

Vektorintegrasie met toepassings op stogastiese prosesse in Riesz ruimtes

J Zeelie
24698245

Verhandeling voorgelê ter **gedeeltelike** nakoming vir die graad
Magister Scientiae in **Wiskunde** aan die Potchefstroomkampus
van die Noordwes-Universiteit

Studieleier: Prof JJ Grobler
Medestudieleier: Prof JH Fourie

Mei 2016

Die outeur erken dat die opinies, bevindings en gevolgtrekkings of aanbevelings in hierdie publikasie, wat tot stand gekom het deur die ondersteuning van die NRF, die van die outeur is, en die NRF aanvaar geen aanspreeklikheid in hierdie opsig nie.

Uittreksel

Daar is al 'n verskeidenheid van teorieë ontwikkel om die abstrakte Lebesgue integraal te veralgemeen vir funksies of mate wat vektorwaardig is. Ons bestudeer drie van die mees suksesvolle integrasie teorieë, die van Bochner, Bartle en Dobrakov, op 'n eenvormige wyse. Die verskillende integrale word met mekaar vergelyk en ons gebruik die Dobrakov integraal om 'n stogastiese integraal in 'n Riesz ruimte te definieer.

In hoofstuk 1 definieer en bestudeer ons vektorwaardige mate. Hier neem mate hul waardes in 'n Banach ruimte aan. Nie alleen word vektorintegrale ten opsigte van vektormate gedefinieer nie, maar ons kan bewys dat die integrale self ook vektormate is. Die resultate wat ons in hierdie hoofstuk aflei stel ons in staat om konklusies oor vektorintegrale te maak. So sien ons byvoorbeeld in gevolg 1.5.14 op p.54 dat as 'n ry van σ -additiewe vektormate op 'n σ -algebra gelykmatig konvergeer, dan is die limiet weer 'n σ -additiewe vektormaat. Hierdie resultaat is belangrik vir die teorie van die Dobrakov integraal.

Hoofstuk 2 is 'n uitbreiding van hoofstuk 1 en daarin kyk ons na mate wat hul waardes in 'n ruimte van begrensde lineêre operatore tussen Banach ruimtes aanneem. Hierdie ruimte is natuurlik ook self 'n Banach ruimte, maar hier werk ons met die konvergensie van rye in die sterk operator topologie in plaas van die norm topologie. Die gevolg is dat σ -additiwiteit 'n verskillende betekenis het vir operatormate as vir vektormate.

Geassosieer met 'n vektormaat of operatormaat is daar die bykomende begrippe van die variasie, skalaarsemivariasie en semivariasie van die maat. Hierdie versamelingsfunksies is almal submate. In hoofstuk 3 kyk ons eerstens na die verskillende maniere waarop 'n ry funksies ten opsigte van 'n submaat kan konvergeer. Tweedens kyk ons na verskillende tipes trapfunksies. Rye van hierdie verskillende tipes trapfunksies kan dan op een van die verskillende wyses na 'n funksie konvergeer. So 'n limietfunksie word gedefinieer as 'n meetbare funksie. Afhangende van die aard van die trapfunksies en die aard van konvergensie kan verskillende meetbare funksies sekere verhoudings met mekaar hê. Die hoofdoel van hoofstuk 3 is dan om hierdie verhoudings te ondersoek. Ons ondersoek ook onder watter voorwaardes 'n funksie meetbaar is. Een van die resultate wat uit hierdie afdeling volg is stelling 3.2.22 op p.84, 'n meer algemene weergawe van Pettis se meetbaarheidstelling (stelling 4.1.5 op p.89).

In hoofstuk 3 het ons klasse van meetbare funksies gekry waarvoor ons verskillende vektorintegrale kan definieer. In hoofstukke 4, 5 en 6 bestudeer ons die integrasieteorieë van Bochner, Bartle en Dobrakov. Die Bochner integraal word vir meetbare vektorwaardige funksies met betrekking tot 'n skalaarmaat gedefinieer. Ons sien dat baie van die eienskappe van die abstrakte Lebesgue integraal ook oordra na die Bochner integraal. So kry ons byvoorbeeld 'n gedomineerde konver-

gensiestelling vir die Bochner integraal. Vir die geval waar ons 'n eindige maat het, gebruik ons Hille se stelling (stelling 4.2.9 op p.99) om 'n weergawe van die middelwaarde stelling vir die Bochner integraal af te lei.

Om die integraal vir vektorwaardige funksies ten opsigte van 'n vektorwaardige maat te definieer is dit nodig dat daar een of ander produk op die twee vektorruimtes bestaan. Bartle beskou die geval waar daar 'n bilineêre afbeelding tussen Banach ruimtes bestaan. In hoofstuk 5 definieer ons dan die Bartle integraal vir funksies wat hul waardes in die eerste Banach ruimte aanneem ten opsigte van 'n maat wat sy waardes in die tweede Banach ruimte aanneem. Alhoewel Lebesgue se konvergensiestelling nie vir die Bartle integraal geld nie, kan ons Vitali se stelling (stelling 5.2.10 op p.113) gebruik om 'n tipe begrensde konvergensiestelling (stelling 5.2.14 op p.115) af te lei.

Die bilineêre afbeelding van Bartle definieer begrensde lineêre operatore op Banach ruimtes. Enige van die vektormate waarmee Bartle werk is dus ook 'n operatormaat. Die σ -additiwiteit van 'n operatormaat is egter 'n meer algemene konsep as die σ -additiwiteit van 'n vektormaat. In hoofstuk 6 ondersoek ons die Dobrakov integraal. Dobrakov ontwikkel sy integrasieteorie vir vektorwaardige funksies met betrekking tot 'n σ -additiewe operatormaat. Een van die mooi resultate wat ons vir die Dobrakov integraal kry, is 'n stelling oor die omruil van die integraal en die limiet (stelling 6.3.14 op p.146).

Vir al drie integrasieteorieë wat ons bestudeer word 'n integreerbare funksie gedefinieer as 'n meetbare funksie wat aan sekere voorwaardes voldoen. In hoofstuk 7 gebruik ons die resultate wat ons in hoofstuk 3 gekry het om die klasse van integreerbare funksies vir die verskillende vektorintegrale te vergelyk. Al drie integrale veralgemeen die Lebesgue integraal. Verder sluit die Dobrakov integraal die Bochner integraal en die σ -additiewe geval van die Bartle integraal in. In die belangrike geval waar die semivariasie van 'n σ -additiewe operatormaat, eindig en kontinu is, stem die Bartle en Dobrakov integrale presies ooreen.

Die studie van stogastiese prosesse in Riesz ruimtes benodig 'n integraal waar die integrand 'n stogastiese proses is, en die maat gelewer word deur 'n stygende stogastiese proses. Beide die integrand en die maat is dus vektorwaardig. In hoofstuk 8 gebruik ons die teorie van Dobrakov om so 'n integraal te definieer.

Sleutelwoorde: Vektormaat, operatormaat, meetbare funksie, Bochner integraal, Bartle integraal, Dobrakov integraal, stogastiese integraal, Riesz ruimte.

Dankbetuiging

Ek bedank NRF vir die finansiële ondersteuning wat hierdie verhandeling moontlik gemaak het.

Ek wil graag al my dosente bedank vir die vorming van my wiskundige vermoë. Ek wil ook my kollega E.M. Klem bedank vir sy hulp en belangstelling. Dankie dat ek altyd by jou kon uitvind watter prosedures om te volg. My grootste dank en respek is verskuldig aan my studieleier Professor Koos Grobler. U kennis en insig het my keer op keer verstom en u liefde vir die vak is 'n inspirasie vir my. Dankie vir al die ure wat bestee is aan die my verhandeling, ek sou dit nooit sonder u kon voltooi nie. Dankie vir die taalversorging van my verhandeling, ek weet nou nog nie hoe u sommige van die tikfoute raakgesien het nie. My waardering is egter nie alleen vir die wiskundige ondersteuning wat ek van u ontvang het nie, maar veral ook vir u waardigheid en nederigheid. Ek het ook al ons nie-wiskundige gesprekke terdeë geniet, u algemene kennis en staaltjies het elke ontmoeting interessant gemaak. Dit is laastens vir my 'n voorreg om, met die grootste respek, te kan sê dat u hierdie jaar nie net my studieleier was nie, maar my vriend.

Volgende wil ek graag my vriende en familie vir hul ondersteuning bedank. Dankie Tiaan dat jy my altyd aangemoedig het om “vas te byt”. Dankie aan my familie wat op ons whatsapp-groep my gehelp het met die vertaling van terme en veral ook met die spelling. Dankie vir Oupa se liefde vir die taal en sy mense. Dit het 'n groot rol gespeel in die vorming van my eie liefde vir ons erfenis. Dit is hierdie lojaliteit wat ook tot die besluit gelei het om my verhandeling in Afrikaans te doen. Geen woorde doen gestel aan die dank wat ek aan my ouers verskuldig is nie. Dankie vir die onvoorwaardelike liefde wat ek ontvang. Dankie vir Pa se stilswye vertroue in my en vir die wysheid en ondervinding waarop ek kan staatmaak. Dankie vir Ma se liefde en sorg. Dankie vir rustigheid en sin vir humor in tye van my stres.

Laastens en grootstens wil ek my Koning en Verlosser, die Skepper van wiskunde, dank. Dit is 'n voorreg om die skoonheid van die skepping deur wiskunde te ontdek en ek wil aan Jesus Christus alle lof en aanbidding gee. Ek ag dit as roof om enige eer vir hierdie verhandeling vir myself te aanvaar. Dit is die lewensenergie en genade wat ek daadliks van die Here ontvang het, wat dit vir my moontlik gemaak het om hierdie onderneming te voltooi.

“To whom then will you liken Me, Or to whom shall I be equal?” says the Holy One. Lift up your eyes on high, and see who has created these things,” Isaiah 40:25-26 (NKJV).

J Zeelie
Potchefstroom, 2015

Inhoudsopgawe

Inhoudsopgawe	v
1 Vektormate	3
1.1 Definisie en basiese eienskappe	3
1.2 'n Elementêre vektorintegraal	16
1.3 Sterk additiewe vektormate	22
1.4 Die Nikodým begrensdeheidstelling	35
1.5 Die struktuur van vektormate	41
2 Operatormate	56
2.1 Definisie en basiese eienskappe	56
2.2 'n Spesiale geval	67
3 Meetbare funksies	69
3.1 Tipes konvergensie en Egoroff se stelling	69
3.2 Borel -, Σ - en ρ -meetbare funksies	76
4 Die Bochner integraal	88
4.1 μ -Meetbare funksies	88
4.2 Die integraal van 'n μ -meetbare funksie	92
5 Die Bartle integraal	104
5.1 ν -Meetbare funksies	104
5.2 Die integraal van ν -meetbare funksies	106
5.3 Die σ -additiewe geval	118
6 Die Dobrakov integraal	122
6.1 ξ -Meetbare funksies	122
6.2 Die integraal van 'n meetbare trapfunksie	127
6.3 Die integraal van 'n ξ -meetbare funksie	132
7 Vergelyking van vektorintegrale	147
7.1 Eienskappe van die Lebesgue integraal	147
7.2 Dobrakov vs. ander integrale	147
7.2.1 Dobrakov vs. Lebesgue	147
7.2.2 Dobrakov vs. Bochner	150
7.2.3 Dobrakov vs. Bartle	152
7.3 Bartle vs. ander integrale	156
7.3.1 Bartle vs. Lebesgue	156

7.3.2	Bartle vs. Bochner	157
7.4	Bochner vs. ander integrale	158
7.4.1	Bochner vs. Lebesgue	158
8	Die stogastiese integraal	159
8.1	Definisies en agtergrond	159
8.1.1	Riesz ruimte agtergrond	160
8.1.2	Agtergrond oor stogastiese prosesse in Riesz ruimtes	160
8.1.3	Die ruimtes $\mathcal{L}^1$ en $\mathcal{L}^2$	161
8.1.4	Die vektormaat deur 'n stygende stelsel voortgebring	162
8.2	Die vektorintegraal in 'n Riesz ruimte	165
8.2.1	Die maat ν_A en verbonde konsepte	165
8.2.2	Die Dobrakov integraal van (x_t) ten opsigte van ν_A	166
	Bibliografie	170
	Indeks	173

Inleiding

Die abstrakte Lebesgue integraal is al op verskeie maniere veralgemeen. Beide die maat en die funksie wat integreer word speel 'n rol hierin.

Daar is verskillende integrale wat gedefinieer is vir funksies wat meer algemene waardeversamelings as die skalare (dit is, die reële of komplekse getalle) het. L.M. Graves [17], N. Dunford [11], G.D. Birkhoff [6], I.M. Gelfand [15] en B.J. Pettis [31] definieer almal integrale vir funksies wat hul waardes in 'n Banachruimte aanneem, terwyl R.S. Phillips [32] die nog meer algemene geval beskou waar die funksies hul waardes in 'n topologiese vektorruimte aanneem. Die teorie wat egter die meeste toepassings vind in funksionaalanalise is die van Bochner. Ons gee dus die meeste aandag aan sy integraal.

In al die gevalle sover is die maat 'n skalaarwaardige maat. Aangesien daar in 'n Banachruimte 'n vermenigvuldiging gedefinieer is vir skalare met vektore, is dit dus voor die hand liggend om met die vorming van Riemann somme, die maat skalaarwaardes te laat aanneem as die funksie vektorwaardes aanneem. Natuurlik kan die omgekeerde ook plaasvind: die maat kan vektorwaardig wees en in hierdie geval is dit weer maklik om Riemann somme te vorm ten opsigte van 'n skalaarwaardige funksie. N. Dunford [12] definieer so 'n tipe integraal en R.G. Bartle, N. Dunford en J. Schwartz [4] ontwikkel Lebesgue-tipe integrasieteorieë vir hierdie geval.

Daar is ook integrasieteorieë wat ontwikkel is vir eindig additiewe mate. Hildebrandt [24] en G. Fichtenholz en L. Kantorovitch [14] definieer beide 'n integraal vir begrensde reëelwaardige funksies ten opsigte van 'n reëelwaardige maat wat eindig additief is.

Laastens is daar ook verskeie teorieë aangebied om integrale vir vektorwaardige funksies ten opsigte van vektorwaardige mate te definieer. In sulke gevalle is dit nodig dat daar 'n bilineêre afbeelding moet bestaan wat op 'n manier 'n vermenigvuldiging van vektore bewerkstellig. So 'n bilineêre afbeelding definieer dan direk 'n lineêre operator van Banach ruimtes. Voorbeelde hiervan is die werk van M. Gowurin [16], C.E. Rickart [34] en G.B. Price [33]. Rickart definieer 'n integraal vir funksies wat waardes in 'n topologiese vektorruimte het en Price beskou selfs meerwaardige funksies. Twee integrale wat hier 'n belangrike rol speel is die van R.G. Bartle en meer algemeen, die van I. Dobrakov. Tesame met die Bochner integraal is hierdie die ander twee integrale waarop ons fokus. Op p.58 van [8] vind ons die volgende aanhaling in verband met die Bartle integraal: "Possibly workers in the theory of vector measures would be better off if they attempted to use the Bartle integral rather than inventing their own." In afdeling 5 van [3] en ook afdeling II.5 van [8] word daar 'n goeie oorsig oor verskillende tipes integrale gegee.

Ons sien dus dat daar 'n wye verskeidenheid van benaderings gevolg kan word in die definisie van 'n vektorwaardige integraal. Dit is dikwels moeilik om verskillende integrale met mekaar te vergelyk aangesien die benaderings soms drasties

kan verskil. Verder word die integrasieteorie dikwels nie as 'n eenheid aangebied nie met baie verwysings na vorige werke. Dit maak dit dikwels moeilik om oor 'n sekere integraal na te lees.

Die doel van hierdie verhandeling is om drie van die mees nuttige vektorintegrale, die Bochner, Bartle en Dobrakov integrale op 'n eenvormige wyse te ontwikkel. Dit stel dan vektorintegrasie beskikbaar as bruikbare gereedskap om gebruik te word in ander gebiede binne die wiskunde. 'n Integraal word algemeen vir 'n meetbare funksie gedefinieer. Aangesien die verskillende vektorintegrale verskillende ontwikkelings volg, moet meetbare funksies op verskillende maniere gedefinieer word. Hierdie definisies word so geformuleer dat die integraal van die funksies sal bestaan. In hoofstuk 3 neem ons 'n meer algemene benadering en definieer ons verskeie algemene tipes meetbare funksies. Die meetbare funksies wat benodig word vir die Bochner, Bartle en Dobrakov integraal is dan spesiale gevalle van een van hierdie tipe meetbare funksies. Ons kyk ook na die verband wat daar tussen hierdie tipe meetbare funksies bestaan. Dit stel ons dan in staat om in hoofstuk 7 op 'n geriefliker wyse die verskeie tipes vektorintegrale met mekaar te vergelyk.

In hoofstukke 1 en 2 word die teorie van vektor- en operatormate ontwikkel. Dit word benodig in hoofstukke 4, 5 en 6 waar ons die Bochner, Bartle en Dobrakov integrale ten opsigte van 'n skalarwaardige, vektorwaardige en operatorwaardige maat onderskeidelik, ontwikkel. Nadat die teorie van vektorintegrasie in hierdie hoofstukke ontwikkel is, word daar in hoofstuk 8 'n toepassing van die Dobrakov integraal in 'n topologiese Riesz ruimte gegee wat nodig is vir die definisie van die stochastiese integraal van Itô.

Ten slotte wys ons die leser daarop dat ons die skryfstyl van A.Wilansky implementeer (sien [36]). Hierdie manier van skryf poog om die loop van 'n bewys nie onnodig te onderbreek nie. Dit word gedoen deur die bewys van tegniese bewerings tussen blokhakies te plaas en die ingeligde leser kan dit dikwels oorslaan.

Hoofstuk 1

Vektormate

1.1 Definisie en basiese eienskappe

Laat X, Y en Z deurgaans Banach ruimtes wees en laat $\mathbb{K}$ die skalaarveld $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ wees. Laat Ω 'n willekeurige versameling wees. Ons laat $\mathcal{F}$ 'n algebra van deelversamelings van Ω , en Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Onthou 'n familie $\mathcal{F}$, van deelversamelings van Ω , is 'n algebra as

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $\Omega \setminus E \in \mathcal{F}$ vir alle $E \in \mathcal{F}$;
3. $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{F}$ vir alle $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{F}$.

Hierbo dui $\Omega \setminus E$ die komplement van die versameling E aan. 'n σ -Algebra is 'n algebra wat geslote is onder die neem van aftelbare verenigings. 'n Familie Σ is dus 'n σ -algebra as dit aan voorwaardes 1 en 2 hierbo voldoen sowel as

3 σ . as $(E_n) \subseteq \Sigma$, dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

Die notasie $(E_n) \subseteq \Sigma$ beteken dat $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ 'n ry versamelings uit Σ is. Die elemente van $\mathcal{F}$ of Σ noem ons meetbare versamelings. Ons gebruik die notasie $\mathcal{I}_E$ om die indikatorfunksie van 'n versameling E aan te dui, dit wil sê

$$\mathcal{I}_E(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{as } \omega \notin E \\ 1 & \text{as } \omega \in E \end{cases}$$

'n Funksie wat op 'n familie van deelversamelings van Ω gedefinieer is, noem ons 'n versamelingsfunksie. 'n Nie-negatiewe versamelingsfunksie $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is 'n maat as μ aftelbaar additief (σ -additief) is en $\mu(\emptyset) = 0$. Ons definieer nou 'n maat wat sy waardes in 'n meer algemene vektorruimte (spesifiek die Banach ruimte X) aanneem. Ons noem só 'n maat 'n vektorwaardige maat of net 'n vektormaat.

Definisie 1.1.1. (Vektormaat)(Definisie 1 p.1, [8])

'n Vektormaat is 'n versamelingsfunksie $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$, met die eienskap dat as E en F twee disjunkte versamelings uit $\mathcal{F}$ is, dan is

$$\nu(E_1 \cup E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2).$$

As 'n versamelingsfunksie aan die bostaande eienskap voldoen, dan sê ons die funksie is eindig additief (of net additief). 'n Vektormaat is dus 'n additiewe vektorwaardige versamelingsfunksie. As ons voortaan van 'n maat praat, dan bedoel ons 'n reëelwaardige maat. In die klasieke geval is 'n maat per definisie aftelbaar additief. 'n Vektormaat is egter net additief. Verder word daar ook nie in die definisie vereis dat $\nu(\emptyset) = 0$ nie. Dit volg egter direk vanuit die additiwiteit van 'n vektormaat. Hierdie is een van die eienskappe van vektormate wat in die volgende proposisie saamgevat word.

Proposisie 1.1.2. (Eienskappe van 'n vektormaat)

Vir 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ geld die volgende bewerings:

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. as $E, F \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq F$, dan is $\nu(F \setminus E) = \nu(F) - \nu(E)$;
3. as $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{F}$ paargewys disjunkte versamelings is, dan is

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \nu(E_i).$$

Bewys. Neem aan die versamelings E, F en $E_1, E_2, \dots, E_n$ voldoen aan die aannames wat in die proposisie gemaak word.

1. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ en $\emptyset$ is disjunkt met $\emptyset$. Dus is $\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset) + \nu(\emptyset)$ en gevolglik is $0 = \nu(\emptyset) - \nu(\emptyset) = (\nu(\emptyset) + \nu(\emptyset)) - \nu(\emptyset) = \nu(\emptyset)$.
2. Aangesien $E \subseteq F$, is $(F \setminus E) \cup E$ 'n verdeling van F in twee disjunkte versamelings. Gevolglik is $\nu(F) = \nu(F \setminus E) + \nu(E)$ en dus is $\nu(F \setminus E) = \nu(F) - \nu(E)$.
3. Dit volg deur induksie op n , die aantal disjunkte versamelings, toe te pas. $\square$

As 'n vektormaat ν wel aftelbaar additief is, dan sê ons ν is 'n σ -additiewe vektormaat. Aangesien ons op hierdie stadium die ontwikkeling vir vektormate op 'n algebra $\mathcal{F}$ doen, is die vereniging van 'n ry versamelings $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ nie noodwendig weer in $\mathcal{F}$ nie. As ons op 'n σ -algebra Σ werk, dan is dit natuurlik altyd waar dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.

Definisie 1.1.3. (σ -additiewe vektormaat)(Definisie 1 p.1, [8])

'n Vektormaat ν word σ -additief genoem as dit vir elke ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ van paargewys disjunkte versamelings waarvoor $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$, geld dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^k \nu(E_n) \right\| = 0.$$

Met ander woorde $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$.

Hierbo is $\|\cdot\|$ die norm van die Banach ruimte X . Dus, wanneer ons, soos in die gelykheid hierbo, $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ skryf, beteken dit dat die konvergensie van die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ in die norm topologie van X plaasvind.

Ons kyk nou na voorbeelde van (eindig additiewe) vektormate en σ -additiewe vektormate.

Voorbeeld 1.1.4. (Eindig additiewe vektormaat) (Voorbeeld 2 p.2, [8])

Laat $\Omega = [0, 1]$, laat Σ die Lebesgue meetbare deelversamelings van $[0, 1]$, en laat λ die Lebesgue maat op Σ wees. Laat $L^\infty[0, 1]$ die versameling van alle Borel-meetbare funksies $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ wees wat λ -essensiëel begrens is en laat $T : L^\infty[0, 1] \rightarrow X$ 'n kontinue lineêre operator wees. Definieer 'n afbeelding $\nu : \Sigma \rightarrow X$ deur

$$\nu(E) = T(\mathcal{I}_E).$$

As E_1 en E_2 twee disjunkte versameling is, dan is $\mathcal{I}_{E_1 \cup E_2} = \mathcal{I}_{E_1} + \mathcal{I}_{E_2}$ en gevolglik is

$$\nu(E_1 \cup E_2) = T(\mathcal{I}_{E_1 \cup E_2}) = T(\mathcal{I}_{E_1} + \mathcal{I}_{E_2}) = T(\mathcal{I}_{E_1}) + T(\mathcal{I}_{E_2}) = \nu(E_1) + \nu(E_2).$$

Dit wys dat ν 'n vektormaat is. Dit is egter nie noodwendig 'n σ -additiewe vektormaat nie.

Beskou die ruimte $C[0, 1] \subseteq L^\infty[0, 1]$ van kontinue funksies $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$. Vir enige $x \in [0, 1]$, definieer die kontinue lineêre funksionaal $\delta_x : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ deur $\delta_x(f) = f(x)$. Brei δ_x deur die Hahn-Banach stelling uit tot die hele $L^\infty[0, 1]$. Dan is $\delta_x : L^\infty \rightarrow \mathbb{K}$ 'n kontinue lineêre operator (funksionaal). Die vektormaat ν is dus die afbeelding $\nu : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ gegee deur

$$\nu(E) = \delta_x(\mathcal{I}_E).$$

Neem nou $x = 1$ en laat (E_n) 'n ry van disjunkte links-geslote, regs-ope intervalle wees sodanig dat $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = [0, 1)$. Aangesien ons met die Lebesgue-maat λ werk, is die funksies $\mathcal{I}_{[0,1)}$ en $\mathcal{I}_{[0,1]}$ λ -byna oral gelyk aan mekaar. Dit beteken dat $\mathcal{I}_{[0,1)}$ en $\mathcal{I}_{[0,1]}$ dieselfde element in $L^\infty[0, 1]$ is. Dus is

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \nu([0, 1)) = \delta_1(\mathcal{I}_{[0,1)}) = \delta_1(\mathcal{I}_{[0,1]}) = 1.$$

Maar $\sum_{n=1}^k \nu(E_n) = 0$ vir alle k . Dit wys dat ν nie σ -additief is nie.

Nog 'n voorbeeld van 'n vektormaat wat nie σ -additief is nie word gekry deur die operator T as die identiteitsoperator op $L^\infty[0, 1]$ te neem (met $X = L^\infty[0, 1]$). Dan is $\nu(E) = \mathcal{I}_E$. As (E_n) nou 'n ry disjunkte meetbare versamelings is, dan is

$$\left\| \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) - \sum_{n=1}^k \nu(E_n) \right\|_\infty = \|\mathcal{I}_{F_k}\|_\infty = 1$$

vir alle k , waar $F_k = \bigcup_{n=k+1}^\infty E_n$. □

Voorbeeld 1.1.5. (σ -Additiewe vektormaat) (Voorbeeld 3 p.2, [8])

Beskou weer die meetbare ruimte $([0, 1], \Sigma, \lambda)$ van voorbeeld 1.1.4. Laat T hierdie keer 'n begrensde lineêre operator $L_1[0, 1] \rightarrow X$ wees. Dan is $\nu(E) := T(\mathcal{I}_E)$ 'n vektormaat wat ook σ -additief is. Vir enige $E \in \Sigma$ weet ons dat

$$\|\nu(E)\| = \|T(\mathcal{I}_E)\| \leq \lambda(E)\|T\|.$$

As $(E_n) \subseteq \Sigma$ nou 'n ry van disjunkte versamelings is, dan is

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) - \sum_{n=1}^k \nu(E_n) \right\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nu\left(\bigcup_{n=k+1}^\infty E_n\right) \right\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=k+1}^\infty E_n\right) \|T\| = 0 \|T\| = 0. \end{aligned}$$

So, vir die geval waar $T : L_1[0, 1] \rightarrow X$, sien ons dat ν 'n σ -additiewe vektormaat is. $\square$

As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n betekende maat is, dan word die positiewe en negatiewe variasie van μ oor 'n versameling $E \in \Sigma$ gegee deur

$$\begin{aligned}\mu^+(E) &:= \sup\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subseteq E\}, \\ \mu^-(E) &:= -\inf\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subseteq E\}.\end{aligned}$$

Dan is μ^+ en μ^- mate op Σ en $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Die totale variasie van μ word gedefinieer as $|\nu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$ vir $E \in \Sigma$. Dit is dan moontlik om te bewys dat

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^r |\mu(E \cap E_i)| \quad (1.1.1)$$

waar die supremum oor alle eindige verdelings van Ω in disjunkte meetbare versamelings $E_1, E_2, \dots, E_r$ geneem word.

