong en historiese ontwikkeling van die funksiekonsep insluitende die belangrike eienskappe van die moderne definisie van 'n funksie beskik (Even, 1993:95). Dit is ook belangrik dat onderwysers die verskillende voorstellingsvorms van funksies asook die verwantskappe daartussen ken en kan gebruik (kyk 3.4.5), asook die taal van funksies toepaslik kan gebruik. Dit is belangrik dat 'n onderwyser bekend is met 'n verskeidenheid van maniere waarop 'n funksie benader kan word en die regte keuse in 'n bepaalde konteks kan uitoefen (Even, 1993:113).

3.8 Slot

In hierdie hoofstuk is die funksiekonsep eers in die algemeen bespreek. Daarna is verskillende teorieë ten opsigte van die ontwikkeling van die funksiekonsep bespreek. Uiteindelik is daar 'n vergelyking tussen die teorieë getref om ooreenkomste en verskille uit te wys. Daar is ook 'n teoretiese raamwerk geformuleer vir die doel van hierdie studie, wat bestaan uit 'n integrasie van O'Callaghan en Dreyfus se modelle. Enkele probleme in die leer van die funksiebegrip, asook die onderrigimplikasies wat die konseptuele leer van funksies vir die onderwyser inhou, is ook aangeraak.

In die volgende hoofstuk word die navorsingsontwerp en -metodologie bespreek.