Om ons skryfwerk te vergemaklik gebruik ons die volgende notasie: laat $D^{\mathcal{F}}$ die versameling van alle eindige verdelings van die ruimte Ω in disjunkte versamelings $E_1, E_2, \dots, E_r \in \mathcal{F}$ aandui (as ons op 'n σ -algebra Σ werk dan is D^{Σ} die ooreenstemmende versameling). Dus skryf ons $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ om te sê dat $E_1, E_2, \dots, E_r \in \mathcal{F}$ vir een of ander $r \in \mathbb{N}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ as $i \neq j$ en $\Omega = \bigcup_{i=1}^r E_i$.

Die variasie van 'n vektormaat word nou na analogie van formule 1.1.1 gedefinieer.

Definisie 1.1.6. (Variasie van 'n vektormaat)(Definisie 4 p.2, [8])

Die variasie van 'n vektormaat ν is die nie-negatiewe funksie $|\nu| : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieer vir 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ deur

$$|\nu|(E) = \sup_{(E_i) \in D^{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\|.$$

As $|\nu|(\Omega) < \infty$, dan sê ons dat ν 'n vektormaat van begrensde variasie is.

Voorbeeld 1.1.7. (Vektormaat van begrensde variasie)(Voorbeeld 5, p.2, [8])

Beskou die σ -additiewe vektormaat $\nu(E) = T(\mathcal{I}_E)$ wat ons in voorbeeld 1.1.5 gesien het. Aangesien $\|\nu(E)\| \leq \|T\|\lambda(E)$ vir elke Lebesgue meetbare versameling E volg, deur die supremum oor verdelings $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ te neem, dat

$$\begin{aligned}|\nu|(E) &= \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r \lambda(E \cap E_i) \|T\| = \sup \lambda \left(E \cap \bigcup_{i=1}^r E_i \right) \|T\| = \lambda(E) \|T\|.\end{aligned}$$

In die besonder geld dat $|\nu|([0, 1]) \leq \lambda([0, 1]) \|T\| = \|T\| < \infty$. $\square$

Voorbeeld 1.1.8. (Vektormaat van onbegrensde variasie)(Voorbeeld 6 p.2, [8])

Werk met die Lebesgue maatuimte $([0, 1], \Sigma, \lambda)$ en definieer die vektormaat ν deur $\nu(E) = \mathcal{I}_E$ (ν is een van die eindig additiewe vektormate wat in voorbeeld 1.1.4 voorkom, met $X = L^\infty[0, 1]$ en $T = I : L_\infty[0, 1] \rightarrow L_\infty[0, 1]$ wat die identiteits-afbeelding is). Neem nou enige meetbare versameling E met $\lambda(E) > 0$ en kies 'n disjunkte ry $(E_i) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $\lambda(E \cap E_i) > 0$ vir elke i en $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Vir elke $n \in \mathbb{N}$, laat π_n die verdeling $\{E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, \bigcup_{i=n}^\infty E_i\}$ wees. Dan is $\pi_n \in D^\Sigma$ vir elke n en

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \pi_n} \|\nu(E \cap A)\| &= \sum_{i=1}^{n-1} \|\nu(E \cap E_i)\| + \left\| \nu \left(E \cap \bigcup_{i=n}^\infty E_i \right) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathcal{I}_{E \cap E_i}\| + \|\mathcal{I}_{E \cap \bigcup_{i=n}^\infty E_i}\| = n - 1 + 1 = n. \end{aligned}$$

Vir elke n is daar dus 'n verdeling in D^Σ , naamlik π_n , sodanig dat $\sum_{A \in \pi_n} \|\nu(E \cap A)\| = n$. Dus, deur die supremum oor alle verdelings uit D^Σ te neem, volg $|\nu|(E) = \infty$. $\square$

As $\rho : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ een of ander versamelingsfunksie is en $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van disjunkte versamelings is waarvoor $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{F}$, dan sê ons ρ is σ -subadditief as

$$\rho \left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n \right) \leq \sum_{n=1}^\infty \rho(E_n).$$

As die omgekeerde ongelykheid geld, dan sê ons ρ is σ -supadditief. Verder, as $\rho(E) \leq \rho(F)$ vir enige twee meetbare versamelings $E \subseteq F$, dan sê ons ρ is *monotoon*.

Die volgende proposisie gee vir ons die basiese eienskappe van die variasie van 'n vektormaat. Onder andere sien ons dat die variasie van 'n vektormaat self weer eindig additief is.

Proposisie 1.1.9. (Eienskappe van $|\nu|$)

Vir die variasie van 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ geld die volgende bewerings:

1. $|\nu|(\emptyset) = 0$;
2. $|\nu|$ is additief;
3. $|\nu|$ is monotoon;
4. $|\nu|$ is σ -supadditief;
5. $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$;
6. as ν_1 en ν_2 twee vektormate is dan is $|\nu_1 + \nu_2|(E) \leq |\nu_1|(E) + |\nu_2|(E)$ vir alle $E \in \Sigma$.

Bewys. Neem regdeur die bewys aan dat ons die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\mathcal{F}$ neem.

1. $|\nu|(\emptyset) = \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(\emptyset \cap E_i)\| = \sum_{i=1}^r \|0\| = 0$.

2. Neem aan $E, F \in \mathcal{F}$ is twee disjunkte versamelings. Vanuit die definisie van $|\nu|$ en die additiwiteit van ν kry ons

$$\begin{aligned} |\nu|(E \cup F) &= \sup \sum_{i=1}^r \|\nu((E \cup F) \cap E_i)\| \\ &= \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i) + \nu(F \cap E_i)\| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| + \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(F \cap E_i)\| = |\nu|(E) + |\nu|(F). \end{aligned}$$

Omgekeerd, laat $\epsilon > 0$. Per definisie van die variasie $|\nu|$, volg dat ons verdelings $(E_i), (F_j) \in D^{\mathcal{F}}$ kan kry sodanig dat

$$|\nu|(E) < \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{en} \quad |\nu|(F) < \sum_{j=1}^s \|\nu(F \cap F_j)\| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Vorm nou 'n verdeling (G_k) op die volgende manier: stel $G_k = E \cap E_i$ vir $1 \leq k = i \leq r$, stel $G_k = F_j \cap F$ vir $r+1 \leq k = j+r \leq r+s$ en stel $G_{r+s+1} = \Omega \setminus (E \cup F)$. Aangesien die versamelings E en F disjunk is, volg dat al die versamelings G_k disjunk van mekaar is en

$$E = \bigcup_{k=1}^r G_k, \quad F = \bigcup_{k=r+1}^s G_k \quad \text{en} \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{r+s+1} G_k.$$

Verder is $(E \cup F) \cap G_{r+s+1} = (E \cup F) \cap \Omega \setminus (E \cup F) = \emptyset$. Dus kry ons

$$\begin{aligned} |\nu|(E) + |\nu|(F) &< \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| + \sum_{j=1}^s \|\nu(F \cap F_j)\| + \|\nu(\emptyset)\| + \epsilon \\ &= \sum_{k=1}^{r+s+1} \|\nu((E \cup F) \cap G_k)\| + \epsilon \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r \|\nu((E \cup F) \cap E_i)\| + \epsilon = |\nu|(E \cup F) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ons kan dit vir enige $\epsilon > 0$ doen. Dus volg dat $|\nu|(E \cup F) \geq |\nu|(E) + |\nu|(F)$.

3. As $E \subseteq F$, dan is $|\nu|(F) = |\nu|(F \setminus E \cup E) = |\nu|(F \setminus E) + |\nu|(E) \geq |\nu|(E)$.

4. Laat $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van disjunkte versamelings wees waarvoor $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$. Aangesien $|\nu|$ monotoon en eindig additief is, volg dat

$$\sum_{n=1}^k |\nu|(E_n) = |\nu|\left(\bigcup_{n=1}^k E_n\right) \leq |\nu|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

vir enige $k \in \mathbb{N}$. Dus deur die limiet oor k te neem volg dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E_n) \leq |\nu|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

5. Die versameling $\{\Omega\}$ is een van die verdelings in $D^{\mathcal{F}}$. Dus is

$$\|\nu(E)\| = \|\nu(E \cap \Omega)\| \leq \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| = |\nu|(E).$$

6. Vir enige $E \in \Sigma$ geld

$$\begin{aligned} |\nu_1 + \nu_2|(E) &= \sup \sum_{i=1}^r \|(\nu_1 + \nu_2)(E \cap F_i)\| \\ &\leq \sup \left(\sum_{i=1}^r \|\nu_1(E \cap F_i)\| + \sum_{i=1}^r \|\nu_2(E \cap F_i)\| \right) = |\nu_1|(E) + |\nu_2|(E). \end{aligned}$$

Dit voltooi die bewys. $\square$

As $x^* \in X^*$ 'n funksionaal uit die dual van X is, dan is $x^*\nu$ 'n (skalaarwaardige) vektormaat [[as $E, F \in \mathcal{F}$ disjunkte versamelings is, dan is $x^*\nu(E \cup F) = x^*(\nu(E) + \nu(F)) = x^*\nu(E) + x^*\nu(F)$]]. Dus kan ons ook die variasie $|x^*\nu|$ van die vektormaat $x^*\nu$ bepaal.

Proposie 1.1.9(2) het vir ons gewys dat die variasie van 'n vektormaat eindig additief is. Die volgende lemma gee vir ons die nodig en voldoende voorwaardes waaronder 'n eindig additiewe maat gelyk aan $|\nu|$ is. Ons gebruik die notasie $\overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ om die geslote eenheidsbol van die dual van X aan te dui [[dit wil sê as $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$, dan is x^* 'n begrensde lineêre funksionaal op X en $\|x^*\| \leq 1$]].

Lemma 1.1.10. (p.3, [8])

Beskou 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ en 'n eindig additiewe maat $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Dan is $|\nu| = \mu$ as en slegs as:

1. $|x^*\nu|(E) \leq \mu(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$ en alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$;
2. as $\lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 'n reëelwaardige maat is sodanig dat $|x^*\nu|(E) \leq \lambda(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$ en alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$, dan is $\mu(E) \leq \lambda(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$.

Bewys. Neem aan $|\nu| = \mu$. Laat $E \in \mathcal{F}$ en $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. Neem die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^{\Sigma}$. Dan is

$$\begin{aligned} |x^*\nu|(E) &= \sup \sum_{i=1}^r |(x^*\nu)(E \cap E_i)| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r \|x^*\| \|\nu(E \cap E_i)\| \leq \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| = |\nu|(E) = \mu(E). \end{aligned}$$

Dit is voorwaarde 1. Neem nou aan λ is 'n eindig additiewe maat sodanig dat $|x^*\nu|(E) \leq \lambda(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$ en alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. Dan geld ook dat $\sup |x^*\nu|(E) \leq$

$\lambda(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$ waar die supremum oor alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ geneem is. Dus kry ons

$$\begin{aligned} \mu(E) = |\nu|(E) &= \sup \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| \\ &= \sup \sum_{i=1}^r \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* \nu(E \cap E_i)| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* \nu|(E \cap E_i) \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r \lambda(E \cap E_i) = \sup \lambda \left(E \cap \bigcup_{i=1}^r E_i \right) = \lambda(E) \end{aligned}$$

vir alle $E \in \mathcal{F}$. Dus geld voorwaarde 2.

Andersom, neem aan 1 en 2 geld. Vanuit die vorige deel van die bewys kry ons dat

$$|\nu|(E) \leq \sup \sum_{i=1}^r \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* \nu|(E \cap E_i) \leq \sup \sum_{i=1}^r \mu(E \cap E_i) = \mu(E) \quad (1.1.2)$$

vir alle $E \in \mathcal{F}$ [[vanuit voorwaarde 1 volg dat $|x^* \nu|(E \cap E_i) \leq \mu(E \cap E_i)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$, alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ en alle i en dus ook vir die supremum geneem oor alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$]]. Ons het ook reeds in die eerste deel van die bewys gesien dat $|x^* \nu|(E) \leq |\nu|(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$ en alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. Dus is $|\nu|$ 'n eindig additiewe maat wat aan voorwaarde 2 voldoen. Dit beteken dat ons kan aflei dat $\mu(E) \leq |\nu|(E)$. Tesame met ongelykheid 1.1.2 kry ons $|\nu|(E) = \mu(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$. $\square$

Ons weet reeds dat $|\nu|$ additief is. Die volgende proposisie wys dat $|\nu|$ inderdaad σ -additief is as ν 'n σ -additiewe vektormaat van begrensde variasie is.

Proposisie 1.1.11. (*proposisie 9 p.3, [8]*)

'n Vektormaat ν van begrensde variasie is σ -additief as en slegs as $|\nu|$ ook σ -additief is.

Bewys. Laat ν 'n vektormaat van begrensde variasie wees en laat $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ deurgaans 'n ry van disjunkte versamelings wees sodanig dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$. Neem aan $|\nu|$ is σ -additief. Dan volg

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) - \sum_{n=1}^k \nu(E_n) \right\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nu \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n \right) \right\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} |\nu| \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} |\nu|(E_n) = 0. \end{aligned}$$

Dus is ν ook σ -additief.

Andersom, neem aan ν is σ -additief en laat $(F_i) \in D^{\mathcal{F}}$. Dan is

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \left\| \nu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap F_i \right) \right\| &= \sum_{i=1}^r \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n \cap F_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \|\nu(E_n \cap F_i)\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r |\nu|(E_n \cap F_i) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E_n). \end{aligned}$$

Waar ons die orde van sommasie kan omruil omdat een van die somme eindig is. Deur die supremum oor alle $(F_i) \in D^{\mathcal{F}}$ te neem, volg dat

$$|\nu| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E_n).$$

Aangesien $|\nu|$ ook σ -supadditief is (proposisie 1.1.9(4)), volg dat $|\nu|$ σ -additief is. $\square$

Ons definieer nou die semivariasie van 'n vektormaat. In lemma 1.1.10 het ons die variasies $|x^* \nu|$ teëgekom waar $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. Die semivariasie van 'n vektormaat ν word nou gedefinieer as die supremum van hierdie variasies. Dit is moontlik om voorbeelde te kry waar die variasie van ν oor 'n versameling oneindig is terwyl die semivariasie van ν oor dieselfde versameling eindig is (sien voorbeeld 1.1.15).

Definisie 1.1.12. (Semivariasie van 'n vektormaat) (Definisie 4 p.2, [8])

Die semivariasie van 'n vektormaat ν is die nie-negatiewe funksie $\|\nu\| : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieer oor 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ deur

$$\|\nu\|(E) = \sup |x^* \nu|(E),$$

waar die supremum oor alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ geneem word. As $\|\nu\|(\Omega) < \infty$, dan sê ons ν is 'n vektormaat van begrensde semivariasie.

As $\nu = \mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{K}$ 'n eindig additiewe betekende maat (skalaarwaardige vektormaat) is, dan is die variasie en semivariasie van ν gelyk aan mekaar.

Voorbeeld 1.1.13. (Semivariasie van 'n skalaarmaat)

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{K}$ 'n skalaarmaat wees en laat $E \in \mathcal{F}$. Neem die supremum oor alle $k \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K}$ met $|k| \leq 1$. Dan is

$$\begin{aligned} \|\nu\|(E) &= \sup |k \nu|(E) = \sup_{(E_i)} \sup \sum_{i=1}^r |k \nu(E \cap E_i)| \\ &= \sup |k| \cdot \sup_{(E_i)} \sum_{i=1}^r |\nu(E \cap E_i)| = |\nu|(E). \end{aligned}$$

Dus, vir skalaarmate μ is $|\mu|(E) = \|\mu\|(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$. $\square$

'n Alternatiewe definisie vir die semivariasie van 'n vektormaat word gegee deur:

Proposisie 1.1.14. (*Proposisie 11 p.4, [8]*)

As ν 'n vektormaat is en $E \in \mathcal{F}$, dan word die semivariasie van ν oor E ook gegee deur

$$\|\nu\|(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i) \right\|$$

waar die supremum oor alle eindige rye skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ met $|\alpha_i| \leq 1$ en alle eindige disjunkte verdelings $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ geneem word.

Bewys. Neem 'n willekeurige verdeling $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^{\mathcal{F}}$ en 'n eindige ry skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sodanig dat $|\alpha_i| \leq 1$. In die volgende ongelykheid, neem die supremum oor alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i) \right\| &= \sup \left| x^* \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i) \right) \right| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r |\alpha_i| |x^* \nu(E \cap E_i)| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r |x^* \nu|(E \cap E_i) = \sup |x^* \nu|(E) = \|\nu\|(E). \end{aligned}$$

Deur die supremum oor alle sulke verdelings (E_i) en skalare (α_i) te neem kry ons die een ongelykheid.

Omgekeerd, neem weer 'n $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^{\mathcal{F}}$ en neem 'n $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. Laat $\text{sgn} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ die tekenfunksie wees, dit is,

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{|z|}{z} & \text{as } z \neq 0 \\ 0 & \text{as } z = 0. \end{cases}$$

Dan is $|z| = \text{sgn}(z)z$ vir alle $z \in \mathbb{K}$ en gevolglik kry ons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |x^* \nu(E \cap E_i)| &= \sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* \nu(E \cap E_i)) x^* \nu(E \cap E_i) \\ &= x^* \left(\sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* \nu(E \cap E_i)) \nu(E \cap E_i) \right) \\ &\leq \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} \left| x^* \left(\sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* \nu(E \cap E_i)) \nu(E \cap E_i) \right) \right| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* \nu(E \cap E_i)) \nu(E \cap E_i) \right\| \leq \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i) \right\| \end{aligned}$$

want elke $\text{sgn}(x^* \nu(E \cap E_i))$ is 'n skalar α_i met $|\alpha_i| \leq 1$. Deur die supremum oor alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ te neem, volg die omgekeerde ongelykheid. $\square$

Ons kyk na voorbeelde van vektormate wat van begrensde en onbegrensde semivariasie is. Die eerste voorbeeld wys dat 'n vektormaat van eindige semivariasie kan wees en tog van oneindige variasie kan wees.

Voorbeeld 1.1.15. (Vektormaat van begrensde semivariasie)(Voorbeeld 7 p.3, [8])

Beskou die eindig additiewe vektormaat $\nu(E) := T(\mathcal{I}_E)$ van voorbeeld 1.1.4. Laat x^* 'n funksionaal uit die geslote eenheidsbol van $L^\infty[0, 1]^*$ wees en laat $(E_i) \in D^\Sigma$. Dan is

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |x^* \nu([0, 1] \cap E_i)| &= \sum_{i=1}^r |x^* T(\mathcal{I}_{E_i})| \\ &= \sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* T(\mathcal{I}_{E_i})) x^* T(\mathcal{I}_{E_i}) \\ &= \left| x^* T \left(\sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* T(\mathcal{I}_{E_i})) \mathcal{I}_{E_i} \right) \right| \\ &\leq \|x^*\| \|T\| \left\| \sum_{i=1}^r \text{sgn}(x^* T(\mathcal{I}_{E_i})) \mathcal{I}_{E_i} \right\| \leq 1 \cdot \|T\| \cdot 1 = \|T\|. \end{aligned}$$

Deur die supremum oor alle sulke funksionale x^* en verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$ te neem, sien ons dat $\|\nu\|([0, 1]) \leq \|T\| < \infty$.

In die besonder, as $T = I$ die identiteitsafbeelding is, dan het ons presies die vektormaat ν van voorbeeld 1.1.8. Vir hierdie vektormaat is $\|\nu\|(\Omega) = 1$, maar $|\nu|(\Omega) = \infty$. $\square$

Voorbeeld 1.1.16. (Vektormaat van onbegrensde semivariasie)(Voorbeeld 8 p.3, [8])

Laat $\Omega = \mathbb{N}$ en laat $\mathcal{F}$ die algebra van deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees wat óf self eindig is óf eindige komplement het. Definieer 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ deur

$$\nu(E) = \begin{cases} |E| & \text{as } E \text{ eindig is} \\ -|\mathbb{N} \setminus E| & \text{as } \mathbb{N} \setminus E \text{ eindig is} \end{cases}$$

waar $|E|$ die kardinaliteit van 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ is. [[Die afbeelding ν is inderdaad 'n vektormaat. As E en F twee disjunkte versamelings uit $\mathcal{F}$ is, dan moet E of F eindig wees. Daar is dus nou twee moontlikhede: 1. beide E en F is eindig of 2. een van die versamelings is oneindig.

1. As albei eindig is, dan is $E \cup F$ ook eindig. Dus is $\nu(E \cup F) = |E \cup F| = |E| + |F| = \nu(E) + \nu(F)$, want E en F is disjunkt.
2. As een van E of F , sê F , oneindig is, dan is $\mathbb{N} \setminus F$, $\mathbb{N} \setminus (E \cup F)$ en E eindige versamelings. Aangesien E en F disjunkt is, is $E \subseteq \mathbb{N} \setminus F$ en $\mathbb{N} \setminus (E \cup F) = (\mathbb{N} \setminus F) \setminus E$. Deur van hierdie feite gebruik te maak, sien ons

$$\begin{aligned} \nu(E \cup F) &= -|\mathbb{N} \setminus (E \cup F)| = -|(\mathbb{N} \setminus F) \setminus E| \\ &= -(|\mathbb{N} \setminus F| - |E|) \\ &= |E| - |\mathbb{N} \setminus F| = \nu(E) + \nu(F). \end{aligned}$$

Dus is $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$ vir enige disjunkte versamelings $E, F \in \mathcal{F}$.]

Definieer vir elke n 'n verdeling $\pi_n \in D^\mathcal{F}$, deur $\pi_n = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{n+1, n+2, \dots\}\}$. Dan is

$$\sum_{A \in \pi_n} |\nu(\mathbb{N} \cap A)| = \sum_{k=1}^n |\nu(\{k\})| + |\nu(\{n+1, n+2, \dots\})| = \sum_{k=1}^n |1| + |-n| = 2n.$$

Aangesien die semivariasie verkry word deur die supremum oor alle verdelings $\pi \in D^{\mathcal{F}}$ te neem, volg dat $\|\nu\|(\mathbb{N}) = \infty$. $\square$

Ons sluit hierdie eerste deel oor vektormate af met sommige van die basiese eienskappe van die semivariasie van 'n vektormaat.

Proposisie 1.1.17. (*lemma IV.10.4 p.320, [13], proposisie 11 p.4, [8]*)
Vir die semivariasie $\|\nu\|$ van 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ geld die volgende:

1. $\|\nu\|(\emptyset) = 0$;
2. $\|\nu\|$ is monotoon;
3. as ν 'n σ -additiewe vektormaat is, dan $\|\nu\|$ is σ -subadditief;
4. $0 \leq \|\nu(E)\| \leq \|\nu\|(E) \leq |\nu|(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$;
5. $\sup\{\|\nu(F)\| : F \in \mathcal{F}, F \subseteq E\} \leq \|\nu\|(E) \leq 4 \sup\{\|\nu(F)\| : F \in \mathcal{F}, F \subseteq E\}$ vir alle $E \in \mathcal{F}$;
6. as ν_1 en ν_2 twee vektormate is dan geld vir alle $E \in \mathcal{F}$ dat $\|\nu_1 + \nu_2\|(E) \leq \|\nu_1\|(E) + \|\nu_2\|(E)$.

Bewys.

1. Dit volg per definisie, want $\nu(\emptyset \cap E_i) = 0$ vir alle i vir enige verdeling $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$.
2. Neem aan $E, F \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq F$. Aangesien die variasie van 'n maat monotoon is, is $|x^* \nu|(E) \leq |x^* \nu|(F)$ vir alle $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ en dus volg ook dat $\|\nu\|(E) \leq \|\nu\|(F)$.
3. Neem aan $(F_n) \subseteq \mathcal{F}$ is 'n ry van disjunkte versamelings sodanig dat die vereniging weer 'n element van $\mathcal{F}$ is. Aangesien ons hier aanneem dat ν 'n σ -additiewe vektormaat is, volg dat

$$\begin{aligned} \|\nu\| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap E_i \right) \right\| \\ &= \sup \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i \nu(F_n \cap E_i) \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(F_n \cap E_i) \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\nu\|(F_n). \end{aligned}$$

4. Aangesien $\{\Omega\} \in D^{\mathcal{F}}$, is

$$0 \leq \|\nu(E)\| = \|1 \cdot \nu(\Omega \cap E)\| \leq \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i) \right\| = \|\nu\|(E)$$

vir alle $E \in \mathcal{F}$. Verder, as $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$, dan geld vir alle $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ dat

$$\sum_{i=1}^r |x^* \nu(E \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^r \|x^*\| \|\nu(E \cap E_i)\| \leq \sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\|.$$

Deur die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ te neem, volg dat $|x^* \nu|(E) \leq |\nu|(E)$ vir alle $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$. Deur nou die supremum oor alle $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ te neem, kry

ons dat $\|\nu\|(E) \leq |\nu|(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$.

5. Beskou 'n $E \in \mathcal{F}$ en neem die supremum oor alle versamelings $F \in \mathcal{F}$ wat in E bevat is. Dan is

$$\begin{aligned} \sup \|\nu(F)\| &= \sup_{x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}} \sup |x^* \nu(F)| \\ &\leq \sup_{x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}} \sup |x^* \nu|(F) = \sup \|\nu\|(F) = \|\nu\|(E), \end{aligned}$$

want $\|\nu\|$ is monotoon. Aan die anderkant, neem 'n willekeurige $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^{\mathcal{F}}$ en laat $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$. Neem eers aan X is 'n reële Banach ruimte en stel $\pi_+ = \{1 \leq i \leq r : x^* \nu(E \cap E_i) \geq 0\}$ en $\pi_- = \{1 \leq i \leq r : x^* \nu(E \cap E_i) < 0\}$. Dan is

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |x^* \nu(E \cap E_i)| &= \sum_{i \in \pi_+} x^* \nu(E \cap E_i) - \sum_{i \in \pi_-} x^* \nu(E \cap E_i) \\ &= \left| x^* \left(\sum_{i \in \pi_+} \nu(E \cap E_i) - \sum_{i \in \pi_-} \nu(E \cap E_i) \right) \right| \\ &\leq \|x^*\| \left(\left\| \sum_{i \in \pi_+} \nu(E \cap E_i) \right\| + \left\| \sum_{i \in \pi_-} \nu(E \cap E_i) \right\| \right) \\ &\leq 2 \sup \{\|\nu(F)\| : E \supseteq F \in \mathcal{F}\}, \end{aligned}$$

want $(E \cap \bigcup_{i \in \pi_+} E_i), (E \cap \bigcup_{i \in \pi_-} E_i) \in \{E \supseteq F \in \mathcal{F}\}$. Deur eers die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ en dan oor alle $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ te neem, sien ons dat $\|\nu\|(E) \leq 2 \sup \{\|\nu(F)\| : E \supseteq F \in \mathcal{F}\}$.

As X 'n komplekse Banach ruimte is dan volg vanuit die reële geval dat

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r |x^* \nu(E \cap E_i)| &\leq \sum_{i=1}^r |\operatorname{Re}(x^* \nu(E \cap E_i))| + \sum_{i=1}^r |\operatorname{Im}(x^* \nu(E \cap E_i))| \\ &\leq 4 \sup \{\|\nu(F)\| : E \supseteq F \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

vir enige $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ en enige $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$. Gevolglik is $\|\nu\|(E) \leq 4 \sup \{\|\nu(F)\| : E \supseteq F \in \mathcal{F}\}$.

6. Vir enige $E \in \mathcal{F}$ is $\|\nu_1 + \nu_2\|(E) = \sup |x^*(\nu_1 + \nu_2)|(E) \leq \sup (|x^* \nu_1|(E) + |x^* \nu_2|(E)) = \|\nu_1\|(E) + \|\nu_2\|(E)$. $\square$

As ν nou 'n vektormaat van begrensde semivariasie is, dan gee proposisie 1.1.17(5) dat $\sup \{\|\nu(E)\| : E \in \mathcal{F}\} \leq \|\nu\|(\Omega)$. Met ander woorde die beeld van ν is 'n begrensde deelversameling van X . Ons sal dus van nou af na vektormate van begrensde semivariasie verwys as begrensde vektormate.

Definisie 1.1.18. (Begrensde vektormaat)

Ons noem $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n begrensde vektormaat as $\|\nu\|(\Omega) < \infty$.

In die volgende afdeling definieer ons 'n vektorintegraal met betrekking tot 'n begrensde vektormaat.

1.2 'n Elementêre vektorintegraal

Ons wil nou 'n eenvoudige tipe vektorintegraal definieer. Ons definieer hierdie integraal vir Borel-meetbare skalaarfunksies ten opsigte van 'n begrensde vektormaat. Die hoofresultaat van hierdie afdeling is dat daar een-tot-een verband tussen die begrensde vektormate en 'n sekere klas operatore bestaan. Die integraal wat ons definieer is in hierdie klas operatore.

Laat $\mathcal{F}$ 'n algebra van deelversamelings van die versameling Ω wees. Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ regdeur hierdie afdeling 'n begrensde vektormaat wees. 'n Skalaarwaardige funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ is Borel-meetbaar as $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ vir alle Borel deelversamelings $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$. Ons dui die Borel σ -algebra deur $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ aan. Aangesien $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ deur die oop deelversamelings van $\mathbb{K}$ voortgebring word, is f Borel-meetbaar as en slegs as $f^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ vir elke oop deelversameling $S \subseteq \mathbb{K}$.

Ons definieer die integraal eers vir meetbare trapfunksies - funksies wat slegs eindig veel verskillende waardes aanneem en waar die inverse beeld van elkeen van hierdie waardes 'n meetbare versameling is. Aangesien ons meetbare versamelings in hierdie afdeling uit die algebra $\mathcal{F}$ kom, noem ons hierdie funksies $\mathcal{F}$ -trapfunksies.

Definisie 1.2.1. (Skalaar $\mathcal{F}$ -trapfunksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ word 'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie genoem as f van die vorm

$$f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathcal{I}_{E_i}$$

is, waar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ en $E_1, E_2, \dots, E_r \in \mathcal{F}$ 'n eindige disjunkte verdeling van Ω is.

Gegee een of ander funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, sal ons praat van die versameling $C_f := \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > 0\}$ as die draerversameling van die funksie f . Dit is dus die versameling van punte waar f nie nul is nie. As f 'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie soos hierbo is, dan is C_f die vereniging van die versamelings E_i waarop $f(\{E_i\}) = \alpha_i \neq 0$. As die vereniging van meetbare versamelings, is C_f self ook 'n meetbare versameling.

'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie kan meer as een representasie hê. Daarmee bedoel ons dat dieselfde trapfunksie f op twee maniere

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i} \quad \text{en} \quad f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{I}_{F_j}$$

voorgestel kan word. In so 'n geval is $\alpha_i = \beta_j$ as $E_i \cap F_j \neq \emptyset$. As $\alpha_i \neq \alpha_j$ wanneer $i \neq j$, dan sê ons die trapfunksie is in kanoniese vorm. Die kanoniese vorm van 'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie is uniek.

Ons dui die versameling van skalaar $\mathcal{F}$ -trapfunksies op Ω deur $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ aan. Die versameling $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ is 'n vektorruimte. [[Die nulfunksie $0 = \mathcal{I}_\emptyset$ is in $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ en as $f, g \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ en $\alpha \in \mathbb{K}$, sê $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i}$ en $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{I}_{F_j}$, dan is (E_i) en (F_j) beide eindige disjunkte verdelings van Ω in meetbare versamelings. Gevolglik is $\{E_i \cap F_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ ook 'n eindige disjunkte verdeling van Ω in meetbare versamelings. Vir $1 \leq i \leq n$, stel $\gamma_{ij} = \alpha_i$ as $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ vir $1 \leq j \leq m$ en nul andersins. Net so, vir $1 \leq j \leq m$, stel $\delta_{ij} = \beta_j$ as $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ vir $1 \leq i \leq n$

en nul andersins. Dan is

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i \cap \Omega} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i} \sum_{j=1}^m \mathcal{I}_{F_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \mathcal{I}_{E_i \cap F_j}; \\ g &= \sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{I}_{F_j} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{I}_{F_j \cap \Omega} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{I}_{F_j} \sum_{i=1}^n \mathcal{I}_{E_i} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \mathcal{I}_{F_j \cap E_i}. \end{aligned}$$

Dus is $f + \alpha g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\gamma_{ij} + \alpha \delta_{ij}) \mathcal{I}_{E_i \cap F_j}$ ook 'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie.]] Ons rus die vektorruimte $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ toe met die supremum norm

$$\|f\| := \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|.$$

In die algemeen, vir 'n deelversameling $E \subseteq \Omega$, definieer ons die norm van 'n funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ oor E as

$$\|f\|_E := \sup_{\omega \in E} |f(\omega)|.$$

Aangesien 'n trapfunksie slegs 'n eindige aantal waardes aanneem is $\|f\| < \infty$ vir alle $f \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$.

Ons definieer nou die vektorintegraal vir $\mathcal{F}$ -trapfunksies. Die lemma wat na die definisie volg verseker dat hierdie integraal goed gedefinieer is.

Definisie 1.2.2. (Integraal van 'n skalaar $\mathcal{F}$ -trapfunksie)(p.5, [8])

As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n begrensde vektormaas is, dan definieer ons die afbeelding $I_\nu : \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \rightarrow X$ vir 'n $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i} \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ deur

$$I_\nu(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i).$$

Lemma 1.2.3.

As $f \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, dan is die integraal $I_\nu(f)$ onafhanklik van die representasie van die trapfunksie f .

Bewys. Neem aan $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i}$ en $f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathcal{I}_{F_j}$ is twee representasies van dieselfde trapfunksie $f \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$. Dan geld per definisie dat $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \in D^{\mathcal{F}}$ en $\{F_1, F_2, \dots, F_m\} \in D^{\mathcal{F}}$. Gevolglik is $\{E_i \cap F_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \in D^{\mathcal{F}}$. Laat $\gamma_{ij} = \alpha_i = \beta_j$ as $E_i \cap F_j \neq \emptyset$. Dan is $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \mathcal{I}_{E_i \cap F_j}$ en die orde van sommasie kan omgeruil word, want dit is 'n eindige som. Gevolglik is

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i \cap \Omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu\left(E_i \cap \bigcup_{j=1}^m F_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \nu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} \nu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \nu(\Omega \cap F_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \nu(F_j), \end{aligned}$$

want ν is eindig additief. Dit wys dat $I_\nu(f)$ onafhanklik van die representasie van f is. $\square$

In proposisie 1.1.14 het ons gesien dat die semivariasie van 'n vektormaat ν oor 'n versameling E gekry kan word deur die supremum oor somme van die vorm $\sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i)$ te neem. Maar dit is presies die vorm wat die integraal van 'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie ook het. Onthou dat ons aanneem dat $\|\nu\|(\Omega) < \infty$. Dit stel ons in staat om die volgende uitspraak oor die begrensdeheid van die integraal te maak.

Proposisie 1.2.4. (p.6, [8])

Die afbeelding $I_\nu : \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \rightarrow X$ is 'n begrende lineêre operator en $\|I_\nu\| = \|\nu\|(\Omega)$.

Bewys. As f en g twee meetbare trapfunksies is, skryf beide funksies met betrekking tot dieselfde verdeling $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$, sê $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i}$ en $g = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathcal{I}_{E_i}$. Dan is $f + \alpha g = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha \beta_i) \mathcal{I}_{E_i} \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ vir enige skalaar α en

$$I_\nu(f + \alpha g) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha \beta_i) \nu(E_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i) + \alpha \sum_{i=1}^n \beta_i \nu(E_i) = I_\nu(f) + \alpha I_\nu(g).$$

Die afbeelding I_ν is dus 'n lineêre operator.

As $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{I}_{E_i} \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, dan is $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ en $\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$. Gevolglik is elkeen van $\alpha_i / \|f\|$ 'n skalaar wat kleiner of gelyk aan 1 is. Vanuit die definisie van die semivariasie van 'n vektormaat (proposisie 1.1.14) sien ons nou dat

$$\|I_\nu(f)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i) \right\| = \|f\| \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\|f\|} \nu(E_i) \right\| \leq \|f\| \|\nu\|(\Omega).$$

I_ν is dus 'n begrensde operator en $\|I_\nu\| \leq \|\nu\|(\Omega)$.

Om te sien dat gelykheid geld neem ons waar dat vir enige verdeling $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ en eindige ry skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ met $|\alpha_i| \leq 1$ ons 'n trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathcal{I}_{E_i} \in \mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ kan vorm. Vir so 'n trapfunksie geld dat $\|f\| \leq 1$. Dus is

$$\|I_\nu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|I_\nu(f)\| \geq \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E_i) \right\| = \|\nu\|(\Omega)$$

waar die supremum oor alle $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ en skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ met $|\alpha_i| \leq 1$ geneem is. Tesame met die vorige ongelykheid gee dit $\|I_\nu\| = \|\nu\|(\Omega)$. $\square$

Ons wil egter die integraal definieer vir funksies wat meer algemeen is as trapfunksies. Ons soek dus 'n versameling van funksies $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ waarvoor ons kan wys dat die integraal bestaan.

Definisie 1.2.5. (Begrensde meetbare skalaarfunksie)

Ons noem 'n funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ 'n begrensde meetbare funksie as daar 'n ry $\mathcal{F}$ -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat f die gelykmatige limiet van (f_n) is.

Ons dui die versameling van alle begrensde meetbare funksies $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ deur $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ aan. Tesame met die supremum norm is $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ 'n normeerde ruimte. As ons met 'n σ -algebra Σ in plaas van 'n algebra $\mathcal{F}$ werk, dan is $\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$ presies die versameling van begrensde Borel-meetbare skalaarfunksies.

Ons brei nou die afbeelding I_ν tot $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ uit. Aangesien I_ν 'n kontinue lineêre operator op $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ is en elke funksie in $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ die gelykmatige limiet van funksies uit $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ is, het I_ν 'n unieke uitbreiding (deur kontinuïteit) tot $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$. Dui hierdie uitbreiding deur $\bar{I}_\nu$ aan. As $f \in \mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ en (f_n) 'n ry uit $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ is wat gelykmatig na f konvergeer, dan is $\bar{I}_\nu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_\nu(f_n)$.

Definisie 1.2.6. (Elementêre vektor integraal)(p.6, [8])

Vir 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ en 'n skalaar funksie $f \in \mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, definieer ons 'n integraal deur

$$\int f d\nu = \bar{I}_\nu(f).$$

Lemma 1.2.7.

Laat $f \in \mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ en laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n begrensde vektormaat wees. Die integraal wat hierbo gedefinieer is het die volgende eienskappe:

1. Die integraal is lineêr in f .
2. Die integraal is lineêr in ν .
3. $\|\int f d\nu\| \leq \|f\| \|\nu\|(\Omega)$.
4. As $x^* \in X^*$, dan is $x^* \int f d\nu = \int f dx^* \nu$.

Bewys. Laat $f, g \in \mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x^* \in X^*$ en laat ν_1 en ν_2 twee begrensde vektormate wees. Neem aan (f_n) is 'n ry uit $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ wat gelykmatig na f konvergeer. Sê $f_n = \sum_{i=1}^{r(n)} \alpha_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$.

1. As (g_n) 'n ry uit $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ is wat gelykmatig na g konvergeer, dan is

$$\begin{aligned} \int (f + \alpha g) d\nu &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_\nu(f_n + \alpha g_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_\nu(f_n) + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} I_\nu(g_n) = \int f d\nu + \alpha \int g d\nu. \end{aligned}$$

2. Vanuit proposisie 1.1.17(6) volg dat $\nu_1 + \nu_2$ ook 'n begrensde vektormaat is. Gevolglik kan ons die integraal $\int f d(\nu_1 + \nu_2)$ beskou. Per definisie kry ons

$$\begin{aligned} \int f d(\nu_1 + \nu_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\nu_1 + \nu_2}(f_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \alpha_i^{(n)} (\nu_1 + \nu_2) \left(E_i^{(n)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \alpha_i^{(n)} \nu_1 \left(E_i^{(n)} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \alpha_i^{(n)} \nu_2 \left(E_i^{(n)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\nu_1}(f_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\nu_2}(f_n) \\ &= \int f d\nu_1 + \int f d\nu_2. \end{aligned}$$

3. Vanuit die begrensdeheid van die integraal van 'n trapfunksie volg dat

$$\left\| \int f d\nu \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} I_\nu(f_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I_\nu(f_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \|\nu\|(\Omega) = \|f\| \|\nu\|(\Omega).$$

4. Per definisie kry ons

$$\begin{aligned} x^* \left(\int f d\nu \right) &= x^* \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \alpha_i^{(n)} \nu(E_i^{(n)}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r(n)} \alpha_i^{(n)} (x^* \nu)(E_i^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{x^* \nu}(f_n) = \int f dx^* \nu \end{aligned}$$

vir enige $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. □

Vir normeerde ruimtes X en Y dui ons die ruimte van begrensde lineêre operatore van X na Y deur $L(X, Y)$ aan. Verder dui $\mathbb{R}$ die uitgebreide reële getalle aan. Ons dui ook die normeerde ruimte van alle begrensde eindig additiewe vektormate op $\mathcal{F}$ deur $ba(\Omega, \mathcal{F})$ aan (die semivariasie van 'n vektormaat is die norm op die ruimte). Die volgende stelling is die hoofresultaat van hierdie afdeling. In die begin het ons genoem dat dit vir ons 'n een-tot-een verband tussen $ba(\Omega, \mathcal{F})$ en 'n sekere klas operatore gee. Hierdie verband word gegee deur die afbeelding wat 'n begrensde vektormaat op die integraal met betrekking tot daardie vektormaat afbeeld.

Stelling 1.2.8. *(Stelling 13 p.6, [8])*

As $\mathcal{F}$ 'n algebra is, dan bestaan daar 'n een-tot-een lineêre afbeelding tussen die ruimte $L(\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K}), X)$ en die ruimte van alle begrensde vektormate $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$.

As Σ 'n σ -algebra is en μ 'n $\mathbb{R}$ -waardige nie-negatiewe eindig additiewe maat op Σ is, dan bestaan daar 'n een-tot-een lineêre afbeelding tussen $L(L^\infty(\mu), X)$ en die ruimte van alle begrensde vektormate wat verdwyn op μ -nulversamelings.

In beide gevalle word die afbeelding deur $\nu \rightarrow \bar{I}_\nu$ gegee en $\|\bar{I}_\nu\| = \|\nu\|(\Omega)$.

Bewys. As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n begrensde vektormaat is, dan weet ons die integraal $\bar{I}_\nu : \mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \rightarrow X$ is 'n begrensde lineêre operator (lemma 1.2.7(1)). Die integraal is ook lineêr in ν (lemma 1.2.7(2)). Dit impliseer dat die afbeelding $\nu \rightarrow \bar{I}_\nu$ lineêr is. Die afbeelding $\nu \rightarrow \bar{I}_\nu$ is ook een-eenduidig, want as die operator $\bar{I}_\nu$ die nuloperator is, dan $\|\bar{I}_\nu\| = 0$ en dus is $\|\nu\|(\Omega) = 0$. Maar dan is $\|\nu\|(E) = 0$ vir alle $E \in \Sigma$ en dit beteken $\nu(E) = 0$ vir alle $E \in \Sigma$. Die vektormaat is dus die nulvektormaat.

Die norm op $ba(\Omega, \mathcal{F})$ is die semivariasie, dus volgens proposisie 1.2.4 is $\nu \rightarrow \bar{I}_\nu$ 'n isometrie van $ba(\Omega, \mathcal{F})$ na $L(\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K}), X)$. Ons bewys nou nog dat dit 'n surjeksie is en dat die twee ruimtes gevolglik isometries isomorf is.

As $T : \mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \rightarrow X$ nou 'n willekeurige begrensde lineêre operator is, definieer 'n versamelingsfunksie ν_T deur $\nu_T(E) = T\mathcal{I}_E$ vir alle $E \in \mathcal{F}$. Dan is $\nu_T \in ba(\Omega, \mathcal{F})$ (sien voorbeeld 1.1.15). Ons beweer nou dat ν_T afgebeeld word op T . Aangesien die meetbare trapfunksies dig in $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ is, hoef ons net te wys dat $\bar{I}_{\nu_T}$ en T gelyk is op $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$. Maar dan, omdat hierdie trapfunksies eindige lineêre kombinasies van indikatorfunksies is, hoef ons net te wys dat die twee operatore ooreenstem vir indikatorfunksies. Beskou dus 'n $E \in \mathcal{F}$. Dan is $\bar{I}_{\nu_T}(\mathcal{I}_E) = \nu_T(E) = T\mathcal{I}_E$. Dit bewys die bewering. Die afbeelding $\nu \rightarrow \bar{I}_\nu$ is dus 'n isometriese isomorfisme.

Vir die geval waar ons 'n σ -algebra Σ het en μ 'n maat van die soort in die stelling is, laat $ba_\mu(\Omega, \Sigma)$ die ruimte van van alle begrensde vektormate op Σ wees wat verdwyn op μ -nulversamelings. Beskou weer die afbeelding $\nu \rightarrow \bar{I}_\nu$ wat $ba_\mu(\Omega, \Sigma)$

in $L(L^\infty(\mu), X)$ afbeeld. Ons moet egter wys dat die operator $\bar{I}_\nu$ goed gedefinieer is in hierdie geval. Daarvoor is dit nodig om te bewys dat die nulfunksie op nul afgebeeld word. Net soos tevore is dit voldoende om dit vir trapfunksies te doen en daarvoor is dit voldoende om dit vir indikatorfunksies te doen. Laat $\mathcal{I}_E$ dus die nulfunksie in $L^\infty(\mu)$ wees. Dan is $\mu(E) = 0$, maar dan is $\nu(E) = 0$ vir alle $\nu \in ba_\mu(\Omega, \Sigma)$ en dan is $\bar{I}_\nu = 0$. Die operator $\bar{I}_\nu$ is dus goed gedefinieer. Die bewys dat $\bar{I}_\nu$ 'n isometriesse isomorfisme tussen $ba_\mu(\Omega, \Sigma)$ en $L(L^\infty(\mu), X)$ is, volg nou woordeliks soos in die eerste deel van die bewys. $\square$

1.3 Sterk additiewe vektormate

Vir 'n ry van paargewys disjunkte meetbare versamelings (E_n) , mag dit vir 'n X -waardige vektormaat ν die geval wees dat die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ onvoorwaardelik in die norm van X konvergeer of nie. As ν 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra Σ is, dan weet ons dat $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ na die element $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ konvergeer. Vir die geval waar ν 'n σ -additiewe vektormaat op 'n algebra $\mathcal{F}$ is, kan dit vir 'n willekeurige ry versamelings $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ gebeur dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \notin \mathcal{F}$. Ons kan dus nie noodwendig vir so 'n vektormaat sê dat $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ konvergeer nie. Maar dit mag wel die geval wees dat $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ steeds onvoorwaardelik in norm na 'n element in X konvergeer (sien voorbeeld 1.3.3). Vektormate waarvoor alle sulke reekse onvoorwaardelik in norm konvergeer word sterk additiewe vektormate genoem.

Definisie 1.3.1. (Sterk additief)(Definisie 14 p.7, [8])

Ons noem 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ sterk additief as dit vir enige gegewe ry van disjunkte versamelings $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ geld dat die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ (onvoorwaardelik) in norm konvergeer.

Definisie 1.3.2. (Gelykmatig sterk additief)(Definisie 14 p.7, [8])

Laat $\mathcal{I}$ een of ander indeksversamelings wees. 'n Familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ van sterk additiewe vektormate word gelykmatig sterk additief genoem as dit vir enige gegewe ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ van disjunkte versamelings geld dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) \right\| = 0$$

gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$.

Soos reeds opgemerk hierbo is enige σ -additiewe vektormaat wat op 'n Σ -algebra gedefinieer is, sterk additief. Daar is egter ook baie vektormate wat nie σ -additief is nie, maar wel sterk additief is. As $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van σ -additiewe vektormate op 'n σ -algebra is wat gelykmatig sterk additief is, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \nu_i(E_k) - \nu_i \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right) \right\| = 0$$

gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$. Met ander woorde, in hierdie geval is die familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig σ -additief.

Ons eerste voorbeeld is die van 'n maat wat nie σ -additief is nie, maar tog sterk additief is

Voorbeeld 1.3.3. (Eindig additiewe, sterk additiewe vektormaat)(p.7, [8])

Laat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n eindige, eindig additiewe maat op 'n σ -algebra Σ wees. As $(E_n) \subseteq \Sigma$ enige ry van disjunkte versamelings is, dan is

$$\sum_{n=1}^k \mu(E_n) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^k E_n \right) \leq \mu(\Omega)$$

vir alle k . Dus is die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ 'n reeks van positiewe terme waarvan die partiële somme begrens is. Die reeks is dus (absoluut) konvergent en dus ook onvoorwaardelik konvergent. $\square$

Die volgende proposisie wys dat daar 'n groot klas van (nie noodwendig σ -additiewe) vektormate is wat sterk additief is.

Proposisie 1.3.4. (*Proposisie 15 p.7, [8]*)

As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n vektormaat van begrensde variasie is, dan is ν sterk additief.

Bewys. Laat $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van paargewys disjunkte versamelings wees. Aangesien $|\nu|$ additief is en $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$ vir alle $E \in \mathcal{F}$, volg dat

$$\sum_{i=1}^k \|\nu(E_i)\| \leq \sum_{i=1}^k |\nu|(E_i) = |\nu|\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) \leq |\nu|(\Omega).$$

Dus is $\sum_{n=1}^{\infty} \|\nu(E_n)\| \leq |\nu|(\Omega) < \infty$ en gevolglik is $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ absoluut, en dus ook onvoorwaardelik konvergent in norm. $\square$

Die klas van vektormate van begrensde variasie is dus bevat in die klas van sterk additiewe vektormate. Die klas van sterk additiewe vektormate is egter streng groter.

Voorbeeld 1.3.5. (Sterk additiewe vektormaat van onbegrensde variasie) (Voorbeeld 16 p.7, [8])

Beskou die Lebesgue maatruimte $([0, 1], \Sigma, \lambda)$. Laat $X = L^p[0, 1]$ waar $1 < p < \infty$ met die p -norm $\|f\| = (\int_{\Omega} |f|^p d\lambda)^{\frac{1}{p}}$ vir $f \in L^p[0, 1]$. Definieer die vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow L^p[0, 1]$ deur $\nu(E) = \mathcal{I}_E$ vir $E \in \Sigma$. Dan is ν 'n σ -additiewe vektormaat wat op 'n σ -algebra gedefinieer is [[Laat (E_n) 'n ry van disjunkte Lebesgue meetbare versamelings wees. Stel $F_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n$ vir elke k . Dan $F_k \downarrow \emptyset$ as $k \rightarrow \infty$ en gevolglik

$$\begin{aligned} \left\| \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^k \nu(E_n) \right\|^p &= \left\| \nu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n\right) \right\|^p \\ &= \|\mathcal{I}_{F_k}\|^p = \int_{F_k} 1 d\lambda = \lambda(F_k) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $k \rightarrow \infty$.]] Die sterk additiewe vektormaat ν is egter nie van begrensde variasie nie. Vir elke n , vorm die eindige disjunkte verdeling $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ van $[0, 1]$ op die volgende manier: stel $E_k = [(k-1)/n, k/n]$ vir $k = 1, 2, \dots, n-1$ en $E_n = [(n-1)/n, 1]$. Dan is $\lambda(E_k) = 1/n$ vir elke k . Dus kry ons

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|\nu([0, 1] \cap E_k)\| &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Omega} (\mathcal{I}_{E_k})^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda(E_k)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(n^{1-\frac{1}{p}} \right) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$. Dus volg ook dat $|\nu|([0, 1]) = \infty$. $\square$

Die volgende stelling is 'n belangrike resultaat in hierdie afdeling en sal dikwels gebruik word in die res van die hoofstuk.

Stelling 1.3.6. (*Proposisie 17 p.8, [8]*)

Laat $\mathcal{I}$ een of ander indeksversameling wees en laat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van vektormate $\nu_i : \mathcal{F} \rightarrow X$ wees. Die volgende bewerings is ekwivalent:

1. $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ is gelykmatig sterk additief;
2. $\{x^* \nu_i : x^* \in \overline{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ is gelykmatig sterk additief;
3. as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van paargewys disjunkte versamelings is, dan geld dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_i(E_n)\| = 0$ gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$;
4. as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van paargewys disjunkte versamelings is, dan geld dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_i\|(E_n) = 0$ gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$;
5. $\{|x^* \nu_i| : x^* \in \overline{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ is gelykmatig sterk additief;
6. as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry nie-dalende versamelings, dan bestaan $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(E_n)$ gelykmatig in i ;
7. as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry nie-stygende versamelings, dan bestaan $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(E_n)$ gelykmatig in i .

Bewys. Laat $(E_k) \subseteq \mathcal{F}$ deurgaans 'n willekeurige ry van paargewys disjunkte elemente wees.

1 $\Rightarrow$ 2. As $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig sterk additief is, dan geld vir enige $x^* \in \overline{B}_{X^*}$ dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n}^{\infty} x^* \nu_i(E_k) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x^* \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) \right\| = 0$$

gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$. Dus is $\{x^* \nu_i : x^* \in \overline{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig sterk additief.

2 $\Rightarrow$ 3. Vanuit die sterk additiwiteit van $\{x^* \nu_i : x^* \in \overline{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ volg dat ons vir enige $\epsilon > 0$ 'n n_ϵ kan kry sodanig dat $\sup \left| \sum_{k=n}^{\infty} x^* \nu_i(E_k) \right| < \epsilon/2$ vir elke $n \geq n_\epsilon$. Neem die supremum oor $x^* \in \overline{B}_{X^*}$ en $i \in \mathcal{I}$, dan is

$$\begin{aligned} \sup_i \|\nu_i(E_n)\| &= \sup |x^* \nu_i(E_n)| \\ &= \sup \left| x^* \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu_i(E_k) \right| \\ &\leq \sup \left| \sum_{k=n}^{\infty} x^* \nu_i(E_k) \right| + \sup \left| x^* \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu_i(E_k) \right| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

as $n \geq n_\epsilon$. Dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_i(E_n)\| = 0$ gelykmatig in i .

3 $\Rightarrow$ 4. Neem aan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_i(E_n)\| = 0$ gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$, maar neem aan bewering 4 is vals. Dan kan ons 'n $\delta > 0$ kry sodanig dat $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(E_n) \geq 4\delta$ vir alle n . Vanuit die eienskappe van die semivariasie van 'n vektormaat (proposisie 1.1.17) weet ons dat

$$\|\nu_i\|(E_n) \leq 4 \sup \{\|\nu_i(F_n)\| : F_n \in \mathcal{F}, F_n \subseteq E_n\}$$

vir elke i . So kan ons vir elke n en i 'n spesifieke versameling $F_n \in \mathcal{F}$ kies sodanig dat

$$\|\nu_i(F_n)\| \geq \frac{1}{4} \|\nu_i\|(E_n) \geq \delta.$$

Maar $(F_n) \subseteq \mathcal{F}$ is self ook 'n ry van disjunkte versamelings $[[F_n \subseteq E_n \text{ vir alle } n \text{ en } (E_n) \text{ is 'n disjunkte ry }]]$, dus moet $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_i(F_n)\| = 0$ per aanname. Die teëspraak wys dat ons aanname vals is.

$4 \Rightarrow 5$. Neem aan $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nu_i\|(E_k) = 0$ gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$, maar dat bewering 5 vals is. Dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ sodanig dat

$$\sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |x^* \nu_i|(E_k) : x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}, i \in \mathcal{I} \right\} \geq 2\delta > 0$$

vir alle n . Kies nou 'n ry $(n_j) \subset \mathbb{N}$ op so 'n manier dat

$$\sup \left\{ |x^* \nu_i| \left(\bigcup_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} E_k \right) = \sum_{n_j+1}^{n_{j+1}} |x^* \nu_i|(E_k) : x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}, i \in \mathcal{I} \right\} \geq 2\delta. \quad (1.3.1)$$

vir alle j . $[[$ Kies byvoorbeeld $n_1 = 1$ en n_2 groot genoeg dat $\sum_{k=n_1}^{n_2} |x^* \nu_i|(E_k) \geq 2\delta$. Kies dan n_3 groot genoeg dat $\sum_{k=n_2}^{n_3} |x^* \nu_i|(E_k) \geq 2\delta$. Gaan nou induktief voort op hierdie manier.]. Na aanleiding van ongelykheid 1.3.1, stel $F_j = \bigcup_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} E_k$ vir elke j . Aangesien (F_j) opgebou word uit paargewys disjunkte versamelings uit $\mathcal{F}$ en vanuit die manier wat elke F_j gedefinieer is, is (F_j) self ook 'n ry van paargewys disjunkte versamelings uit $\mathcal{F}$. Vir die ry (F_j) sien ons nou dat

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(F_j) = \sup \{ |x^* \nu_i|(F_j) : x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}, i \in \mathcal{I} \} \geq \delta > 0$$

vir alle j . Maar per aanname is $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\nu_i\|(F_j) = 0$ gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$. Ons het dus 'n teëspraak. Dus moet bewering 5 waar wees.

$5 \Rightarrow 1$. Neem aan $\{ |x^* \nu_i| : x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}, i \in \mathcal{I} \}$ is gelykmatig sterk additief. Dit beteken $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} |x^* \nu_i|(E_k) = 0$ gelykmatig in $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ en $i \in \mathcal{I}$. Laat $\epsilon > 0$. Dan kan ons 'n $n_0 \in \mathbb{N}$ kry sodanig

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x^* \nu_i|(E_k) < \epsilon$$

vir alle $n \geq n_0$, $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ en $i \in \mathcal{I}$. Gevolglik, as $n \geq n_0$, dan is

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) \right\| = \sup \left| x^* \sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k) \right| \leq \sup \sum_{k=n}^{\infty} |x^* \nu_i(E_k)| \leq \sup \sum_{k=n}^{\infty} |x^* \nu_i|(E_k) < \epsilon$$

vir alle $i \in \mathcal{I}$ waar die supremum oor alle $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ geneem is. Dit wys dus dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=n}^{\infty} \nu_i(E_k)\| = 0$ gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$ dit wil sê dat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig sterk additief is.

$1 \Rightarrow 6$. Neem aan $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ is 'n nie-dalende ry versamelings, dan is

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(E_n) &= \nu_i(E_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\nu_i(E_{k+1}) - \nu_i(E_k)) \\ &= \nu_i(E_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_i(E_{k+1} \setminus E_k). \end{aligned}$$

Maar $(E_{k+1} \setminus E_k)$ is 'n ry van disjunkte versamelings uit $\mathcal{F}$, dus, as ons aanneem dat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig sterk additief is, dan konvergeer die som aan die regterkant gelykmatig in i . Dus bestaan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(E_n)$ gelykmatig in i .

$6 \Rightarrow 7$. As $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n nie-dalend ry is, dan is $(\Omega \setminus E_n)$ 'n nie-stygende ry en dus, per aanname bestaan

$$\nu_i(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(\Omega \setminus E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(\Omega \setminus (\Omega \setminus E_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(E_n)$$

gelykmatig in i .

$7 \Rightarrow 6$. Volg op dieselfde manier as $6 \Rightarrow 7$.

$6 \Rightarrow 3$. Neem aan $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ is 'n ry van disjunkte versamelings. Stel $F_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$ vir elke n . Dan is $(F_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n nie-dalende ry. Gevolglik bestaan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(F_n)$ gelykmatig in i . Dus is

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\nu_i(F_n) - \nu_i(F_{n-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\nu_i \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) - \nu_i \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_i(E_n)$$

gelykmatig in i . □

Definisie 1.3.7. (Sterk begrens)(p.9, [8])

Ons sê 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ is sterk begrens as dit vir enige ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ van paargewys disjunkte elemente geld dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n) = 0$ waar $0 \in X$ die nulvektor is.

Vanuit stelling 1.3.8 kry ons nou direk die volgende ekwivalensies. Hiedie resultate sal ook dikwels gebruik word.

Gevolg 1.3.8. (Gevolg 18 p.8,9, [8])

Vir 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ is die volgende bewerings ekwivalent:

1. ν is sterk additief;
2. $\{x^* \nu : x^* \in \overline{B}_{X^*}\}$ is gelykmatig sterk additief;
3. ν is sterk begrens;
4. $\|\nu\|$ is sterk begrens;
5. $\{|x^* \nu| : x^* \in \overline{B}_{X^*}\}$ is gelykmatig sterk additief;
6. as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n nie-dalende ry versamelings is, dan bestaan $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$ in X ;
7. as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n nie-stygende ry versamelings is, dan bestaan $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$ in X .

Bewys. Volg vanuit stelling 1.3.6 deur die familie te beskou wat net uit die een vektormaat ν bestaan. □

In proposisie 1.3.4 het ons gesien dat enige vektormaat van begrensde variasie 'n sterk additiewe vektormaat is. Uit die vorige resultaat sien ons nou dat enige sterk additiewe vektormaat 'n vektormaat van begrensde semivariasie is, dit wil sê, 'n begrensde vektormaat is.

Gevolg 1.3.9. (Gevolg 19 p.9, [8])

Elke sterk additiewe vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ is ook 'n begrensde vektormaat.

Bewys. Neem aan dat ν sterk additief is, maar dat $\|\nu\|(\Omega) = \infty$. Aangesien

$$\infty = \|\nu\|(\Omega) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E_i) \right\|$$

waar die supremum oor skalare $|\alpha_i| \leq 1$ en verdelings $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$ geneem word, kan ons 'n versameling F_1 kry sodanig dat

$$\|\nu(F_1)\| \geq 1 + 2\|\nu(\Omega)\|.$$

Dan is $\|\nu(\Omega \setminus F_1)\| \geq 1$ [$\nu(F_1) = \nu(\Omega) - \nu(\Omega \setminus F_1)$ en gevolglik gee die driehoekson-gelykheid $\|\nu(F_1)\| \leq \|\nu(\Omega)\| + \|\nu(\Omega \setminus F_1)\|$ en dus $\|\nu(\Omega \setminus F_1)\| \geq 1 + 2\|\nu(\Omega)\| - \|\nu(\Omega)\|$ en dus $\|\nu(\Omega \setminus F_1)\| \geq 1$.] Vanuit die subadditiwiteit van $\|\nu\|$ volg dat $\infty = \|\nu\|(\Omega) \leq \|\nu\|(F_1) + \|\nu\|(\Omega \setminus F_1)$ en dus moet $\|\nu\|(F_1) = \infty$ of $\|\nu\|(\Omega \setminus F_1) = \infty$. As $\|\nu\|(F_1) = \infty$, stel $E_1 = F_1$. Indien nie, stel $E_1 = \Omega \setminus F_1$. In ieder geval is $\|\nu\|(E_1) = \infty$ en $\|\nu(E_1)\| \geq 1$.

Herhaal nou die bostaande proses met E_1 as die universele versameling in-stede van Ω . Dan kry ons 'n versameling $E_2 \subseteq E_1$ sodanig dat $\|\nu\|(E_2) = \infty$ en $\|\nu(E_2)\| \geq 2$. Deur nou induktief met hierdie proses voort te gaan kry ons 'n mo-notone ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ waarvoor $\|\nu(E_n)\| \geq n$ vir alle n . Dus is dit onmoontlik vir die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$ om te bestaan, 'n teësprak met gevolg 1.3.8 (1 $\iff$ 7). $\square$

Die sterk additiewe vektormate is dus bevat in die versameling van begrensde vektormate. Daar bestaan egter begrensde vektormate wat nie sterk additief is nie.

Voorbeeld 1.3.10. (Begrensde vektormaat wat nie sterk additief is nie)

Laat Σ 'n oneindige σ -algebra van deelversamelings van $[0, 1]$ wees. Laat $\nu : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}(\Sigma, \mathbb{K})$ die vektor maat gedefinieer deur $\nu(E) := \mathcal{I}_E$ vir $E \in \Sigma$ wees. In voorbeeld 1.1.15 het ons gesien dat ν 'n begrensde vektormaat is. Maar ν is nie sterk additief nie, want as $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings is, dan is

$$\left\| \sum_{n=1}^k \nu(E_n) - \sum_{n=1}^m \nu(E_n) \right\| = \left\| \nu \left(\bigcup_{n=m+1}^k E_n \right) \right\| = \|\mathcal{I}_{F_m^k}\| = 1$$

vir alle $k > m$ waar $F_m^k = \bigcup_{n=m+1}^k E_n$. Dit impliseer dat die som $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ nie in norm konvergeer nie. Gevolglik is ν nie sterk additief nie. $\square$

Definisie 1.3.11. (μ -absoluut kontinu) (Definisie 3 p.11, [8])

Beskou 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ en 'n eindige maat $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Ons sê ν is μ -absoluut kontinu as

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu(E) = 0$$

en ons skryf $\nu \ll \mu$.

Definisie 1.3.12. (Gelykmatig μ -absoluut kontinu) (Definisie 3 p.11, [8])

As μ 'n eindige maat is, dan noem ons 'n familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ van vektormate $\nu_i : \mathcal{F} \rightarrow X$ gelykmatig μ -absoluut kontinu as

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu_i(E)\| = 0$$

gelykmatig in $i \in \mathcal{I}$.

As ons 'n reële (vektor)maat λ en 'n maat μ op 'n σ -algebra het, dan word daar soms gesê λ is μ -absoluut kontinu ($\lambda \ll \mu$) as $E \in \Sigma$ met $\mu(E) = 0$ impliseer dat $\lambda(E) = 0$, dit wil sê, as λ verdwyn op μ -nulversamelings. Natuurlik, as ν 'n vektormaat is wat μ -absoluut kontinu is, dan verdwyn ν ook op μ -nulversamelings [[as $\mu(E) = 0$, stel $E_n = E$ vir alle n , dan $\mu(E_n) \rightarrow 0$ en dus $\nu(E) = \lim \nu(E_n) = 0$]]. In die algemeen geld die omgekeerde egter net as ν 'n σ -additiewe vektormaat is wat op 'n σ -algebra gedefinieer is.

Stelling 1.3.13. (Stelling 1 p.10, [8])

Laat $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n σ -additiewe vektormaat en $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n eindige maat op die σ -algebra Σ wees. Dan is ν 'n μ -absoluut kontinue vektormaat as en slegs as ν verdwyn op meetbare μ -nulversamelings.

Bewys. Neem aan $\|\nu(E)\| = 0$ vir alle versamelings $E \in \Sigma$ met $\mu(E) = 0$, maar dat $\limsup_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu(E)\| > 0$, met ander woorde, dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu(E) \neq 0$. Laat $\epsilon > 0$. Kies die ry $(E_n) \subseteq \Sigma$ op so 'n manier dat $\mu(E_n) < 1/2^n$, maar $\|\nu(E_n)\| \geq \epsilon$ vir elke n . Aangesien $\|\nu(E_n)\| = \sup\{|x^* \nu(E_n)| : x^* \in \mathcal{B}_{X^*}\}$, kan ons vir elke n 'n $x_n^* \in \mathcal{B}_{X^*}$ kry sodanig dat $|x_n^* \nu(E_n)| \geq \epsilon/2$. Omdat ν 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra is, is ν sterk additief. Gevolglik weet ons dat die familie $\{|x_n^* \nu| : n \in \mathbb{N}\}$ gelykmatig sterk additief is (gevolg 1.3.8). Stel $F = \limsup_n E_n$, dit is,

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \quad \text{en} \quad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Aangesien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

volg vanuit die Borel-Cantelli lemma dat $\mu(F) = 0$. Die versameling F is dus 'n meetbare versameling van μ -maat nul. Per aanname kan ons aflei dat $\nu(E) = 0$ vir enige meetbare versameling $E \subseteq F$ [[as $E \subseteq F$, dan is $0 \leq \mu(E) \leq \mu(F) = 0$, dus $\mu(E) = 0$]]. In die besonder, as $(E_i) \in D^\Sigma$, dan is $\nu(F \cap E_i) = 0$ vir elke $i = 1, 2, \dots, r$. Per definisie volg dat $|x_n^* \nu|(F) = 0$ vir alle n . Ons definieer nou 'n ry van paargewys disjunkte meetbare versamelings soos volg:

$$G_1 = \Omega \setminus F_1 \quad \text{en} \quad G_{n+1} = F_n \setminus F_{n+1}$$

vir $n \geq 1$. Vir elke $m \in \mathbb{N}$ geld dat

$$\begin{aligned} F_{m-1} \setminus F &= F_{m-1} \setminus \left(\left(\bigcap_{n=1}^{m-1} F_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} F_n \right) \right) \\ &= F_{m-1} \setminus \left(F_{m-1} \cap \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} F_n \right) \right) \\ &= F_{m-1} \setminus \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=m}^{\infty} (F_{m-1} \setminus F_n) = \bigcup_{n=m}^{\infty} (F_{n-1} \setminus F_n) = \bigcup_{n=m}^{\infty} G_n, \end{aligned}$$

want (F_n) is 'n dalende ry versamelings. Aangesien ν 'n σ -additiewe vektormaat is, is elkeen van die variasies $|x_n^* \nu|$ 'n (σ -additiewe) maat. Vanuit die feit dat

$F \subseteq F_{m-1}$ en $|x_n^* \nu|(F) = 0$ vir alle n , volg vir enige n en m dat

$$\begin{aligned} |x_n^* \nu|(F_{m-1}) &= |x_n^* \nu|(F_{m-1}) - |x_n^* \nu|(F) \\ &= |x_n^* \nu|(F_{m-1} \setminus F) = |x_n^* \nu|\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} G_k\right) = \sum_{k=m}^{\infty} |x_n^* \nu|(G_k). \end{aligned}$$

Volgens die gelykmatig sterk additiwiteit van die familie $\{|x_n^* \nu| : n \in \mathbb{N}\}$ volg hieruit dat, as ons die limiet oor m neem, $\lim_{m \rightarrow \infty} |x_n^* \nu|(F_{m-1}) = 0$ gelykmatig in n . Maar nou, aangesien $E_n \subseteq F_n$ vir elke n , kry ons ook dat

$$|x^* \nu|(F_n) \geq |x^* \nu|(E_n) \geq |x^* \nu|(E_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

vir elke n . Dit is 'n teëspraak met die feit dat $(|x_n^* \nu|(F_{m-1}))$ gelykmatig in n na 0 konvergeer. $\square$

Die volgende voorbeeld wys dat stelling 1.3.13 nie noodwendig geld as die σ -additiewe vektormaet op 'n algebra in plaas van 'n σ -algebra gedefinieer is nie.

Voorbeeld 1.3.14. (Voorbeeld 2 p.11, [8])

Laat $\Omega = \mathbb{N}$ en laat $\mathcal{F}$ die algebra van alle deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees wat of eindig is of eindige komplement het. Definieer μ deur

$$\mu(E) = \begin{cases} |E| & \text{as } E \text{ eindig is} \\ -|\mathbb{N} \setminus E| & \text{as } \mathbb{N} \setminus E \text{ eindig is} \end{cases}$$

wees. In voorbeeld 1.1.16 het ons gesien dat μ 'n onbegrensde vektormaet is. Definieer nou 'n eindige σ -additiewe maat λ op $\mathcal{F}$ deur

$$\lambda(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n} \quad \text{en} \quad \lambda(\emptyset) = 0.$$

[[As $(E_k) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van disjunkte versamelings is sodanig dat $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$, dan is

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in E_k} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).]]$$

Vir beide μ en λ geld dat $\mu(E) = 0$ en $\lambda(E) = 0$ as en slegs as $E = \emptyset$. Duidelik is μ nie λ -absoluut kontinu nie. [[As ons die ry versamelings (F_k) definieer deur $F_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, dan is $F_k \in \mathcal{F}$ vir alle k en

$$\lambda(F_k) = \sum_{n \in F_k} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{en} \quad \mu(F_k) = -|\{1, 2, \dots, k-1\}| = 1 - k$$

Dus, soos $k \rightarrow \infty$ kry ons $\lambda(F_k) \rightarrow 0$, maar $\mu(F_k) \rightarrow -\infty$].

Die algebra $\mathcal{F}$ van alle versamelings wat of eindig is of eindige komplement het vorm 'n Boolese algebra. Volgens Stone se representasie stelling is $\mathcal{F}$ isomorf aan die Boolese algebra $\tilde{\mathcal{F}}$ van ope-en-geslote deelversamelings van die Stone ruimte $S(\mathcal{F})$. Die versameling $S(\mathcal{F})$ is 'n kompakte topologiese ruimte. As $(\tilde{E}_n) \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ nou 'n willekeurige ry van paargewys disjunkte elemente is sodanig dat $\tilde{E} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n \in \tilde{\mathcal{F}}$, dan is $\tilde{E}$ geslote (en oop). Aangesien $S(\mathcal{F})$ kompak is en $\tilde{E} \subseteq S(\mathcal{F})$, is $\tilde{E}$ ook

kompak. Maar elke $\tilde{E}_n$ is ook oop. Dus vorm $\{\tilde{E}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 'n oop oordekking vir $\tilde{E}$. Ons kan dus 'n eindige suboordekking $\{\tilde{E}_{n_1}, \tilde{E}_{n_2}, \dots, \tilde{E}_{n_k}\}$ vir $\tilde{E}$ kry. Maar dit beteken dat $\tilde{E}_n = \emptyset$ behalwe vir eindig veel n . Gevolglik is enige (eindig additiewe) vektormaat op $\mathcal{F}$ 'n σ -additiewe vektormaat. Definieer nou die mate $\tilde{\mu}$ en $\tilde{\lambda}$ op $\tilde{\mathcal{F}}$ deur

$$\tilde{\mu}(\tilde{E}) = \mu(E) \quad \text{en} \quad \tilde{\lambda}(\tilde{E}) = \lambda(E)$$

waar $\tilde{E}$ en E die ooreenstemmende elemente in $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{F}$ is. Beide $\tilde{\mu}$ en $\tilde{\lambda}$ is eindig en dus ook σ -additief op $\tilde{\mathcal{F}}$ en as $\tilde{\lambda}(\tilde{E}) = \lambda(E) = 0$, dan is $E = \emptyset$ en dan is $\tilde{\mu}(\tilde{E}) = \mu(E) = \mu(\emptyset) = 0$. Maar $\tilde{\mu}$ is nie $\tilde{\lambda}$ -absoluut kontinu nie [[vir die ry (F_k) geld weer dat $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}(F_k) = 0$, maar $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(F_k) = -\infty$]]. Ons het dus 'n voorbeeld van 'n σ -additiewe vektormaat op 'n algebra wat verdwyn op alle nulversamelings van 'n eindige nie-negatiewe maat, maar wat nie absoluut kontinu met betrekking tot daardie maat is nie. $\square$

Noem 'n familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig begrens as $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(\Omega) < \infty$. Die volgende stelling het belangrike gevolge vir ons.

Stelling 1.3.15. (Stelling 4 p.11, [8])

Laat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Laat $\mathcal{I}$ een of ander indeksversameling wees. Neem aan dat ν_i vir elke $i \in \mathcal{I}$ 'n σ -additiewe vektormaat op Σ is en dat die familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig begrens is. Dan is die familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig sterk additief as en slegs daar 'n eindige maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ bestaan sodanig dat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is.

Bewys.

Neem aan daar bestaan 'n eindige maat μ sodanig dat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is. Vanuit die σ -additiwiteit van μ volg dat as (E_n) 'n ry van paargewys disjunkte meetbare versamelings is, dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \right) = 0.$$

En dus, aangesien elke ν_i 'n σ -additiewe vektormaat is en $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is, volg dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \left\| \sum_{n=k}^{\infty} \nu_i(E_n) \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \left\| \nu_i \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \right) \right\| = 0.$$

Dit wys dat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig sterk additief is.

Omgekeerd, neem aan $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ is gelykmatig sterk additief. Dan verseker gevolg 1.3.8 dat die familie van skaalarmate $\{x^* \nu_i : x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ ook gelykmatig sterk additief is. As ons kan wys dat die familie $\{x^* \nu_i : x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is, dan volg dat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ ook gelykmatig μ -absoluut kontinu is. [[As $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} |x^* \nu_i(E)| = 0$ gelykmatig in i en $x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$, dan is $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup |x^* \nu_i(E)| = \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu_i(E)\| = 0$ gelykmatig in i .]] Ons kan dus sonder verlies in algemeenheid met 'n gelykmatig sterk additiewe familie van skaalarmate $\{\mu_i : i \in \mathcal{I}\}$ werk.

Ons eerste stap is om te wys dat daar 'n eindige aantal indekse $i_1, i_2, \dots, i_n$ bestaan sodanig dat

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |\mu_{i_k}|(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{i \in \mathcal{I}} |\mu_i(E)| < \epsilon$$

vir enige $\epsilon > 0$. Neem aan die aanspraak is vals. Laat i_1 'n vaste indeks wees. Dan bestaan daar 'n versameling $E_1 \in \Sigma$ en 'n indeks $i_2 \in \mathcal{I}$ sodanig dat $|\mu_{i_1}|(E_1) = 0$, maar $|\mu_{i_2}(E_1)| \geq \epsilon$. Maar dan kan ons weer 'n versameling E_2 en 'n indeks $i_3 \in \mathcal{I}$ kry sodanig dat $|\mu_{i_1}|(E_2) = 0$ en $|\mu_{i_2}|(E_2) = 0$, maar $|\mu_{i_3}(E_2)| \geq \epsilon$. Deur so voort te gaan, kan ons 'n ry versamelings $(E_n) \subseteq \Sigma$ en 'n ry indekse $(i_n) \subseteq \mathcal{I}$ kry sodanig dat

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |\mu_{i_k}|(E_n) = 0 \quad \text{maar} \quad |\mu_{i_{n+1}}(E_n)| \geq \epsilon$$

vir alle n . Definieer nou 'n dalende ry meetbare versamelings (F_n) deur $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Dan bestaan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{i_k}(F_n)$ gelykmatig in i volgens stelling 1.3.6. Maar $F_n \downarrow \emptyset$ as $n \rightarrow \infty$, dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{i_k}(F_n) = 0$ gelykmatig in i en in die besonder is $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{i_k}(F_n)| = 0$ gelykmatig in k . Maar aan die anderkant is

$$\begin{aligned} \mu_{i_{n+1}}(F_n) &= \mu_{i_{n+1}}(E_n) + \mu_{i_{n+1}}\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} (E_j \setminus E_n)\right) \\ &= \mu_{i_{n+1}}(E_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_{i_{n+1}}(E_j \setminus E_n) = \mu_{i_{n+1}}(E_n) + 0 \end{aligned}$$

vir alle n $[|\mu_{i_{n+1}}(E_j \setminus E_n)| \leq |\mu_{i_{n+1}}|(E_j \setminus E_n) \leq |\mu_{i_{n+1}}|(E_j) = 0$ as $j \geq n+1$, dus $\mu_{i_{n+1}}(E_j \setminus E_n) = 0$ vir alle $j \geq n+1]$. Dus is

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_k |\mu_{i_k}(F_n)| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mu_{i_{n+1}}(E_n)| \geq \epsilon,$$

'n teësprak met die feit dat $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{i_k}(F_n)| = 0$ gelykmatig in k .

Ons kan dus nou vir elke $m \in \mathbb{N}$ 'n eindige aantal indekse $i_1^{(m)}, i_2^{(m)}, \dots, i_{n_m}^{(m)}$ kry sodanig dat

$$\sup_{1 \leq j \leq n_m} |\mu_{i_j^{(m)}}|(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{i \in \mathcal{I}} |\mu_i(E)| < \frac{1}{m}.$$

Definieer nou vir elke m 'n versamelingsfunksie $\lambda_m : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ deur

$$\lambda_m(E) = \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} |\mu_{i_j^{(m)}}|(E).$$

Dan is elke λ_m 'n maat [[elkeen van die variasies $|\mu_{i_j^{(m)}}|$ is 'n nie negatiewe σ -additiewe maat en dus is die som λ_m ook nie-negatief en σ -additef]]. Verder is

$$\lambda_m(E) = \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} |\mu_{i_j^{(m)}}|(E) \leq \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} \sup_i |\mu_i|(E) = \sup_i |\mu_i|(E) \quad (1.3.2)$$

vir elke m en enige $E \in \Sigma$. Nou as $\lambda_m(E) = 0$, dan is $|\mu_{i_j^{(m)}}|(E) = 0$ vir elke $j = 1, 2, \dots, n_m$ en dus $\sup_{1 \leq j \leq n_m} |\mu_{i_j^{(m)}}|(E) = 0$, maar dan weet ons dat $\sup_{i \in \mathcal{I}} |\mu_i(E)| < 1/m$. Verder is die ry mate (λ_m) gelykmatig begrens, want per aanname is die familie $\{\mu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig begrens. Definieer 'n maat μ deur

$$\mu(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m(E)}{2^m}$$

Dan gee ongelijkheid 1.3.2 vir ons

$$\mu(E) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m(E)}{2^m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sup_i |\mu_i|(E)}{2^m} = \sup_i |\mu_i|(E) \quad (1.3.3)$$

vir enige $E \in \Sigma$. As $\mu(E) = 0$, dan moet $\lambda_m(E) = 0$ vir alle m want elke λ_m is nie-negatief. Ons het gesien dat dit weer op sy beurt impliseer dat $\sup_{i \in \mathcal{I}} |\mu_i(E)| < 1/m$ vir elke m en dus $\mu_i(E) = 0$ vir alle $i \in \mathcal{I}$.

Ons wys nou dat die familie $\{\mu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is. Definieer 'n σ -additiewe vektormaats $\nu : \Sigma \rightarrow \ell_{\infty}(\mathcal{I})$ deur

$$\nu(E)(i) = \mu_i(E)$$

vir $E \in \Sigma$ en $i \in \mathcal{I}$. [[Hier is $\ell_{\infty}(\mathcal{I})$ die Banach ruimte van alle skalaarwaardige funksies op $\mathcal{I}$ wat begrens is in die supremum norm $\|f\| = \sup_{i \in \mathcal{I}} |f(i)|$. Die vektormaats ν is σ -additief, want as $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings is, dan is

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)(i) = \mu_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)(i)$$

vir alle $i \in \mathcal{I}$.]] As $\mu(E) = 0$, dan is $\mu_i(E) = 0$ vir alle i en dus ook $\nu(E) = 0$. Ons sien dus dat ν op alle versamelings van μ -maat nul verdwyn. Aangesien ν 'n σ -additiewe vektormaats en μ 'n eindige maat wat op 'n σ -algebra gedefinieer is, impliseer dit dat $\nu \ll \mu$. Dit beteken dat

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu(E)\| = \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} |\nu(E)(i)| = \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} |\mu_i(E)| = 0.$$

Dit wys dat $\{\mu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is. □

Gevolg 1.3.16. (Gevolg 5 p.13, [8])

Laat $\mathcal{I}$ een of ander indeksversameling wees en laat elke $\nu_i : \Sigma \rightarrow X$ 'n vektormaats gedefinieer op 'n σ -algebra wees. Neem aan die familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ is begrens en gelykmatig σ -additief. As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n eindige maat is en elke ν_i μ -absoluut kontinu is, dan is

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\| = 0.$$

Verder bestaan daar 'n eindige maat μ sodanig dat elke ν_i μ -absoluut kontinu is en

$$0 \leq \mu(E) \leq \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(E)$$

vir alle $E \in \Sigma$. Die gevolg is dat $\mu(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(E) \rightarrow 0$.

Bewys. As μ 'n eindige maat is sodanig dat elke ν_i μ -absoluut kontinu is, dan is $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu_i(E) = 0$ vir alle $i \in \mathcal{I}$. Maar dan geld ook dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu_i(E)\| = 0$ vir alle $i \in \mathcal{I}$ en dus $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\| = 0$. [[Definieer $\nu : \Sigma \rightarrow \ell_{\infty}(\mathcal{I})$ deur $\nu(E)(i) = \|\nu_i(E)\|$. As $\mu(E) = 0$, dan is $\|\nu_i(E)\| = 0$ vir alle $i \in \mathcal{I}$ en dus ook $\nu(E) = 0$. Net soos in die bewys van die vorige stelling volg dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\| = 0$]].

Andersom, beskou die familie skalaarmate $\{x^* \nu_i : x^* \in \bar{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ en konstrueer die maat μ op dieselfde manier as in die bewys van stelling 1.3.13. dan volg

net soos in ongelykheid 1.3.3 dat $\mu(E) \leq \sup_{x^* \in \bar{B}_{X^*}} \sup_i \|x^* \nu_i\|(E) = \sup_i \|\nu_i\|(E)$ vir alle $E \in \Sigma$. Verder volg net soos in die bewys van stelling 1.3.13 dat $\{x^* \nu_i : x^* \in \bar{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig μ -absoluut kontinu is. Maar dan is

$$0 = \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup_{x^* \in \bar{B}_{X^*}} |x^* \nu_i(E)| = \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\|.$$

Ten slotte wys ons $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_i \|\nu_i\|(E) = 0$ as $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_i \|\nu_i(E)\| = 0$. Neem aan dit is nie so nie. Dan bestaan daar 'n $\epsilon > 0$ en rye $(E_n) \subseteq \Sigma$ en (i_n) sodanig dat $\mu(F_n) < 1/2^n$, maar $\|\nu_{i_n}\|(E_n) > \epsilon$. Maar dan bestaan daar volgens proposisie 1.1.17(5) vir elke n 'n deelversameling $F_n \subseteq E_n$ sodanig dat $\|\nu_{i_n}(F_n)\| > \epsilon/4$. Maar dan is (F_n) 'n ry versamelings met $\mu(H_n) < 1/2^n \downarrow 0$, maar $\sup_i \|\nu_i(H_n)\| \geq \epsilon/4$. Dit weerspreek die feit dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(F_n)\| = 0$. Daarmee is die stelling bewys. $\square$

Ons kry nou direk die belangrike lemma van Bartle-Dunford-Schwartz.

Gevolg 1.3.17. (Bartle-Dunford-Schwartz lemma) (Gevolg 6 p.14, [8], Lemma IV.10.5 p.321, [13])

As ν 'n σ -additiewe vektormaats op 'n σ -algebra Σ is, dan bestaan daar 'n eindige maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ sodanig dat

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow \infty} \|\nu\|(E) = 0 \quad \text{en} \quad \mu(E) \leq \|\nu\|(E)$$

vir alle $E \in \Sigma$.

Beskou 'n monotone versamelingsfunksie $\rho : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Ons noem ρ kontinu as dit vir elke ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$, $E_n \downarrow \emptyset$ waarvoor daar 'n n met $\rho(E_n) < \infty$ bestaan, geld dat $\rho(E_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. As $\{\rho_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van monotone versamelingsfunksies is, dan sê ons $\{\rho_i\}$ is gelykmatig kontinu as dit vir elke meetbare dalende ry $E_n \downarrow \emptyset$ waarvoor $\rho_i(E_1) < \infty$ vir alle i , geld dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_i(E_n) = 0$$

gelykmatig in i .

Gevolg 1.3.18. (p.521, [9])

As (ν_n) 'n ry σ -additiewe vektormate op 'n σ -algebra is wat gelykmatig σ -additief is, dan is die ry semivariasies $(\|\nu_n\|)$ gelykmatig kontinu op Σ . In die besonder, as $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n σ -additiewe vektormaats is, dan is $\|\nu\|$ kontinu.

Bewys. Laat $(E_k) \subseteq \Sigma$ 'n willekeurige ry wees met $E_k \downarrow \emptyset$. Die ry vektormate σ -additiewe vektormate (ν_n) is gelykmatig sterk additief. Volgens gevolg 1.3.16 bestaan daar 'n eindige maat μ sodanig dat $\sup_n \|\nu_n\|(E) \rightarrow 0$ as $\mu(E) \rightarrow 0$. Omdat μ 'n eindige maat is, geld dat $\mu(E_k) \downarrow 0$ en dus volg dat $\sup_n \|\nu_n\|(E) \rightarrow 0$. Dit wys dat $(\|\nu\|)$ gelykmatig kontinu is. $\square$

Nog 'n gevolg is dat die beeld van 'n σ -additiewe vektormaats op Σ 'n relatief swak kompakte beeld het.

Gevolg 1.3.19. (gevolg 7 p.14, [8])

'n σ -Additiewe vektormaats gedefinieer op 'n σ -algebra het 'n relatief swak kompakte beeld.

Bewys. Laat $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n σ -additiewe vektormaat wees. Dan is ν sterk additief en dus begrens (sien gevolg 1.3.9). Laat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n eindige maat wees sodanig dat $\nu \ll \mu$. Dan geld ook dat $x^*\nu \ll \mu$ vir alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$. Laat $f \in L^\infty(\mu)$. Vanuit die stelling van Radon-Nikodym volg vir elke $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ dat

$$x^* \left(\int f d\nu \right) = \int f d(x^*\nu) = \int f \frac{d(x^*\nu)}{d\mu} d\mu$$

waar $d(x^*\nu)/d\mu := g_{x^*} \in L_1(\mu)$ die Radon-Nikodym afgeleide van $x^*\nu$ met betrekking tot μ is. Hierbo is $f g_{x^*} \in L_1(\mu)$. Neem nou aan $(f_i) \subseteq L^\infty(\mu)$ is 'n net funksies is wat in die swak*-topologie van $L^\infty(\nu)$ na f_0 konvergeer. Dan geld

$$\lim_i x^* \left(\int f_i d\nu \right) = \lim_i \int f_i g_{x^*} d\mu = \int f_0 g_{x^*} d\mu = x^* \left(\int f_0 d\nu \right).$$

Die net $(\int f_i d\nu)$ konvergeer dus swak na $\int f_0 d\nu$ en gevolglik is die integraal swak*-swak kontinu. Dus sal die integraal die swak* kompakte versameling $\{f \in L_\infty(\nu) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ op 'n swak kompakte versameling $K \subseteq X$ afbeeld. Maar nou sien ons

$$\{\nu(E) : E \in \Sigma\} = \left\{ \int \mathcal{I}_E d\nu : E \in \Sigma \right\} \subseteq \left\{ \int f d\nu : \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \subseteq K.$$

Die beeld van ν is dus 'n deelversameling van 'n swak kompakte versameling en gevolglik is die afsluiting van die beeld van ν swak kompak. $\square$

1.4 Die Nikodým begrensdheidstelling

Neem regdeur hierdie afdeling aan dat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω is. As X en Y normeerde ruimtes is, dan is $L(X, Y)$ die ruimte van alle begrensde lineêre operatore van X na Y . 'n Deelversameling $\mathcal{T} \subseteq L(X, Y)$ is gelykmatig begrens as $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{T}\} < \infty$. Die versameling $\mathcal{T}$ is puntsgewys begrens as daar vir elke $x \in X$ 'n $M_x > 0$ bestaan sodanig dat $\|Tx\| \leq M_x$ vir alle $T \in \mathcal{T}$. As die normeerde ruimte X 'n Banach ruimte is, dan sê die klassieke gelykmatig begrensdheid stelling dat $\mathcal{T}$ gelykmatig begrens is as $\mathcal{T}$ puntsgewys begrens is.

Laat X nou 'n Banach ruimte wees. Nikodým se begrensdheid stelling handel oor families van begrensde vektormate $\nu_i : \Sigma \rightarrow X$, dit is, vektormate ν_i waarvoor $\|\nu_i\|(\Omega) < \infty$. Die stelling sê dat as so 'n familie versamelingsgewys (dit wil sê, puntsgewys) begrens is, dan is die familie gelykmatig begrens.

Stelling 1.4.1. (Nikodým begrensdheid stelling) (Stelling 1 p.14, [8])

Laat $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van X -waardige begrensde vektormate op Σ wees. As $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\| < \infty$ vir elke $E \in \Sigma$, dan is die familie $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig begrens, dit wil sê, $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(\Omega) < \infty$.

Bewys. Neem aan $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\| < \infty$ vir elke $E \in \Sigma$. Dan volg ook dat $\sup_{i \in \mathcal{I}} \sup_{x^* \in \bar{B}_{X^*}} |x^* \nu_i(E)| < \infty$ vir elke $E \in \Sigma$. As die familie van skalaarmate $\{x^* \nu_i : x^* \in \bar{B}_{X^*}, i \in \mathcal{I}\}$ gelykmatig begrens is, dan is

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(\Omega) = \sup_{i \in \mathcal{I}} \sup_{x^* \in \bar{B}_{X^*}} |x^* \nu_i|(\Omega) < \infty,$$

want vir skalaarmate soos $x^* \nu_i$ is $|x^* \nu_i| = \|x^* \nu_i\|$. Gevolglik is dit voldoende om die stelling vir 'n familie van begrensde skalaarmate $\{\mu_i : i \in \mathcal{I}\}$ te bewys. Verder, as $\sup_{i \in \mathcal{I}} |\mu_i|(\Omega) = \alpha$, waar $\alpha \in \mathbb{R}$, dan bestaan daar 'n ry $(\mu_n) \subseteq \{\mu_i : i \in \mathcal{I}\}$ sodanig dat $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(\Omega) = \alpha$. Ons kan dus sonder verlies in algemeenheid, die stelling vir 'n ry begrensde skalaarmate (μ_n) op Σ met die eienskap dat $\sup_n |\mu_n(E)| < \infty$ vir alle $E \in \Sigma$, bewys.

Neem dus aan (μ_n) is 'n ry van begrensde skalaarmate met die eienskap dat $\sup_n |\mu_n(E)| < \infty$ vir alle $E \in \Sigma$, maar dat $\sup_n |\mu_n|(\Omega) = \infty$. Vanuit proposisie 1.1.17(5) volg dat $|\mu_n|(\Omega) \geq \sup\{|\mu_n(E)| : E \in \Sigma\}$ vir elke n . Dus is $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E)| = \infty$.

Ons wys nou dat daar vir enige $\alpha \in \mathbb{R}$ 'n $k \in \mathbb{N}$ en 'n verdeling $\{E, F\} \in D^\Sigma$ bestaan sodanig dat $|\mu_k(E)| > \alpha$ en $|\mu_k(F)| > \alpha$. Aangesien $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E)| = \infty$, kan ons vir enige α 'n k en 'n $E \in \Sigma$ kry sodanig dat

$$|\mu_k(E)| > \sup_n |\mu_n(\Omega)| + \alpha > \alpha.$$

Gevolglik, as $F = \Omega \setminus E$, dan geld dat

$$|\mu_k(F)| = |\mu_k(\Omega) - \mu_k(E)| \geq |\mu_k(E)| - |\mu_k(\Omega)| > \alpha.$$

Daar bestaan dus ook 'n kleinste natuurlike getal $k = n_1$ waarvoor daar 'n verdeling $\{E_1, F_1\} \in D^\Sigma$ bestaan sodanig dat $|\mu_{n_1}(E_1)| > 2 = \alpha_1$ en $|\mu_{n_1}(F_1)| > 2 = \alpha_1$. Aangesien $\{E_1, F_1\}$ 'n verdeling van Ω is, geld vir elke n en enige $E \in \Sigma$ dat

$$|\mu_n(E)| \leq |\mu_n(E \cap E_1)| + |\mu_n(E \cap F_1)|.$$

Maar $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E)| = \infty$, dus moet $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E \cap E_1)| = \infty$ of $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E \cap F_1)| = \infty$. As $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E \cap E_1)| = \infty$, stel $A_1 = E_1$ en $B_1 = F_1$ anders, as $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_n(E \cap F_1)| = \infty$, stel $A_1 = F_1$ en $B_1 = E_1$ (A_1 is dus telkens 'n versameling waarvoor die supremum oneindig is). Weer bestaan daar 'n kleinste natuurlike getal $n_2 > n_1$ waarvoor daar 'n meetbare disjunkte verdeling $\{E_2, F_2\}$ van A_1 bestaan sodanig dat

$$|\mu_{n_2}(E_2)|, |\mu_{n_2}(F_2)| > 3 + |\mu_{n_2}(B_1)| := \alpha_2.$$

Net soos in die vorige stap moet dit waar wees dat $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_{n_2}(E_2)| = \infty$ of $\sup_n \sup_{E \in \Sigma} |\mu_{n_2}(F_2)| = \infty$. Definieer weer A_2 as die versameling waarvoor ons oneindig kry en B_2 as die ander versameling. Net soos in die vorige stap bestaan daar dan 'n kleinste $n_3 > n_2$ waarvoor daar 'n meetbare verdeling $\{E_3, F_3\}$ van A_2 bestaan sodanig dat

$$|\mu_{n_3}(E_3)|, |\mu_{n_3}(F_3)| > 4 + |\mu_{n_3}(B_2)| + |\mu_{n_3}(B_1)| := \alpha_3.$$

Deur induktief op hierdie manier voort te gaan, kry ons 'n ry (B_n) van disjunkte meetbare versamelings en 'n streng stygende ry $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$, sodanig dat

$$|\mu_{n_k}(B_k)| > \alpha_k = (k+1) + \sum_{i=1}^{k-1} |\mu_{n_k}(B_i)|.$$

Herskryf die ry $(\mu_k) := (\mu_{n_k})$ en verdeel $\mathbb{N}$ in oneindig veel disjunkte versamelings $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$. Aangesien die variasie $|\mu_1|$ σ -supadditief is, geld

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_1| \left(\bigcup_{n \in N_k} B_n \right) \leq |\mu_1| \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \in N_k} B_n \right) \right) = |\mu_1| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq |\mu_1|(\Omega).$$

Die ry (μ_n) is 'n ry van begrensde skalaarmate, dus is die reeks hierbo konvergent. Gevolglik weet ons $|\mu_1| \left(\bigcup_{n \in N_k} B_n \right) \rightarrow 0$ soos $k \rightarrow \infty$. Dus kan ons 'n deelry (B_{k_l}) van (B_k) , $k \geq 2$ kry sodanig dat

$$|\mu_1| \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} B_{k_l} \right) < 1.$$

Herhaal die argument met $|\mu_{k_1}|$ in die plek van $|\mu_1|$, dan geld

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\mu_{k_1}| \left(\bigcup_{n \in N_l} B_{k_n} \right) \leq |\mu_{k_1}| \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n \in N_l} B_{k_n} \right) \right) = |\mu_{k_1}| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{k_n} \right) \leq |\mu_{k_1}|(\Omega).$$

Kies nou weer 'n deelry $(B_{k_{l_m}})$ van (B_{k_l}) , $l \geq 2$ sodanig dat

$$|\mu_{k_1}| \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{k_{l_m}} \right) < 1.$$

Gaan nou voort op die bostaande manier en veronderstel $(p_r) \subseteq \mathbb{N}$ is die ry met $p_1 = 1$, $p_2 = k_1$, $p_3 = k_{l_1}$, $\dots$. Dan geld dat

$$|\mu_{p_r}| \left(\bigcup_{s=r+1}^{\infty} B_{p_s} \right) < 1,$$

want $|\mu_{p_r}|$ is monotoon. Op hierdie stadium het ons die volgende feite tot ons beskikking:

$$|\mu_{p_r}(B_{p_r})| \geq (p_r + 1) + \sum_{s=1}^{r-1} |\mu_{p_r}(B_{p_s})| \quad (1.4.1)$$

$$-|\mu_{p_r}| \left(\bigcup_{s=r+1}^{\infty} B_{p_s} \right) > -1. \quad (1.4.2)$$

Vanuit die omgekeerde driehoeksongelykheid en ongelykhede 1.4.1 en 1.4.2, volg

$$\begin{aligned} \left| \mu_{p_r} \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} B_{p_s} \right) \right| &= \left| \mu_{p_r} \left(\bigcup_{s=1}^{r-1} B_{p_s} \right) + \mu_{p_r}(B_{p_r}) + \mu_{p_r} \left(\bigcup_{s=r+1}^{\infty} B_{p_s} \right) \right| \\ &\geq |\mu_{p_r}(B_{p_r})| - \sum_{s=1}^{r-1} |\mu_{p_r}(B_{p_s})| - |\mu_{p_r}| \left(\bigcup_{s=r+1}^{\infty} B_{p_s} \right) \\ &\geq (p_r + 1) - 1 = p_r. \end{aligned}$$

Gevolgtik is $\sup_r |\mu_{p_r}(\bigcup_{s=1}^{\infty} B_{p_s})| = \infty$, maar dit is 'n teësprak met die aanname dat $\sup_n |\mu_n(E)| < \infty$ vir alle $E \in \Sigma$. $\square$

Die volgende voorbeeld wys waarom die Nikodým begrensdheid stelling slegs vir 'n σ -algebra gegee word.

Voorbeeld 1.4.2. (Nikodým se begrensdheidstelling geld nie vir algebras nie) (Voorbeeld 5 p.18, [8])

Laat $\mathcal{F}$ die algebra van deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees wat of self eindig is of 'n eindige komplement het. Vir elke n laat $\lambda_n(E) = 1$ as $n \in E$ en $\lambda_n(E) = 0$ as $n \notin E$, $E \in \mathcal{F}$. Vir elke n definieer μ_n deur

$$\mu_n(E) = \begin{cases} n(\lambda_{n+1}(E) - \lambda_n(E)) & \text{as } E \text{ eindig is} \\ n(\lambda_n(E) - \lambda_{n+1}(E)) & \text{as } \mathbb{N} \setminus E \text{ eindig is} \end{cases}$$

Laat $E \in \mathcal{F}$. Dan is E eindig of $\mathbb{N} \setminus E$ is eindig.

1. As E eindig is dan is $E = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ vir een of ander $k \in \mathbb{N}$. Orden E só dat $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Dan is $\lambda_i(E) = 1$ vir $i = n_1, n_2, \dots, n_k$ en $\lambda_i(E) = 0$ as $i > n_k$. Dus is $\sup_i |\mu_i(E)| = \sup_i |i(\lambda_{i+1}(E) - \lambda_i(E))| = n_k < \infty$.
2. As $\mathbb{N} \setminus E$ eindig is, dan is $\mathbb{N} \setminus E = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ vir een of ander k . Orden $\mathbb{N} \setminus E$ weer só dat $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Dan is $\lambda_i(E) = 0$ vir $i = n_1, n_2, \dots, n_k$ en $\lambda_i(E) = 1$ vir alle $i > n_k$. Dus is $\mu_i(E) = i(\lambda_i(E) - \lambda_{i+1}(E)) = 0$ vir alle $i > n_k$. En dus is $\sup_i |\mu_i(E)| = n_k < \infty$.

Dit wys dat $\sup_n |\mu_n(E)| < \infty$ vir alle $E \in \mathcal{F}$. Die voorwaarde van Nikodým se stelling word dus bevredig. Maar as ons nou 'n ry versamelings $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ definieer deur $E_n = \{1, 2, \dots, n, 0, 0, \dots\}$, dan is elke E_n 'n eindige versameling en vir elke n is $\sup_k |\mu_k(E_n)| = n$. Gevolgtik is $\sup_n \sup_k |\mu_k(E_n)| = \infty$ en dus ook $\sup_n \sup_{E \in \mathcal{F}} |\mu_n(E)| = \infty$. Nikodým se begrensdheidstelling geld dus nie in hierdie geval nie. $\square$

Onthou dat ons in afdeling 1.2 die versameling van meetbare funksies $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ deur $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ aangedui het. Daar het ons $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ toegerus met die supremum norm $\|f\| = \sup\{\|f(\omega)\| : \omega \in \Omega\}$. Die trapfunksies $\mathcal{S}(\Sigma, \mathbb{K})$ is dig in $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$.

Gevolg 1.4.3. (Gevolg 2 p.16, [8])

Laat $\{T_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van begrensde lineêre operatore van die meetbare funksies $\mathcal{M}(\Sigma, \mathbb{R})$ na X wees. As $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i \mathcal{I}_E\| < \infty$ vir alle $E \in \Sigma$, dan is $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i\| < \infty$.

In die besonder, as $\mu : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 'n maat is, en $\{T_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van begrensde lineêre operatore $T_i : L_\infty(\mu) \rightarrow X$ is, dan is $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i\| < \infty$ as $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i \mathcal{I}_E\| < \infty$.

Bewys. Vir elke $i \in \mathcal{I}$ en $E \in \Sigma$, stel $\nu_i(E) := T_i \mathcal{I}_E$ soos in die bewys van stelling 1.2.8. Dan is $\{\nu_i : i \in \mathcal{I}\}$ 'n familie van begrensde vektormate $\nu_i : \Sigma \rightarrow X$. Per aanname is $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i(E)\| < \infty$ vir alle $i \in \mathcal{I}$ en $E \in \Sigma$. Dus volgens Nikodým se begrensde stelling geld dat $\sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(\Omega) < \infty$. As $\bar{\nu}_i$ nou die integraal van afdeling 1.2 is, dan is $\bar{\nu}_i = T_i$ en $\|\bar{\nu}_i\| = \|\nu_i\|(\Omega)$. Dus is

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i\| = \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\bar{\nu}_i\| = \sup_{i \in \mathcal{I}} \|\nu_i\|(\Omega) < \infty. \quad \square$$

As Y 'n Banach ruimte is dan word $Y_0 \subseteq Y$ 'n totale deelversameling van Y genoem as die span van Y_0 dig in Y is. Die volgende resultaat wys dat 'n versamelingsfunksie wat swak begrens en swak additief is, 'n begrensde vektormaat is.

Gevolg 1.4.4. (Dieudonné-Grothendieck) (Gevolg 3 p.16, [8])

Beskou 'n totale deelversameling $\Psi \subseteq X^*$ en 'n versamelingsfunksie $\nu : \Sigma \rightarrow X$. As $x^* \nu$ 'n begrens en additief is vir elke $x^* \in \Psi$, dan is ν 'n begrensde vektormaat.

Bewys. As $x^* \in X^* = \overline{\text{span} \Psi}$, dan bestaan daar 'n net $(x_i^*) \subseteq \text{span} \Psi$ sodanig dat $x^* = \lim_i x_i^*$. Aangesien elke $x_0^* \nu$, waar $x_0^* \in \Psi$, begrens en eindig additief is, is elke $x_i^* \nu$ ook begrens en eindig additief. Gevolglik, vir enige twee disjunkte versamelings $E, F \in \Sigma$, is

$$x^* \nu(E \cup F) = \lim_i x_i^* \nu(E \cup F) = \lim_i x_i^* \nu(E) + \lim_i x_i^* \nu(F) = x^* \nu(E) + x^* \nu(F).$$

Aangesien ons dit vir enige $x^* \in X^*$ kan doen, volg dat ν 'n vektormaat is. Volgende sien ons dat

$$\|\nu\|(\Omega) = \sup_{x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* \nu|(\Omega) \leq \sup_{x^* \in X^*} |x^* \nu|(\Omega).$$

Dus, as ons kan wys dat $x^* \nu$ begrens is vir elke $x^* \in X^*$, dan volg vanuit die Nikodým begrensde stelling dat $\sup_{x^* \in X^*} |x^* \nu|(\Omega) < \infty$ en dus dat ν 'n begrensde vektormaat is.

Beskou dus nou die versameling $M = \{x^* \in X^* : |x^* \nu|(\Omega) < \infty\}$. Ons wys dat $M = X^*$. Vanuit die eienskappe van die variasie van 'n vektormaat (proposisie 1.1.9) weet ons dat M 'n lineêre versameling is. Tweedens is $\Psi \subseteq M$ per aanname. Gevolglik is $\text{span} \Psi \subseteq M$. Maar $\text{span} \Psi = X^*$ in die swak* topologie, so M is 'n swak*-digte deelversameling van X^* . Stel $B_M = \{x^* \in M : \|x^*\| \leq 1\} = \bar{\mathcal{B}}_{X^*} \cap M$. Die versameling $\bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ is konveks. Dus, as ons kan wys dat B_M swak*-geslote is, volg

vanuit die stelling van Krein-Smulian dat M swak*-geslote is en dus dat $M = X^*$. Om te sien dat B_M swak*-geslote is, let ons op dat vir elke $E \in \Sigma$ dit geld dat

$$\sup_{x^* \in B_M} |x^* \nu(E)| \leq \sup_{x^* \in B_M} \|x^*\| \|\nu(E)\| \leq \|\nu(E)\| < \infty.$$

Volgens Nikodým se begrensdheid stelling bestaan daar 'n $K < \infty$ sodanig dat

$$\sup_{x^* \in B_M} \sup_{E \in \Sigma} |x^* \nu(E)| = K.$$

Laat $(x_i^*) \subseteq B_M$ 'n net wees sodanig dat $\lim_i x_i^* = x_0^*$ in die swak*-topologie. Dan is $\|x_0^*\| \leq 1$ en $|x_0^* \nu(E)| = \lim_i |x_i^* \nu(E)| \leq K$ vir alle $E \in \Sigma$. Dus is

$$|x_0^* \nu|(\Omega) = \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r |x_0^* \nu(E_i)| < \infty.$$

Dit beteken $x_0^* \in M$ en $\|x_0^*\| \leq 1$; dus $x_0^* \in B_M$. Aangesien B_M nou swak*-geslote is volg $M = X^*$. $\square$

Die volgende toepassing van Nikodým se begrensdheid stelling sê dat as 'n begrensde lineêre operator in die meetbare funksies $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ afbeeld en die indikatorfunksies in die beeld van die operator bevat is, dan is die beeld die hele ruimte $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$.

Gevolg 1.4.5. (Seever) (Gevolg 4 p.17, [8])

As $T : X \rightarrow \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$ 'n begrensde lineêre operator is en as $\{\mathcal{I}_E : E \in \Sigma\}$ in die beeld van T bevat is, dan is $TX = \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$.

Bewys. As $f \in \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$, dan is f die gelykmatige limiet van 'n ry skalaar Σ -trapfunksies $(f_n) \subseteq S(\Sigma, \mathbb{K})$. Sê

$$f_n = \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \alpha_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}.$$

Aangesien $\{\mathcal{I}_E : E \in \Sigma\} \subseteq \text{ran} T$, bestaan daar $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{r^{(n)}}^{(n)}$ sodanig dat $T x_i^{(n)} = \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$ en dus is

$$f_n = \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \alpha_i^{(n)} T x_i^{(n)} = T \left(\sum_{i=1}^{r^{(n)}} \alpha_i^{(n)} x_i^{(n)} \right) \in \text{ran} T,$$

want T is lineêr en $\sum_{i=1}^{r^{(n)}} \alpha_i^{(n)} x_i^{(n)} \in X$. Ons sien dus dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in \overline{\text{ran} T}$ en dus volg dat $\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K}) = \overline{TX}$ [[die insluiting $\overline{TX} \subseteq \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$ geld altyd want $T : X \rightarrow \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$ en ons het sopas gewys $\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K}) \subseteq \overline{TX}$]]. Dus, as ons kan wys dat TX geslote is, dan volg dat $TX = \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$.

Maar $\text{ran} T$ is geslote as en slegs as $\text{ran} T^*$ geslote is, waar $T^* : \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^* \rightarrow X^*$ die toegevoegde operator van T is. Vanuit stelling 1.2.8 is $\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*$ isomorf aan die ruimte van begrensde skalaarmate $[[\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^* = L(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ is isomorf aan die ruimte van alle begrensde mate $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ volgens stelling 1.2.8 (vir skalaarmate is die variasie en semivariasie van die maat gelyk aan mekaar)].

Neem in teenstelling aan dat $T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$ nie geslote is nie. Ons wys nou dat ons 'n ry begrensde mate $(\mu_k) \subseteq \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*$ kan kry sodanig dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k|(\Omega) = \infty \quad \text{en} \quad \|T^* \mu_k\| = 1$$

vir alle k . Aangesien $T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$ nie geslote is nie kan ons 'n ry $(x_n^*) \subseteq T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$ kry wat konvergeer na 'n $x^* \in X^*$, $x^* \notin T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$. Met ander woorde daar is 'n ry $(\mu_n) \subseteq \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*$ sodanig dat $(T^* \mu_n) \subseteq T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$, maar $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^* \mu_n \notin T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$. Neem sonder verlies in algemeenheid aan dat $\|x^*\| = 1$ en $\|T^* \mu_n\| = 1$ vir alle n . Neem aan (μ_n) is wel begrens in $\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*$, dan het (μ_n) 'n limietpunt, sê μ_0 , in die swak*-topologie. Maar aangesien T per aanname lineêr en begrens is, is T^* swak*-kontinu. Dus $T^* \mu_0 = T^*(\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^* \mu_n$, maar dan is $x^* = T^* \mu_0 \in T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$, 'n teësprak. Gevolglik is (μ_n) onbegrens. Dit impliseer dat daar vir elke $k \in \mathbb{N}$ 'n n_k is sodanig dat $\|\mu_{n_k}\|(\Omega) \geq k$. Stel $(\mu_k) = (\mu_{n_k})$, dan $\|T^* \mu_k\| = 1$ vir alle k en $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_k|(\Omega) = \infty$.

Nou as $E \in \Sigma$, dan is daar 'n $x \in X$ sodanig dat $Tx = \mathcal{I}_E$, want $\{\mathcal{I}_E : E \in \Sigma\} \subseteq TX$. Aangesien T^* die toegevoegde operator is, volg dat

$$T^* \mu_n(x) = \mu_n \circ T(x) = \mu_n \circ \mathcal{I}_E = \mu_n(E)$$

en dus is

$$\sup_k |\mu_k(E)| = \sup_k |T^* \mu_k(x)| \leq \sup_k \|T^* \mu_k\| \|x\| = \|x\| < \infty.$$

Dus volgens Nikodým se begrensdeheid stelling is $\sup_k |\mu_k|(\Omega) < \infty$, 'n teësprak met die feit dat $\lim_k |\mu_k|(\Omega) = \infty$. Die aanname dat $T^*(\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})^*)$ nie geslote is nie, is dus vals en gevolglik is $TX = \mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$. $\square$

1.5 Die struktuur van vektormate

In hierdie afdeling gebruik ons die gereedskap wat ons tot dusver opgebou het oor vektormate om resultate oor Banach ruimtes af te lei. Ons sal sien dat ons die stelling van Orlicz-Pettis en 'n stelling van Bessaga-Pelczyński kan bewys. Die belangrike waarneming wat gemaak word, is dat daar 'n verband tussen sterk additiewe vektormate en die Banach ruimtes c_0 en ℓ_∞ bestaan (hier is ℓ_∞ die ruimte wat bestaan uit skalaarree wat begrens is en $c_0 \subset \ell_\infty$ die ruimte van reye wat na 0 konvergeer). Dit is ook in hierdie afdeling dat ons die belangrike stelling van Vitali-Hahn-Saks-Nikodým kry. Hierdie stelling speel 'n rol in ons latere hoofstukke oor vektorintegrasie.

Die kern resultaat van hierdie afdeling is die lemma van Rosenthal.

Lemma 1.5.1. (Rosenthal se lemma) (Lemma 1 p.18, [8])

Laat (μ_n) 'n ry van gelykmatig begrensde eindig additiewe skalaarmate op die algebra $\mathcal{F}$ wees. As $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van disjunkte versamelings is en $\epsilon > 0$, dan bestaan daar 'n deelry (E_{n_k}) van (E_n) sodanig dat

$$|\mu_{n_k}| \left(\bigcup_{i \in N, i \neq k} E_{n_i} \right) < \epsilon$$

vir alle eindige deelversamelings $N \subseteq \mathbb{N}$.

Verder, op 'n σ -algebra Σ , kan die deelry só gekies word dat

$$|\mu_{n_k}| \left(\bigcup_{i \neq k} E_{n_i} \right) < \epsilon$$

vir alle $i \in \mathbb{N}$.

Bewys. Beskou eers die geval waar ons op 'n σ -algebra Σ werk. Die ry mate (μ_n) is gelykmatig begrens. Neem dus sonder verlies in algemeenheid aan dat $\sup_n |\mu_n|(\Omega) \leq 1$. Verdeel nou $\mathbb{N}$ in oneindig veel disjunkte oneindige versamelings $N_1, N_2, N_3, \dots$ [[Laat byvoorbeeld p_n die n^{de} priemgetal wees en laat N_n die versameling van natuurlike getalle wees waarvoor p_n die kleinste priemfaktor is (en voeg die getal 1 by die versameling N_1) met ander woorde

n	p_n	N_n
1	2	$N_1 = \{1, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
2	3	$N_2 = \{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$
3	5	$N_3 = \{5, 25, 35, 55, 65, \dots\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die vereiste dat 'n natuurlike k getal slegs in N_n voorkom as p_n die kleinste priemfaktor van k is, verseker dat die versamelings (N_n) disjunk is. Aangesien elke $k \in \mathbb{N}$ in priemfaktore ontbind kan word, vorm (N_n) 'n verdeling van $\mathbb{N}$. Laastens is elke versameling 'n oneindige versameling, want daar is oneindig veel priemgetalle en $p_n \cdot p_k \in N_n$ vir alle $k \geq n$.] Laat (E_n) 'n ry van disjunkte meetbare versamelings wees. As ons 'n m kan kry sodanig dat daar geen $i \in N_m$ is waarvoor

$$|\mu_i| \left(\bigcup_{j \in N_m, j \neq i} E_j \right) \geq \epsilon$$

nie, kan ons die versameling N_m aftel as $n_1, n_2, n_3, \dots$ waar $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ en dan het ons die gevraagde deelry, want in hierdie geval is

$$|\mu_{n_k}| \left(\bigcup_{i=1, i \neq k}^{\infty} E_{n_i} \right) < \epsilon.$$

As daar nie so 'n getal m is nie, dan bestaan daar vir elke $m \in \mathbb{N}$ 'n $i_m \in N_m$ waarvoor

$$|\mu_{i_m}| \left(\bigcup_{j \in N_m, j \neq i_m} E_j \right) \geq \epsilon.$$

Dan is (μ_{i_m}) 'n deelry van (μ_n) en (E_{i_m}) 'n deelry van (E_n) waarvoor dit geld dat

$$|\mu_{i_m}| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = |\mu_{i_m}| \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i_j} \right) + |\mu_{i_m}| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i_j} \right) \leq |\mu_{i_m}|(\Omega) \leq 1 \quad (1.5.1)$$

vir elke m . Aangesien die versamelings $N_1, N_2, N_3, \dots$ disjunk is, volg dat

$$\bigcup_{j \in N_m, j \neq i_m} E_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i_j}$$

vir elke m . Dus aangesien $|\mu_{i_m}|$ monotoon is, volg dat

$$|\mu_{i_m}| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i_j} \right) \geq \epsilon \quad (1.5.2)$$

vir alle m . Deur ongelykhede 1.5.1 en 1.5.2 te kombineer volg dat

$$|\mu_{i_m}| \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i_j} \right) \leq 1 - \epsilon$$

vir alle m .

Vervang nou die ry (μ_n) met die ry (μ_{i_m}) en (E_n) deur die ry (E_{i_m}) . Stel $I = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ en verdeel I in oneindig veel disjunkte oneindige versamelings $I_1, I_2, I_3, \dots$ Ons herhaal nou die bostaande prosesse: as daar nou vir elke j 'n $n_j = i_{m_j} \in I_j$ bestaan waarvoor

$$|\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{i \in I_j, i \neq n_j} E_i \right) \geq \epsilon,$$

dan is (μ_{n_j}) 'n deelry van (μ_{i_m}) en (E_{n_j}) is 'n deelry van (E_{i_m}) waarvoor dit geld dat

$$|\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{i_m} \right) = |\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \right) + |\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{i_m} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \right) \leq 1 - \epsilon$$

vir alle j . Net soos in die voorafgaande gedeelte van die bewys, volg vanuit

$$|\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{i \in I_j, i \neq n_j} E_i \right) \geq \epsilon \quad \text{en} \quad \bigcup_{i \in I_j, i \neq n_j} E_i \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{i_m} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$$

dat

$$|\mu_{n_j}| \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \right) \leq 1 - 2\epsilon.$$

Ons kan nou weer die proses herhaal. As die proses nooit stop nie, dan bestaan vir elke n 'n deelry $(\nu_k^{(n)})$ van (μ_n) en 'n deelry $(E_k^{(n)})$ van (E_n) waarvoor dit geld dat

$$|\nu_k^{(n)}| \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^{(n)} \right) \leq 1 - n\epsilon$$

vir elke n . Dit is duidelik nie moontlik nie, dus moet die proses een of ander tyd stop. Met ander woorde by een of ander punt, sê by die n^{de} stap is daar 'n oneindige versameling van natuurlike $N^{(n)} = \{n_1^{(n)}, n_2^{(n)}, n_3^{(n)}, \dots\}$ met geen $i \in N^{(n)}$ waarvoor

$$|\mu_i| \left(\bigcup_{j=1, j \neq i}^{\infty} E_j \right) \geq \epsilon.$$

Op hierdie manier kry ons dus die verlangde deelry van (E_n) .

Die geval waar ons op 'n algebra $\mathcal{F}$ werk, volg vanuit die σ -algebra geval. Beskou die integraal wat ons in afdeling 1.2 gedefinieer het. Dan, volgens lemma 1.2.3, is die afbeelding

$$T_{\mu_n} : \mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} : f \rightarrow \int f d\mu_n$$

'n begrensde lineêre funksionaal met norm $\|T_{\mu_n}\| = |\mu_n|(\Omega)$. Laat $\sigma(\mathcal{F})$ die σ -algebra deur $\mathcal{F}$ voortgebring wees. Dan is $\mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ 'n geslote deelruimte van $\mathcal{M}_{\infty}(\sigma(\mathcal{F}), \mathbb{K})$ [[As $(f_n) \subseteq \mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ en $f_n \rightarrow f \in \mathcal{M}_{\infty}(\sigma(\mathcal{F}), \mathbb{K})$ gelykmatig, dan is f ook $\mathcal{F}$ -meetbaar]]. Vanuit die Hahn-Banach stelling vir normeerde ruimtes volg dus dat ons die funksionaal T_{μ_n} tot $\mathcal{M}_{\infty}(\sigma(\mathcal{F}), \mathbb{K})$ kan uitbrei sodanig dat die norm van die uitgebreide funksionaal nog steeds $|\mu_n|(\Omega)$ is. Volgens stelling 1.2.8 kan ons vir elke uitgebreide funksionaal x_n^* 'n begrensde eindig additiewe skalaarmaatmaat $\bar{\mu}_n$ kry waarvoor

$$x_n^*(f) = \int f d\bar{\mu}_n = \int f d\mu_n = T_{\mu_n}(f)$$

vir alle $f \in \mathcal{M}_{\infty}(\sigma(\mathcal{F}), \mathbb{K})$ en $|\mu_n|(\Omega) = |\bar{\mu}_n|(\Omega)$. In die besonder, as $E \in \mathcal{F}$, dan is $\mathcal{I}_E \in \mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ en dus

$$\mu(E) = \int \mathcal{I}_E d\mu_n = \int \mathcal{I}_E d\bar{\mu}_n = \bar{\mu}_n(E).$$

Die eindige additiewe maat $\bar{\mu}_n$ is dus 'n uitbreiding van μ_n tot 'n σ -algebra Σ . As $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ nou 'n ry van disjunkte versamelings is en $\epsilon > 0$, bestaan daar volgens die eerste helfte van die bewys 'n $(E_{n_k}) \subseteq (E_n)$ sodanig

$$|\bar{\mu}_{n_k}| \left(\bigcup_{j=1, j \neq k}^{\infty} E_{n_j} \right) < \epsilon.$$

Dus, as N nou enige eindige deelversameling van $\mathbb{N}$ is, dan is

$$|\mu_{n_k}| \left(\bigcup_{j \in N, j \neq k} E_{n_j} \right) = |\bar{\mu}_{n_k}| \left(\bigcup_{j \in N, j \neq k} E_{n_j} \right) \leq |\bar{\mu}_{n_k}| \left(\bigcup_{j=1, j \neq k}^{\infty} E_{n_j} \right) < \epsilon. \quad \square$$

Rosenthal se lemma stel ons in staat om die volgende verband tussen sterk additiewe vektormate en die Banach ruimtes c_0 en ℓ_∞ te kry. Ons dui die n^{de} eenheidsvektor in ℓ_∞ deur e_n aan. Dit beteken $e_n(n) = 1$ en $e_n(i) = 0$ vir alle $i \neq n$ waar $e_n(i)$ die i^{de} inskrywing van die ry $e_n = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ aandui.

Stelling 1.5.2. (Diestel-Faires) (Stelling 2 p.20, [8])

Laat ν 'n begrensde X -waardige vektormaat op 'n algebra $\mathcal{F}$ wees. As ν nie sterk additief is nie, dan bestaan daar 'n topologiese isomorfisme $I : c_0 \rightarrow X$ en 'n ry van disjunkte versamelings $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ sodanig dat $I(e_n) = \nu(E_n)$ vir alle n .

As die maat ν op 'n σ -algebra Σ gedefinieer is, dan geld dieselfde bewering vir ℓ_∞ in plaas van c_0 .

Bewys. Neem aan $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ is nie sterk additief nie en laat $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van disjunkte versamelings wees. Stelling 1.3.6 (1. $\iff$ 3.) impliseer dat daar 'n $\alpha > 0$ bestaan sodanig dat $\limsup_n \|\nu(E_n)\| = \alpha$. Ons kan dus 'n $N \in \mathbb{N}$ kry sodanig dat $\|\nu(E_n)\| > \alpha/2$ vir alle $n \geq N$. Verwyder nou die versamelings uit (E_n) waarvoor $\|\nu(E_n)\| \leq \alpha/2$ en laat (F_n) die oorblywende ry wees $[\{E_N, E_{N+1}, E_{N+2}, \dots\} \subseteq (F_n)]$. As $\epsilon := \alpha/2$, dan is $\|\nu(F_n)\| > \epsilon$ vir alle n . Volgens die Hahn-Banach stelling bestaan daar vir elke n 'n $x_n^* \in X^*$ sodanig dat $x_n^*(\nu(F_n)) = \|\nu(F_n)\| > \epsilon$ en $\|x_n^*\| \leq 1$. Maar ν is per aanname 'n begrensde vektormaat, dus is

$$\sup_n |x_n^* \nu|(\Omega) \leq \sup_{x^* \in \overline{B}_{X^*}} |x^* \nu|(\Omega) = \|\nu\|(\Omega) < \infty.$$

Met ander woorde die ry skaalarmate $(x_n^* \nu)$ is gelykmatig begrens. Uit Rosenthal se lemma (lemma 1.5.1) kan ons nou 'n deelry (F_{n_k}) van (F_n) kry sodanig dat

$$|x_{n_k}^* \nu| \left(\bigcup_{i \in N, i \neq k} E_{n_i} \right) < \frac{\epsilon}{2}$$

vir alle k en enige eindige versameling van natuurlike getalle N . Stel nou $(x_k^*) = (x_{n_k}^*)$ en $(E_k) = (F_{n_k})$. Dan het ons

$$|x_k^* \nu| \left(\bigcup_{i \in N, i \neq k} E_i \right) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{en} \quad x_k^* \nu(E_k) > \epsilon$$

vir alle k en enige eindige versameling $N \subseteq \mathbb{N}$.

Ons definieer nou 'n isomorfisme $I : c_0 \rightarrow X$. Laat (x_n^*) en (E_n) deurgaans die rye wees wat ons hierbo gekry het. Beskou 'n element $(\alpha_n) \in c_0$ met eindig veel nie-nul elemente $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{n_k}$ en definieer

$$J(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(E_n) = \sum_{i=1}^k \alpha_{n_i} \nu(E_{n_i}).$$

Dan is J 'n lineêre afbeelding en $J e_n = 0 + 0 + \dots + 0 + 1 \cdot \nu(E_n) + 0 + \dots = \nu(E_n)$. Laat N_0 die digte deelversameling van alle sulke rye (α_n) wees. As $(\alpha_n) \in N_0$ en $x^* \in \overline{B}_{X^*}$, dan is

$$\begin{aligned} |x^* J(\alpha_n)| &= \left| x^* \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(E_n) \right| = \left| x^* \sum_{i=1}^k \alpha_{n_i} \nu(E_{n_i}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\alpha_{n_i}| |x^* \nu(E_{n_i})| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq k} |\alpha_{n_i}| \sum_{i=1}^k |x^* \nu(E_{n_i})| \leq \|(\alpha_n)\| \|\nu\|(\Omega) < \infty. \end{aligned}$$

Deur die supremum oor alle $(\alpha_n) \in N_0$ met $\|(\alpha_n)\| \leq 1$ en $x^* \in \overline{B}_{X^*}$ te neem, volg dat $\|J\| \leq \|\nu\|(\Omega)$. Die afbeelding $J : N_0 \rightarrow X$ is dus 'n begrensde lineêre afbeelding op 'n digte deelversameling van c_0 . Brei nou J deur kontinuïteit uit tot die hele ruimte c_0 . Dui hierdie uitgebreide afbeelding deur I aan. Dan is $I : c_0 \rightarrow X$ 'n lineêre afbeelding, $\|I\| \leq \|\nu\|(\Omega)$ en $I e_n = \nu(E_n)$ vir alle n . As $(\alpha_n) \in c_0$, dan is

$$I(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(E_n).$$

[[Aangesien N_0 dig in c_0 is, is die ry (α_n) die limiet van 'n ry rye $((\beta_n)_k) = ((\beta_n^{(k)})) \subseteq N_0$. Maar dan is $\alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_n^{(k)}$ vir elke n . Dus is $I(\alpha_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(\beta_n)_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(k)} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(E_n)$.]] Vir 'n vaste k geld dat

$$\begin{aligned} |x_k^* I(\alpha_n)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_k^* \nu(E_n) \right| \\ &\geq \left| |\alpha_k x_k^* \nu(E_k)| - \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1, n \neq k}^p \alpha_n x_k^* \nu(E_n) \right| \right| \\ &> |\alpha_k| \epsilon - \|(\alpha_n)\| \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1, n \neq k}^p |x_k^* \nu(E_n)| \\ &\geq |\alpha_k| \epsilon - \|(\alpha_n)\| \lim_{p \rightarrow \infty} |x_k^* \nu| \left(\bigcup_{n=1, n \neq k}^p E_n \right) \\ &> |\alpha_k| \epsilon - \|(\alpha_n)\| \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Deur nou die supremum oor al die elemente van (x_k^*) te neem volg dat

$$\begin{aligned}\|I(\alpha_n)\| &= \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* I(\alpha_n)| \geq \sup_k |x_k^* I(\alpha_n)| \\ &\geq \sup_k |\alpha_k| \epsilon - \|(\alpha_n)\| \frac{\epsilon}{2} = \|(\alpha_n)\| \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Hieruit volg dat I een-eenduidig is, [[want $I(\alpha_n) = 0 \Rightarrow (\alpha_n) = 0$]] en dat I^{-1} begrens is [[$\|I^{-1}(I(\alpha_n))\| = \|(\alpha_n)\| \leq 2/\epsilon \|I(\alpha_n)\|$ en dus $\|I^{-1}\| \leq 2/\epsilon$]].

Vir die geval waar ons 'n σ -algebra Σ het, herhaal ons die eerste deel van die bostaande bewys met die σ -algebra geval van Rosenthal se lemma om 'n $\epsilon > 0$, 'n ry $(x_n^*) \subseteq \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ en 'n ry $(E_n) \subseteq \Sigma$ te kry sodanig dat

$$|x_n^* \nu(E_n)| \geq \epsilon \quad \text{en} \quad |x_n^* \nu| \left(\bigcup_{k=1, k \neq n}^{\infty} E_k \right) < \frac{\epsilon}{2}$$

vir alle n . As $(\alpha_n) \in \ell_\infty$ 'n ry met slegs 'n eindige aantal nie-nul waardes is, skryf (α_n) as

$$(\alpha_n) = \sum_{i=1}^r \beta_i \mathcal{I}_{F_i}$$

waar $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ die nie-nul waardes van (α_n) is en $F_1, F_2, \dots, F_r$ eindige versamelings van natuurlike getalle is. Laat N_∞ die digte deelversameling van alle sulke rye uit ℓ_∞ wees. Vir 'n $(\alpha_n) \in N_\infty$ definieer

$$J(\alpha_n) = \sum_{i=1}^r \beta_i \nu \left(\bigcup_{k \in F_i} E_k \right).$$

Dan is $J : N_\infty \rightarrow X$ 'n begrensde lineêre afbeelding op N_∞ met $\|J\| \leq \|\nu\|(\Omega)$ en

$$J e_n = \sum_{i=1}^r 1 \cdot \nu \left(\bigcup_{k \in \{n\}} E_k \right) = \nu(E_n)$$

vir elke n . [[As $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ en $(\alpha_n) \in N_\infty$ dan is

$$\begin{aligned}|x^* J(\alpha_n)| &\leq \sum_{i=1}^r |\beta_i| |x^* \nu| \left(\bigcup_{k \in F_i} E_k \right) \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq r} |\beta_i| |x^* \nu| \left(\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k \in F_i} E_k \right) \leq \|(\alpha_n)\| |x^* \nu|(\Omega) \leq \|(\alpha_n)\| \|\nu\|(\Omega).\end{aligned}$$

Dus as die supremum oor alle $x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}$ en (α_n) met $\|(\alpha_n)\| \leq 1$ geneem word, sien ons $\|J\| \leq \|\nu\|(\Omega)$. Brei J deur kontinuïteit tot die hele ruimte ℓ_∞ . Dui die uitgebreide afbeelding deur I aan. Dan is I 'n begrensde lineêre afbeelding met $\|I\| \leq \|\nu\|(\Omega)$ en $I e_n = \nu(E_n)$ vir elke n .

Weer eens sien ons dat $I : \ell_\infty \rightarrow X$ 'n topologiese isomorfisme is. Beskou 'n $(\alpha_n) \in \ell_\infty$. Dan kan ons (α_n) as die som $\sum_{n=1}^\infty \alpha e_n$ skryf. Per definisie is

$$I(\alpha_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} J\left(\sum_{n=1}^k \alpha e_n\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \alpha J e_n = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \nu(E_n).$$

Op dieselfde manier as die eerste deel van die bewys volg nou dat I een-eenduidig is en dat I^{-1} begrens is. $\square$

Gevolg 1.5.3. (*Stelling 2 p.20, [8]*)

As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ ($\nu : \Sigma \rightarrow X$) 'n begrensde vektormaat is wat nie sterk additief is nie en $I : c_0 \rightarrow X$ ($I : \ell_\infty \rightarrow X$) die topologiese isomorfisme is wat in stelling 1.5.2 voorkom, dan bevat die beeld van ν al die afbeeldings van $\{0, 1\}$ -waardige rye onder I .

Bewys. Laat $\ell\{0, 1\}$ die versameling van alle $\{0, 1\}$ -waardige rye wees. As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n begrensde vektormaat en I die topologiese isomorfisme $I : X \rightarrow c_0$ is en $(\alpha_n) \in \ell\{0, 1\}$, dan het (α_n) net eindig veel inskrywing van 1 en nulle verder. Aangesien ν eindig additief is, volg per definisie van I dat $I(\alpha_n) \in \nu(\Sigma)$.

Vir die σ -algebra geval, as $I : X \rightarrow \ell_\infty$ die topologiese isomorfisme is en $(\alpha_n) \in \ell\{0, 1\}$, stel $E = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 1\}$. Per definisie van I is $I(\alpha_n) = \nu(E) \in \nu(\Sigma)$. $\square$

Vanuit die stelling van Diestel en Faires kry ons nou dat die vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow c_0$ gedefinieer op die deelversamelings van $\mathbb{N}$ wat óf self eindig is óf eindige komplement het, deur

$$\nu(E) = \begin{cases} \mathcal{I}_E & \text{as } E \text{ eindig is} \\ -\mathcal{I}_{\Omega \setminus E} & \text{as die komplement van } E \text{ eindig is,} \end{cases}$$

'n representatiewe voorbeeld van 'n vektormaat op 'n algebra is wat nie sterk additief is nie. Soortgelyk is $\nu : 2^\mathbb{N} \rightarrow \ell_\infty$ gedefinieer deur $\nu(E) = \mathcal{I}_E$ 'n representatiewe voorbeeld van 'n vektormaat op 'n σ -algebra is wat nie sterk additief is nie.

Vir die Banach ruimte X , skryf ons $x = \lim_{n \rightarrow \infty}^{(wk)} x_n$ as 'n ry $(x_n) \subseteq X$ in die swak topologie na $x \in X$ konvergeer. Die volgende resultaat is die vektormaat weergawe van die Orlicz-Pettis stelling.

Gevolg 1.5.4. (*Gevolg 3 p.21, [8]*)

As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ 'n begrensde vektormaat op 'n algebra is, dan is ν sterk additief as en slegs as die ry $(\nu(E_n))$ swak konvergeer in X vir elke monotoon dalende ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$.

Bewys. As ν sterk additief is en $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n dalende ry versamelings is, dan konvergeer die ry $(\nu(E_n))$ in norm en dus ook swak (sien gevolg 1.3.8).

Omgekeerd, neem aan die ry $(\nu(E_n))$ konvergeer swak in X vir elke dalende ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$, maar dat ν nie sterk additief is nie. Volgens stelling 1.5.2 kan ons 'n topologiese isomorfisme $I : c_0 \rightarrow X$ en 'n ry disjunkte versamelings $(F_k) \subseteq \mathcal{F}$ kry sodanig dat $I(e_k) = \nu(F_k)$ vir elke k . Stel $E_n = \bigcup_{k=1}^n F_k$. Dan is $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n nie-dalende ry en

$$I\left(\sum_{k=1}^n e_k\right) = \sum_{k=1}^n I(e_k) = \sum_{k=1}^n \nu(F_k) = \nu(E_n)$$

vir elke n . Aangesien die kontinue lineêre operator I^{-1} ook swak kontinu is, is

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{wk}} \sum_{k=1}^n e_k = \lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{wk}} I^{-1} \nu(E_n) = I^{-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty}^{\text{wk}} \nu(E_n) \right).$$

Dit wys dat die limiet aan die linkerkant bestaan, maar $\sum_{k=1}^n e_k$ kan nie swak konvergeer in c_0 nie. [[Neem aan $\alpha_n := \sum_{k=1}^n e_k$ konvergeer in c_0 na $\alpha \in c_0$. Vir elke j is $e_j \in \ell_1$ en dus $\langle e_j, \alpha_n \rangle \rightarrow \langle e_j, \alpha \rangle$ as $n \rightarrow \infty$. Maar dan is die j^{de} inskrywing van α_n gelyk aan 1. Dit geld vir elke j ; en dus is $\alpha = \{1, 1, 1, \dots\} \notin c_0$, 'n teëspraak]]. Die teëspraak wys dat $(\nu(E_n))$ nie swak in X konvergeer nie. Op sy beurt is dit 'n teëspraak met ons aanname. Dus volg dat ν sterk additief moet wees $\square$

Ons kry nou direk die stelling van Orlicz-Pettis.

Stelling 1.5.5. (Orlicz-Pettis) (Gevolg 4 p.22, [8])

As $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 'n reeks in X is sodanig dat elke deelreeks $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ swak konvergent is, dan is die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ onvoorwaardelik konvergent in norm.

Bewys. Neem aan dat elke deelreeks $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ van $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ swak konvergent is. Dan volg dat $|x^* x_n| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Die ry $(x^* x_n)$ is dus begrens, dit wil sê $(x^* x_n) \in \ell_{\infty}$. Trouens $(x^* x_n) \in \ell_1$: beskou die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n|$. Hierdie reeks konvergeer as en slegs as $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(x^* x_n)$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(x^* x_n)$ konvergeer. Maar elke deelreeks van die twee reële reekse konvergeer. Dus is albei hierdie reekse absoluut konvergent [[anders sou óf die deelreeks met positiewe terme óf die deelreeks met negatiewe terme gedivergeer het]]. Albei die reekse $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(x^* x_n)$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(x^* x_n)$ is dus konvergent en gevolglik is $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$.

Definieer nou 'n geslote operator $T : X^* \rightarrow \ell_1$ deur

$$Tx^* = (x^* x_n).$$

[[As 'n ry $z_n = (z_k^{(n)})$ in ℓ^1 konvergeer na $z = (z_k)$ dan geld vir elke k dat $|z_k - z_k^{(n)}| \leq \|z - z_n\| \rightarrow 0$. Dus konvergeer elke koördinaat van z_n na die ooreenkomstige koördinaat van z . Dus, as (x_k^*) 'n ry uit X^* is wat na $x^* \in X^*$ konvergeer en as $(Tx_k^*) = ((x_k^* x_n))$ in ℓ_1 na (y_n) konvergeer as $k \rightarrow \infty$, dan konvergeer $x_k^* x_n$ na y_n as $k \rightarrow \infty$. Aangesien (x_k^*) na x^* konvergeer volg dat $x_k^* x_n \rightarrow x^* x_n$. Dus, $y_n = x^* x_n$ vir alle n en dit sê dat $Tx^* = (y_n)$. Dit wys dat T 'n geslote operator is.]] Volgens die geslote grafiek stelling is T begrens. Dus is

$$\sup_{x^* \in \overline{B}_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| = \|(x^* x_n)\|_{\ell_1} = \|T\| < \infty.$$

Laat $\mathcal{F}$ nou die algebra van deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees wat bestaan uit eindige deelversamelings en hul komplemente. Definieer $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ dan deur

$$\nu(E) = \begin{cases} \sum_{n \in E} x_n & \text{as } E \text{ eindig is} \\ -\sum_{n \notin E} x_n & \text{as } \mathbb{N} \setminus E \text{ eindig is.} \end{cases}$$

Dan is ν 'n vektormaats. [[As $E, F \in \mathcal{F}$ disjunkte versamelings is, dan is daar twee moontlikhede:

1. Beide E en F is eindige versamelings. Dan is $E \cup F$ 'n eindige versameling en

$$\nu(E \cup F) = \sum_{n \in E \cup F} x_n = \sum_{n \in E} x_n + \sum_{n \in F} x_n = \nu(E) + \nu(F),$$

want E en F is disjunkt.

2. Een van die versamelings (sê E) is eindig en een van die versamelings (sê F) het 'n eindige komplement. Dan is $\mathbb{N} \setminus E \cup F \subseteq \mathbb{N} \setminus F$ eindig en

$$\begin{aligned} \nu(E \cup F) &= - \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus E \cup F} x_n = - \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus F} x_n - \sum_{n \in E} x_n \right) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus F} x_n + \sum_{n \in E} x_n = \nu(F) + \nu(E). \end{aligned}$$

In altwee gevalle volg dat ν additief is. Let op dat as E en F beide die komplemente van eindige versamelings is dat E en F nie disjunkt kan wees nie.]] Ons het gesien dat $\sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$. Hieruit kry ons nou

$$\begin{aligned} \|\nu\|(\mathbb{N}) &= \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* \nu|(\mathbb{N}) = \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} \sup_{(E_i) \in D^{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^r |x^* \nu(E_i)| \\ &\leq \sup_{x^* \in \overline{\mathcal{B}}_{X^*}} \sup_{(E_i) \in D^{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^r \sum_{n \in E_i} |x^* x_n| \leq \|T\| < \infty \end{aligned}$$

Ons sien dus dat ν 'n begrensde vektormaas is. Verder, as $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n nie-dalende ry versameling is, dan is (E_n) op die duur konstant of (E_n) bestaan uit eindige versamelings. [[As (E_n) nie op die duur konstant is nie, dan is daar twee moontlikhede

1. Al die versamelings E_n is eindig.
2. Minstens een van die versamelings sê E_{n_0} is die komplement van 'n eindige versameling. Maar aangesien (E_n) nie op die duur konstant is nie kan ons 'n E_{n_1} kry sodanig dat $E_{n_0} \subset E_{n_1}$. Weer vir E_{n_1} kan ons 'n E_{n_2} kry sodanig dat $E_{n_1} \subset E_{n_2}$. Daar bestaan dus 'n ry E_{n_k} sodanig dat $E_{n_k} \subset E_{n_{k+1}}$ vir alle $k \geq 0$. Stel nou $F_n = \mathbb{N} \setminus E_n$ vir elke n . Dan is F_n eindig vir alle $n \geq n_0$ en $F_{n_{k+1}} \subset F_{n_k}$ vir alle $k \geq 0$. Dus is daar 'n punt N waar $F_n = \emptyset$ vir alle $n \geq n_N$, maar dan is $E_n = \Omega$ vir alle $n \geq n_N$, 'n teësprak.

Nou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in E_n} x_k = \sum_{k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} x_k$$

en per aanname is die deelreeks aan die regterkant swak konvergent. Dus konvergeer $(\nu(E_n))$ swak in X . Volgens gevolg 1.5.4 is $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ dus sterk additief.

Maar dan konvergeer die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ onvoorwaardelik in norm vir enige ry (E_n) van disjunkte versamelings. In die besonder is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in \{n\}} x_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

onvoorwaardelik konvergent in norm. $\square$

As 'n gevolg kry ons dat vir vektormate wat op 'n σ -algebra gedefinieer is, σ -additiwiteit in die swak- en norm topologieë ekwivalent is.

Gevolg 1.5.6. (*Gevolg 4 p.22, [8]*)

Enige vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow X$ wat swak σ -additief is, is ook σ -additief.

Bewys. As $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings is, dan volg vanuit die swak σ -additiwiteit van ν dat die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ swak na $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ konvergeer. Om dieselfde rede konvergeer elke deelreeks $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_{n_k})$ swak in X (na $\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k})$). Dus, volgens die Orlicz-Pettis stelling is die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ norm konvergent na $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. $\square$

Ons is nou in staat om die volgende karakterisering van 'n Banach ruimte wat nie c_0 as deelruimte bevat nie, te gee.

Gevolg 1.5.7. (*Bessaga-Pelczyński*) (*Gevolg 5 p.22, [8]*)

'n Banach ruimte X bevat geen kopie van c_0 nie as en slegs as elke reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$ vir alle $x^* \in X^*$ onvoorwaardelik in norm konvergeer.

Bewys. As X geen kopie van c_0 bevat nie en $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 'n reeks in X is waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$ vir alle $x^* \in X^*$, laat $\mathcal{F}$ die algebra van deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees wat bestaan uit eindige versamelings van $\mathbb{N}$ en hul komplemente. Definieer die begrensde vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow X$ presies soos in die bewys van stelling 1.5.5. Aangesien X geen kopie van c_0 bevat nie, bestaan daar geen topologiese isomorfisme $I : c_0 \rightarrow X$ nie. Maar dan volg vanuit stelling 1.5.2 dat ν wel sterk additief is. Net soos in die bewys stelling 1.5.5 volg nou dat $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ onvoorwaardelik in norm konvergeer.

Andersom neem aan elke reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in X waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n| < \infty$ vir alle $x^* \in X^*$ konvergeer onvoorwaardelik in norm, maar neem aan dat X wel 'n kopie van c_0 bevat. Laat $I : c_0 \rightarrow X$ die topologiese isomorfisme wees wat c_0 in X afbeeld. Definieer vir elke n 'n element $\alpha_n \in c_0$ deur $\alpha_n = \sum_{k=1}^n e_k$ waar (e_k) die standaard basis in c_0 is [[met ander woorde $\alpha_n = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ waar die laaste 1 by die n^{de} indeks voorkom]] en laat $x_k = I e_k$. Dan is $\sum_{k=1}^n x_k = I \alpha_n$. Laat $I^* : X^* \rightarrow c_0^*$ die toegevoegde operator van I wees. Beskou 'n willekeurige $x^* \in X^*$, dan is $I^* x^* = (\beta_i) \in \ell_1$ want $c_0^* = \ell_1$. Dus is

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^* x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x^* I e_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |I^* x^* e_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, (\beta_i) \rangle| = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty,$$

want $(\beta_i) \in \ell_1$. Maar die ry (α_n) konvergeer nie in c_0 nie, want dit is nie 'n Cauchyry in c_0 nie [[as $m \neq n$, dan is $\|\alpha_n - \alpha_m\| = 1$]]. Dus konvergeer die reeks $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nie in X nie. Vanuit die teëspraak volg dus dat X geen kopie van c_0 bevat nie. $\square$

Die volgende resultaat wys hoe ons vektormaatteorie kan gebruik om stellings in die teorie van Banach ruimtes te bewys. Die bewering noem egter geen vektormate nie.

Gevolg 1.5.8. (Bessaga-Petczyński) (Gevolg 6 p.22, [8])

As die dual X^* van 'n Banach ruimte X nie 'n kopie van ℓ_∞ bevat nie, dan bevat X^* ook nie kopie van c_0 nie.

Bewys. Laat $\sum_{n=1}^\infty x_n^*$ 'n reeks in X^* wees waarvoor $\sum_{n=1}^\infty |x^{**}(x_n^*)| < \infty$ vir alle $x^{**} \in X^{**}$. In die besonder as $x \in X$ en $x^{**} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ die funksionaal gedefinieer deur $x^{**}(x^*) = x^*(x)$ vir elke $x^* \in X^*$ is, dan is

$$\sum_{n \in E} x_n^*(x) = \sum_{n \in E} x^{**}(x_n^*)$$

vir enige deelversameling $E \subseteq \mathbb{N}$. Per aanname konvergeer die reeks $\sum_{n \in E} x^{**}(x_n^*)$ absoluut in $\mathbb{K}$ en dus is die reeks $\sum_{n \in E} x_n^*$ swak* konvergent. As $2^\mathbb{N}$ nou die algebra van alle deelversamelings van $\mathbb{N}$ is, dan kan ons 'n afbeelding $\nu : 2^\mathbb{N} \rightarrow X^*$ deur

$$\nu(E) = \sum_{n \in E} x_n^*$$

definieer. Dan is ν 'n begrensde vektormaat gedefinieer op 'n σ -algebra. [[As E en F twee disjunkte deelversamelings van $\mathbb{N}$ is, dan is

$$\nu(E \cup F) = \sum_{n \in E \cup F} x_n^* = \sum_{n \in E} x_n^* + \sum_{n \in F} x_n^* = \nu(E) + \nu(F),$$

want E en F is disjunkt. Die vektormaat ν is begrens, want

$$\|\nu\|(\mathbb{N}) = \sup_{(E_i) \in D^{2^\mathbb{N}}} \sup_{i=1}^r \sum_{i=1}^r |x^{**}\nu(E_i)| \leq \sup_{(E_i) \in D^{2^\mathbb{N}}} \sup_{i=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{n \in E_i} |x^{**}x_n| < \infty,$$

waar ons die supremum oor $x^{**} \in \overline{B}_{X^{**}}$ neem.]] Aangesien X^* geen kopie van ℓ_∞ bevat nie, is die begrensde vektormaat ν sterk additief volgens die tweede deel van stelling 1.5.2. In die besonder geld dus dat

$$\sum_{n=1}^\infty \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^\infty x_n^*,$$

onvoorwaardelik in die norm op X^* konvergeer. Maar dan volg vanuit gevolg 1.5.7 dat X^* geen kopie van c_0 bevat nie. $\square$

Definisie 1.5.9. (Ψ -konvergent)

As $\Psi \subseteq X^*$ 'n totale deelversameling is, dan sê ons 'n reeks $\sum_{n=1}^\infty x_n$ in X is Ψ -konvergent as daar vir elke deelversameling $E \subseteq \mathbb{N}$ 'n x_E bestaan sodanig dat

$$\sum_{n \in E} x^*(x_n) = x^*(x_E)$$

vir elke $x^* \in \Psi$.

Die volgende resultaat is 'n uitbreiding van die Orlicz-Pettis stelling (die Orlicz-Pettis stelling volg as 'n spesiale geval met $\Psi = X^*$).

Gevolg 1.5.10. (*Gevolg 7 p.23, [8]*)

Laat X geen kopie van ℓ_∞ bevat nie en laat Ψ 'n totale deelversameling van X^* wees. As $\sum_{n=1}^\infty x_n$ 'n reeks in X is sodanig dat elke deelreeks Ψ -konvergent is, dan is $\sum_{n=1}^\infty x_n$ onvoorwaardelik konvergent in norm.

Bewys. Vir 'n deelversameling $E \subseteq \mathbb{N}$, laat $x_E \in X$ die element wees sodanig dat $\sum_{n \in E} x^*(x_n) = x^*(x_E)$ vir elke $x^* \in \Psi$. Definieer $\nu : 2^\mathbb{N} \rightarrow X$ deur $\nu(E) = x_E$. Dan is $x^*\nu$ 'n begrensde vektormaat vir elke $x^* \in \Psi$. [[As E en F twee disjunkte deelversamelings van $\mathbb{N}$ is en $x^* \in \Psi$, dan is

$$x^*(x_{E \cup F}) = \sum_{n \in E \cup F} x^*x_n = \sum_{n \in E} x^*x_n + \sum_{n \in F} x^*x_n = x^*(x_E + x_F),$$

want E en F is disjunkt. Dus is $x^*\nu(E \cup F) = x^*(x_{E \cup F}) = x^*(x_E) + x^*(x_F) = x^*(\nu(E)) + x^*(\nu(F))$. Verder, vir elke $E \subseteq \mathbb{N}$ is $|x^*\nu(E)| = |x^*(x_E)| < \infty$.]] Net soos in 1.5.5, volg dat $|x^*\nu|(\Omega) < \infty$. Dus volg vanuit gevolg 1.4.4 dat ν 'n begrensde vektormaat is. Aangesien X geen kopie van ℓ_∞ bevat nie, volg vanuit gevolg 1.5.2 dat ν sterk additief is. Nou is $\nu(\{n\}) = x_{\{n\}} = x_n$, want $\sum_{k \in \{n\}} x^*(x_k) = x^*(x_n)$ vir elke n . Dus is die reeks

$$\sum_{n=1}^\infty \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^\infty x_n$$

onvoorwaardelik konvergent in norm. $\square$

Net soos ons vanuit die Orlicz-Pettis stelling iets oor die struktuur van vektormate kon aflei, kan ons nou iets sê oor die struktuur van vektormate wat hul waardes in 'n Banach ruimte aanneem waarvan die dual geen kopie van ℓ_∞ bevat nie.

Gevolg 1.5.11. (*Gevolg 7 p.23, [8]*)

As X^* geen kopie van ℓ_∞ bevat nie, dan is enige vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow X$ wat swak* σ -additief is ook σ -additief.

Bewys. As $\nu : \Sigma \rightarrow X$ swak* σ -additief is en $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings is, dan konvergeer $\sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$ swak* onvoorwaardelik na $\nu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n)$. Dus is elke deelreeks van $\sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$ X^* -konvergent, so vanuit gevolg 1.5.10 kry ons dat $\sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$ norm onvoorwaardelik konvergent is na dieselfde limiet. Dit beteken ν is σ -additief. $\square$

Die volgende belangrike resultaat volg vanuit Nikodým se stelling en Rosenthal se lemma.

Stelling 1.5.12. (Vitali-Hahn-Saks-Nikodým) (*Stelling 8 p.23, [8]*)

Laat Σ 'n σ -algebra wees en laat (ν_n) 'n ry van sterk additiewe X -waardige vektormate op Σ wees. As $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ in norm bestaan vir elke $E \in \Sigma$, dan is die ry (ν_n) gelykmatig sterk additief.

Bewys. Elke ν_n is sterk additief en dus ook begrens (proposisie 1.3.9). Vanuit die feit dat die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ vir elke $E \in \Sigma$ bestaan, is $\sup_n \|\nu_n(E)\| < \infty$ vir elke $E \in \Sigma$. Volgens die Nikodým begrensdeheid stelling (stelling 1.4.1) volg dus dat $\sup_n \|\nu_n\|(\Omega) < \infty$.

Per aanname bestaan $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$. Neem nou aan die limiet is gelyk aan nul, maar dat (ν_n) nie gelykmatig sterk additief is nie. Dan bestaan daar volgens stelling 1.3.6 'n ry funksionale $(x_n^*) \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}$ sodanig dat die ry skalaarmate $(x_n^* \nu_n)$ nie gelykmatig sterk additief is nie. Nou is $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^* \nu_n(E) = 0$ vir elke $E \in \Sigma$, [[aangesien $\|x_n^*\| \leq 1$, volg dat $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^* \nu_n(E)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n(E)\| = 0$]]. Dus, vir elke $E \in \Sigma$ is die ry $(x_n^* \nu_n(E))$ in die Banach ruimte c_0 . Definieer nou die begrensde vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow c_0$ deur

$$\nu(E) = (x_n^* \nu_n(E)).$$

[[Aangesien elke ν_n 'n vektormaat is en x^* lineêr is, volg dat ν ook 'n vektormaat is. Vanuit die feit dat $\sup_n \|\nu_n\|(\Omega) < \infty$, volg dat ν begrens is:

$$\begin{aligned} \|\nu\|(\Omega) &\leq 4 \sup_{E \in \Sigma} \|\nu(E)\| = 4 \sup_{E \in \Sigma} \|(x_n^* \nu_n(E))\|_{c_0} \\ &= 4 \sup_n \sup_{E \in \Sigma} |x_n^* \nu_n(E)| \\ &\leq 4 \sup_n \sup_{E \in \Sigma} \sup_{x^* \in \bar{\mathcal{B}}_{X^*}} |x^* \nu_n(E)| \\ &= 4 \sup_n \|\nu_n\|(\Omega) \leq 4 \sup_n \|\nu_n\|(\Omega) < \infty. \end{aligned}$$

Aangesien ℓ_∞ nie in c_0 bevat is nie, volg vanuit die σ -algebra geval van stelling 1.5.2 dat ν sterk additief is. Dus konvergeer $\sum_{k=1}^\infty \nu(E_k) = \sum_{k=1}^\infty (x_n^* \nu_n(E_k))$ onvoorwaardelik in die norm van c_0 . Maar die norm in c_0 is die supremum norm, en dus beteken dit dat die reeks $\sum_{k=1}^\infty x_n^* \nu_n(E_k)$ gelykmatig in n konvergeer. Dit impliseer dat die ry mate $(x_n^* \nu_n)$ gelykmatig sterk additief is, 'n teësprak. Dus, as $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = 0$, dan is (ν_n) gelykmatig sterk additief.

Neem nou aan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ bestaan (maar nie noodwendig dat dit gelyk aan nul is nie), maar dat (ν_n) nie gelykmatig sterk additief is nie. Deur van stelling 1.3.6 gebruik te maak, kan ons 'n ry van disjunkte versamelings $(E_k) \subseteq \Sigma$ kry sodanig dat $\lim_k \sup_n \|\nu_n(E_k)\| > 0$. Kry 'n deelry $(\nu_k) := (\nu_{n_k})$ en 'n $\delta > 0$ sodanig dat

$$\|\nu_k(E_k)\| > \delta \quad \text{en} \quad \|\nu_k(E_{k+1})\| < \frac{\delta}{2}$$

vir elke k . [[Kies 'n deelry van (E_k) (en noem dit weer (E_k)) en $\delta > 0$ sodanig dat $\sup_n \|\nu_n(E_k)\| > \delta$ vir alle k . Kies n_1 sodanig dat $\|\nu_{n_1}(E_1)\| > \delta$ en hernommer E_1 as E_{n_1} . Kies vervolgens k_0 so groot dat $\nu_i(E_k) < \delta/2$ vir $i = 1, 2, \dots, n_1$ en vir alle $k \geq k_0$. Kies dan n_2 so groot dat $\nu_{n_2}(E_{k_0}) > \delta$ en hernommer E_{k_0} as E_{n_2} . Let op dat $n_2 > n_1$. Kies nou weer k_1 so dat vir alle $k \geq k_1$ en vir $1 \leq i \leq n_2$, $\nu_i(E_k) < \delta/2$ en kies $n_3 > n_2$ so dat $\nu_{n_3}(E_{k_1}) > \delta$ en hernommer E_{k_1} as E_{n_3} . Gaan induktief voort op hierdie manier. Hernommer ten slotte deur $n_i = i$ te stel. Dan kry ons die verlangde deelry.]] Stel nou $\nu'_k(E) = \nu_{k+1}(E) - \nu_k(E)$, $E \in \Sigma$ vir elke k . Aangesien die limiet $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ vir elke $E \in \Sigma$ bestaan, volg dat $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu'_k(E) = 0$ vir elke $E \in \Sigma$. Vanuit die eerste deel van die bewys kan ons aflei dat (ν'_n) gelykmatig sterk additief is. Maar aan die ander kant kry ons

$$\|\nu'_k(E_{k+1})\| \geq \|\nu_{k+1}(E_{k+1})\| - \|\nu_k(E_{k+1})\| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

vir elke k . Maar dan is $\lim_n \sup_k \|\nu'_n(E_k)\| > \delta/2 > 0$ en proposisie 1.3.6 gee dan dat (ν'_n) nie gelykmatig sterk additief is nie, 'n teësprak. Die ry vektormate (ν_n) moet dus gelykmatig sterk additief wees. $\square$

Enige σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra is sterk additief en 'n familie van σ -additiewe vektormate op 'n σ -algebra wat gelykmatig sterk-additief is, is gelykmatig σ -additief. Dus volg die volgende resultaat direk uit die Vitali-Hahn-Saks-Nikodým stelling.

Gevolg 1.5.13.

As (ν_n) 'n ry van σ -additiewe vektormate op die σ -algebra Σ is en die ry $(\nu_n(E))$ vir elke $E \in \Sigma$ konvergeer, dan is (ν_n) gelykmatig σ -additief.

Trouens, as die konvergensie gelykmatig plaasvind, dan is die limietfunksie ook 'n σ -additiewe vektormaat.

Gevolg 1.5.14.

As (ν_n) 'n ry van σ -additiewe vektormate op die σ -algebra Σ is en ν_n gelykmatig na ν konvergeer, dan is (ν_n) gelykmatig σ -additief en ν is 'n σ -additiewe vektormaat.

Bewys. Aangesien elke ν_n 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ algebra is, is elke ν_n 'n sterk additiewe vektormaat. Volgens stelling 1.5.12 is (ν_n) dus gelykmatig sterk additief, dit wil sê, (ν_n) is gelykmatig σ -additief.

Ons wys nou dat ν ook σ -additief is. Laat $\epsilon > 0$ vas wees en laat $(E_i) \subseteq \Sigma$ 'n willekeurige ry van disjunkte versamelings wees. Daar bestaan 'n N sodanig dat $\|\nu_n(E) - \nu(E)\| < \frac{\epsilon}{3}$ vir alle $n \geq N$ en alle $E \in \Sigma$ ($\nu_n \rightarrow \nu$ gelykmatig). En daar bestaan 'n K sodanig dat

$$\left\| \nu_n \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) - \sum_{i=1}^{k-1} \nu_n(E_i) \right\| = \left\| \nu_n \left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right) \right\| < \frac{\epsilon}{3}$$

vir alle $k \geq K$ ((ν_n) is gelykmatig σ -additief). Aangesien (ν_n) gelykmatig na ν konvergeer, is ν 'n vektormaat. Dus, as $F := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ en $G_k := \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$, dan is

$$\begin{aligned} \left\| \nu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) - \sum_{i=1}^{k-1} \nu(E_i) \right\| &= \left\| \nu(F) - \nu_n(F) + \nu_n \left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right) + \nu_n(G_k) - \nu(G_k) \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

vir $n \geq N$ en $k \geq K$. Aangesien ons vir enige ry disjunkte versamelings en enige ϵ so 'n K kan kry, sien ons dat ν σ -additief is. $\square$

Weer eens sien ons dat 1.5.12 nie noodwendig vir 'n algebra sal geld nie.

Voorbeeld 1.5.15. (Voorbeeld 9 p.24, [8])

Laat $\mathcal{F}$ die algebra van deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees wat bestaan uit eindige versamelings en hul komplemente. Beskou die vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow c_0$ gedefinieer deur

$$\nu(E) = \begin{cases} \mathcal{I}_E & \text{as } E \text{ eindig is} \\ -\mathcal{I}_{\mathbb{N} \setminus E} & \text{as } \mathbb{N} \setminus E \text{ eindig is} \end{cases}$$

vir $E \in \mathcal{F}$. Met ander woorde, as E eindig is en $n \in E$ dan het die ry $\nu(E)$ 'n 1 by die n^{de} inskrywing en as $\mathbb{N} \setminus E$ eindig is en $n \in \mathbb{N} \setminus E$, dan het $\nu(E)$ 'n -1

by die n^{de} inskrywing. Definieer nou vir elke n 'n vektormaat $\nu_n : \mathcal{F} \rightarrow c_0$ deur $\nu_n(E) = \nu(E)\mathcal{I}_{\{1,2,\dots,n\}}$. As (E_k) 'n ry van disjunkte versamelings uit $\mathcal{F}$ is, dan is

$$\nu_n(E_k) = \begin{cases} \mathcal{I}_{E_k \cap \{1,2,\dots,n\}} & \text{as } E_k \text{ eindig is} \\ -\mathcal{I}_{(\mathbb{N} \setminus E_k) \cap \{1,2,\dots,n\}} & \text{as } \mathbb{N} \setminus E_k \text{ eindig is.} \end{cases}$$

Aangesien die versamelings (E_k) disjunkt is, kan daar net eindig veel k wees waarvoor $E_k \cap \{1, 2, \dots, n\} \neq \emptyset$ of $(\mathbb{N} \setminus E_k) \cap \{1, 2, \dots, n\} \neq \emptyset$. Dus is $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_n(E_k) = 0$ vir elke n . Gevolg 1.3.8 verseker dus dat elke ν_n 'n sterk additiewe vektormaat is. Verder is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E)\mathcal{I}_{\{1,2,\dots,n\}} = \nu\mathcal{I}_{\mathbb{N}} = \nu(E)$$

vir elke $E \in \mathcal{F}$. Die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ bestaan dus in norm vir elke $E \in \mathcal{F}$.

Maar as $E_n := \{n\}$, dan is $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ 'n ry van disjunkte versamelings, maar $\nu(E_n) = e_n$ vir elke n en so $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n) \neq 0$. Dus is ν volgens gevolg 1.3.8 nie sterk additief nie. Stelling 1.5.12 geld dus nie vir hierdie vektormaat nie. $\square$

Definisie 1.5.16. (Ekwi- μ -kontinu)

Laat (ν_n) 'n ry vektormate op 'n algebra $\mathcal{F}$ wees en laat μ 'n eindige skaarmaat op $\mathcal{F}$ wees. Ons noem die ry (ν_n) ekwi- μ -kontinu as

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu_n(E) = 0$$

gelykmatig in n .

Gevolg 1.5.17. (Vitali-Hahn-Saks) (gevolg 10 p.24, [8])

Laat μ 'n eindige σ -additiewe skaarmaat op die σ -algebra Σ wees. Laat (ν_n) 'n ry van X -waardige σ -additiewe vektormate op Σ wees. As die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = \nu(E)$ in norm bestaan vir elke $E \in \Sigma$ en as $\nu_n \ll \mu$ vir elke n , dan is die ry (ν_n) ekwi- μ -kontinu. In hierdie geval volg ook dat $\nu \ll \mu$.

Bewys. Elke ν_n is 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra so elke ν_n is 'n sterk additiewe vektormaat. Per aanname bestaan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = \nu(E)$ vir elke $E \in \mathcal{F}$. Dus is die ry (ν_n) begrens en vanuit stelling 1.5.12 volg dat die ry (ν_n) gelykmatig σ -additief en dat ν σ -additief is. Gevolg 1.3.16 gee nou dat

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sup_n \|\nu_n(E)\| = 0,$$

dit is, $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu(E) = 0$ gelykmatig in n . Dus volg ook dat $\nu \ll \mu$. $\square$

Hoofstuk 2

Operatormate

Laat Ω 'n willekeurige versameling wees en laat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Laat X en Y Banach ruimtes wees. Ons dui die Banach ruimte van alle begrensde lineêre operatore $T : X \rightarrow Y$ deur $L(X, Y)$ aan.

In hierdie afdeling kyk ons na mate ξ wat hul waardes in die ruimte van operatore $L(X, Y)$ aanneem. Geassosieer met ξ is die nie-negatiewe versamelingsfunksies $|\xi|$, $\|\xi\|$ en $\widehat{\xi}$. Ons sal sien dat die konsep van 'n operatormaat die konsepte van 'n vektormaat en 'n skalaarmaat insluit.

As $T \in L(X, Y)$, dan is $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ die operatornorm waar $\|Tx\|$ die norm van die element $Tx \in Y$ is. 'n Ry operatore $(T_n) \subseteq L(X, Y)$ konvergeer na 'n element $T \in L(X, Y)$ as $n \rightarrow \infty$ in die gelykmatige operator topologie (GOT) as $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, in die sterk operator topologie (SOT) as $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$ vir alle $x \in X$ en in die swak operator topologie (WOT) as $|y^* T_n x \rightarrow y^* Tx|$ vir alle $y^* \in Y^*$ en $x \in X$.

2.1 Definisie en basiese eienskappe

Ons definieer nou 'n operatormaat op die meetbare ruimte (Ω, Σ) .

Definisie 2.1.1. (Operatormaat)(p.512, [9], Definisie 5 p.4, [30])

'n Versamelingsfunksie $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ word 'n operatormaat genoem as $\xi(E \cup F) = \xi(E) + \xi(F)$ vir alle disjunkte versamelings $E, F \in \Sigma$. Die operatormaat ξ word σ -additief genoem as dit vir enige ry van disjunkte versamelings $(E_n) \in \Sigma$ geld dat

$$\xi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(E_n),$$

waar die konvergensie van die reeks in die SOT plaasvind.

Twee operatore $S, T \in L(X, Y)$ is gelyk as en slegs as $Sx = Tx$ vir alle $x \in X$. Dus is $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat as die versamelingsfunksie $\nu_x : \Sigma \rightarrow Y$, gedefinieer deur $\nu_x(E) := \xi(E)x$, 'n vektormaat is vir elke $x \in X$. Maar $L(X, Y)$ is ook 'n Banach ruimte, dus is 'n operatormaat self ook 'n vektormaat $\xi : \Sigma \rightarrow Z$ waar $Z = L(X, Y)$. Die verskil is egter dat die norm van Z die operatornorm is.

By operatormate werk ons nie met die swak en swak* topologieë van Z nie, maar met die SOT en WOT. Die vektormaat $\xi : \Sigma \rightarrow Z$ is σ -additief as

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \xi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) - \sum_{n=1}^k \xi(E_n) \right\|_Z = 0.$$

Die konvergensie van die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \xi(E_n)$ vind in die norm topologie van Z plaas. Dus, as $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ σ -additief in die GOT, dan is ξ 'n σ -additiewe vektormaat. Die operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ is σ -additief as elke ν_x 'n σ -additiewe vektormaat is:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \xi \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) x - \sum_{i=1}^k \xi(E_i) x \right\|_Y = \left\| \nu_x \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) - \sum_{i=1}^k \nu_x(E_i) \right\|_Y = 0$$

vir elke $x \in X$. Die konvergensie van die reeks $\sum_{i=1}^{\infty} \xi(E_i)x$ vind in die norm-topologie van Y plaas. Natuurlik konvergeer hierdie reeks dan ook in die swak topologie van Y . Met ander woorde, ξ is ook σ -additief in die WOT. Vanuit die Orlicz-Pettis stelling het ons gesien dat enige vektormaat op 'n σ -algebra wat swak σ -additief is, ook norm σ -additief is (gevolg 1.5.6 op p.50). Gevolglik is die σ -additiwiteit van ξ in die SOT en in die WOT ekwivalent. Dit impliseer egter nie die σ -additiwiteit van ξ in die GOT nie.

Voorbeeld 2.1.2. (σ -Additiewe operatormaat wat nie 'n σ -additiewe vektormaat is nie)

Laat Σ die magsversameling van die natuurlike getalle $\mathbb{N}$ wees. Definieer $\xi : \Sigma \rightarrow L(\ell_2, \ell_2)$ deur $\xi(E) = T_E$ waar $T_E(x_n) = (y_n)$ waar

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{as } n \in E \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

vir 'n ry $(x_n) \in \ell_2$. As $E, F \in \Sigma$ disjunk is, dan is $T_{E \cup F} = T_E + T_F$. Gevolglik is ξ 'n operatormaat (en 'n vektormaat). Laat $(E_i) \subseteq \Sigma$ 'n willekeurige ry disjunkte versamelings wees, dan is

$$\begin{aligned} \left\| T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}(x_n) - \sum_{i=1}^k T_{E_i}(x_n) \right\|^2 &= \left\| T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}(x_n) - T_{\bigcup_{i=1}^k E_i}(x_n) \right\|^2 \\ &= \left\| T_{\bigcup_{i=k+1}^{\infty} E_i}(x_n) \right\|^2 \\ &= \sum_{n \in \bigcup_{i=k+1}^{\infty} E_i} |x_n|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $k \rightarrow \infty$. Dit geld vir enige $(x_n) \in \ell_2$. Dus is

$$\xi \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(E_i)$$

waar die konvergensie van die reeks in die SOT van $L(\ell_2, \ell_2)$ plaasvind. Maar as $E_i = \{i\}$ vir elke $i \in \mathbb{N}$, dan is $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \mathbb{N}$. Stel $T_k = \xi(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} E_i)$ vir elke k . Dan is $T_k(x_n) = \{0, 0, \dots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}$ vir enige $(x_n) \in \ell_2$ en

$$\left\| \xi(\mathbb{N}) - \sum_{i=1}^k \xi(E_i) \right\| = \|T_k\|$$

vir elke k . Maar die ry (T_k) is nie 'n Cauchy-ry nie, want as $k \neq j$, sê $k = j + 1$, dan is

$$\sup_{\|(x_n)\| \leq 1} \|T_k(x_n) - T_j(x_n)\| = \sup_{\|(x_n)\| \leq 1} \|\{0, 0, \dots, 0, x_j, 0, \dots\}\| = 1,$$

waar die supremum by e_j voorkom. Die operatormaat kan dus nie σ -additief in die GOT wees nie. Dit is dus nie 'n σ -additiewe vektormaat nie. $\square$

Die volgende twee voorbeelde wys hoe ons enige skaalarmaat en vektormaat as 'n operatormaat kan beskou.

Voorbeeld 2.1.3. (Skaalarmaat beskou as 'n operatormaat.)(Note 1 p.4, [30])

As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ 'n skaalarmaat is, dan kan μ as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ beskou word waar $X = Y = \mathbb{K}$. Vermenigvuldiging met 'n skalar is 'n lineêre operator $\cdot : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Aangesien $\mu(E)$ 'n skalar is vir elke $E \in \Sigma$, werk dit as 'n lineêre operator op $\mathbb{K}$ deur vermenigvuldiging. Vir die skalare $\mathbb{K}$ val die SOT en WOT saam met die gewone topologie van $\mathbb{K}$. Dus as ons $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ definieer deur $\xi(E)x = \mu(E) \cdot x$ vir $E \in \Sigma$ en $x = k \in \mathbb{K}$, dan is ξ 'n operatormaat wat σ -additief is as μ 'n σ -additiewe maat is. $\square$

Voorbeeld 2.1.4. (Vektormaat beskou as 'n operatormaat.)(Note 1 p.4, [30])

As $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n vektormaat is, dan kan ν as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(Y, X)$ beskou word waar $Y = \mathbb{K}$ die skaalerveld van die Banach ruimte X is. Die vermenigvuldiging van 'n skalar met 'n vektor is 'n lineêre operator van $\mathbb{K}$ na X . Aangesien $\nu(E)$ 'n vektor is vir elke $E \in \Sigma$, werk dit as 'n lineêre operator op $\mathbb{K}$ deur vermenigvuldiging. Die GOT en SOT val saam met die norm topologie van X [[as $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, dan kovergeer (x_n) in die GOT en in die SOT, want $\|x_n k - xk\| \leq |k| \|x_n - x\| \rightarrow 0$ vir alle $k \in \mathbb{K}$]]. Die operatormaat ξ is dus σ -additief as ν 'n σ -additiewe vektormaat is. $\square$

Onthou dat ons die notasie D^Σ gebruik om die versameling van alle eindige disjunkte verdelings $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \subseteq \Sigma$ van Ω aan te dui. Net soos ons die variasie en semivariasie van 'n vektormaat kon definieer, kan ons die variasie en semivariasie van 'n operatormaat definieer. Die semivariasie van 'n vektormaat stem ooreen met wat ons die skaalsemivariasie van 'n operatormaat sal noem. Ons begin met die variasie van 'n operatormaat.

Definisie 2.1.5. (Variasie van 'n operatormaat)(Definisie 6 p.4, [30])

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat is, dan is die variasie van ξ die reëlwaardige funksie $|\xi| : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieer oor 'n versameling $E \in \Sigma$ deur

$$|\xi|(E) = \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \|\xi(E \cap E_i)\|$$

waar die norm wat in die definisie voorkom die operatornorm op $L(X, Y)$ is.

Die definisie vir die variasie van 'n operatormaat stem dus presies ooreen met die variasie van 'n vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow L(X, Y) = Z$, want die norm van Z is die operatornorm. Andersom is enige skaalarmaat en vektormaat ook 'n operatormaat. Die volgende voorbeeld wys dat die variasies gelyk aan mekaar is.

Voorbeeld 2.1.6. (Variasie van skalaar- en vektormate) (Note 2 p.5, [30])

As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ 'n skaarmaat is wat as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ beskou word (sien voorbeeld 2.1.3), dan is

$$\begin{aligned} |\xi|(E) &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \|\xi(E \cap E_i)\| \\ &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \sup_{|k| \leq 1} |\xi(E \cap E_i)k| = \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r |\mu(E \cap E_i)| = |\mu|(E). \end{aligned}$$

Soortgelyk, as $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n vektormaat is wat as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, X)$ beskou word (sien voorbeeld 2.1.4), dan is

$$\begin{aligned} |\xi|(E) &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \sup_{|k| \leq 1} \|\xi(E \cap E_i)k\| \\ &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \sup_{|k| \leq 1} |k| \|\xi(E \cap E_i)\| = \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \|\xi(E \cap E_i)\| = |\nu|(E). \end{aligned}$$

Vanuit proposisie 1.1.9 op p.7 kan ons direk die eienskappe van $|\xi|$ aflei waar die σ -additiwiteit van ξ nie ter sprake is nie.

Proposisie 2.1.7. (Eienskappe van $|\xi|$)

Die variasie $|\xi|$ van 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ het die volgende eienskappe:

1. $0 \leq |\xi|(E) \leq \infty$ vir alle $E \in \Sigma$;
2. $|\xi|(\emptyset) = 0$;
3. $|\xi|$ is eindig additief;
4. $|\xi|$ is monotoon;
5. $\|\xi(E)\| \leq |\xi|(E)$ vir alle $E \in \Sigma$.
6. $|\xi|$ is σ -additief as ξ 'n σ -additiewe operatormaat is.

Gevolgtik is $|\xi| : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n maat as ξ 'n σ -additiewe operatormaat is.

Bewys. Bewerings 1 – 5 volg net soos in die bewys van proposisie 1.1.9 op p.7, want die (eindig additiewe) operatormaat ξ is ook 'n vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$. As ξ 'n σ -additiewe operatormaat is, dan is $\nu : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ nie noodwendig 'n σ -additiewe vektormaat nie (sien voorbeeld 2.1.2). Ons gee dus 'n bewys vir 6.

6. Neem aan ξ is σ -additief. Laat $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings wees. As $(F_j) \in D^\Sigma$, dan is

$$\xi(E \cap F_j)x := \xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap F_j\right)x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(E_n \cap F_j)x$$

vir alle $x \in X$ en elke $j = 1, 2, \dots, s$. Ons kyk nou na een van die somme wat in die definisie van $|\xi|(E)$ voorkom.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^s \|\xi(E \cap F_j)\| &= \sum_{j=1}^s \sup_{\|x\| \leq 1} \|\xi(E \cap F_j)x\| \\
&= \sum_{j=1}^s \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi(E_n \cap F_j)x \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^s \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi(E_n \cap F_j)\| \|x\| \\
&\leq \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi(E_n \cap F_j)\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{i=1}^r \|\xi(E_n \cap E_i)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi|(E_n)
\end{aligned}$$

Dus, deur die supremum oor alle $(F_j) \in D^\Sigma$ te neem, volg $|\xi|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi|(E_n)$. Omgekeerd, vanuit 3 en 4 volg dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi|(E_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k |\xi|(E_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} |\xi| \left(\bigcup_{n=1}^k E_n \right) \leq |\xi| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right). \quad \square$$

Die skalaarsemivariasie van 'n operatormaat word nou gedefinieer na analogie van die gelykheid wat in proposisie 1.1.14 op p.12 voorkom.

Definisie 2.1.8. (Skalaarsemivariasie van 'n operatormaat)(p.514, [9])

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat is, dan word die skalaarsemivariasie van ξ oor 'n versameling E gedefinieer deur

$$\|\xi\|(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(E \cap E_i) \right\|,$$

waar die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$ en rye skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ met $|\alpha_i| \leq 1$ geneem word.

Die norm $\|\sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(E \cap E_i)\|$ hierbo is die norm van die operator $\sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(E \cap E_i) \in L(X, Y)$. Gevolglik is stem die skalaarsemivariasie van die operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ presies ooreen met die semivariasie van die vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Z$, waar $Z = L(X, Y)$.

Die skalaarsemivariasie van 'n skaarmaat (beskou as 'n operatormaat) stem ooreen met die totale variasie van die maat. Soortgelyk stem die skalaarsemivariasie van 'n willekeurige vektormaat (beskou as 'n operatormaat) ooreen met die semivariasie van die vektormaat.

Voorbeeld 2.1.9. (Skalaarsemivariasie van skaalar- en vektormate)(Note 2 p.5, [30])

Laat $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n vektormaat wees wat as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, X)$ beskou word (sien voorbeeld 2.1.4). Beskou 'n versameling $E \in \Sigma$. As ons die

supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$ en eindige rye skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ met $|\alpha_i| \leq 1$ neem, kry ons vanuit proposisie 1.1.14 op p.12 dat

$$\|\xi\|(E) = \sup_{|k| \leq 1} \sup_{i=1}^r \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(E \cap E_i) k \right\| = \sup_{|k| \leq 1} |k| \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \nu(E \cap E_i) \right\| = \|\nu\|(E).$$

Neem nou 'n skaalarmaat μ wat as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ beskou word (sien voorbeeld 2.1.3). Aangesien die semivariasie van 'n skaalarmaat dieselfde is as die variasie van die maat, is $\|\xi\| = \|\mu\| = |\mu|$. $\square$

Net soos by die variasie van ξ , erf die skaalarsemivariasie $\|\xi\|$ al sy eienskappe waar die σ -additiwiteit van ξ nie ter sprake is nie, van die semivariasie van 'n vektormaat (proposisie 1.1.17 op p.14).

Proposisie 2.1.10. (Eienskappe van $\|\xi\|$)

Die skaalarsemivariasie van 'n operatormaat ξ het die volgende eienskappe:

1. $\|\xi\|(\emptyset) = 0$;
2. $\|\xi\|$ is monotoon;
3. $\|\xi\|$ is subadditief;
4. As ξ σ -additief is, dan is $\|\xi\|$ σ -subadditief;
5. $\|\xi(E)\| \leq \|\xi\|(E)$.

Bewys. Eienskappe 1, 2, 3 en 5 volg direk uit proposisie 1.1.17. Ons gee 'n bewys vir eienskap 4.

4. Neem aan ξ is σ -additief. Laat $(F_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings wees, dan geld vir 'n verdeling $(E_i) \in D^\Sigma$

$$\xi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap E_i \right) x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(F_n \cap E_i) x$$

vir alle $x \in X$. As $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 'n ry skalare is met $|\alpha_i| \leq 1$, dan is

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap E_i \right) \right\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap E_i \right) x \right\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \sum_{n=1}^{\infty} \xi(F_n \cap E_i) x \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(F_n \cap E_i) x \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\xi\|(E) \end{aligned}$$

Die σ -subadditiwiteit van $\|\xi\|$ volg nou deur die supremum oor skalare $|\alpha_i| \leq 1$ te neem. $\square$

As $Z = L(X, Y)$, dan kan ons die produk van elemente $z \in Z$ en $x \in X$ neem in die sin dat $zx = y$ waar $z = T \in L(X, Y)$ en $y = Tx$. Vir 'n willekeurige Banach ruimte Z en 'n vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Z$ kan ons nie noodwendig die produk zx neem nie.

Ons definieer nou die semivariasie $\widehat{\xi}$ van 'n operatormaat ξ . Dit is nie dieselfde as die skaarsemivariasie $\|\xi\|$ nie, maar die twee konsepte stem wel ooreen as $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, X)$ 'n vektormaat is.

Definisie 2.1.11. (Semivariasie van operatormaat)

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat is, dan word die semivariasie van ξ oor 'n versameling $E \in \Sigma$ gedefinieer deur

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i \right\|$$

waar die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$ en vektore $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ met $\|x_i\| \leq 1$ geneem word.

Die norm $\|\sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i\|$ hierbo is die norm van die element $\sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i \in Y$. Vir 'n willekeurige vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Z$ en 'n Banach ruimte X , het ons nie noodwendig 'n bilineêre afbeelding op $X \times Z$ nie, met ander woorde, die produkte $\nu(E \cap E_i)x_i$ bestaan nie noodwendig nie. Daar is dus geen analogie met 'n konsep vir vektormate nie.

Andersom as μ 'n skaarmaat en ν 'n vektormaat is wat as operatormate ξ beskou word, dan is $\widehat{\mu}(E) = \|\mu\|(E) = |\mu|(E)$ en $\widehat{\nu}(E) = \|\nu\|(E)$ vir alle $E \in \Sigma$, want in hierdie gevalle is $X = \mathbb{K}$.

Voorbeeld 2.1.12. (Semivariasie van skaalar- en vektormate)

Beskou die skaarmaat μ as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ en neem 'n versameling $E \in \Sigma$. Neem die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$ en vektore $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{K}$ met $|k_i| \leq 1$, dan kry ons per definisie dat

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)k_i \right| = \|\xi\|(E) = |\mu|(E).$$

Soortgelyk, as ons die vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow X$ as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{K}, X)$ beskou, dan is

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)k_i \right\| = \|\xi\|(E) = \|\nu\|(E).$$

Die eienskappe van $\widehat{\xi}$ is soortgelyk aan die van $\|\xi\|$. Ons sien dat die waarde $\widehat{\xi}(E)$ tussen $\|\xi\|(E)$ en $|\xi|(E)$ lê vir elke $E \in \Sigma$ en dat die versamelings $N \in \Sigma$ waarop $\|\xi\|$ en $\widehat{\xi}$ verdwyn ooreenstem.

Proposisie 2.1.13. (Eienskappe van $\widehat{\xi}$)

Die semivariasie $\widehat{\xi}$ van ξ het die volgende eienskappe:

1. $\widehat{\xi}(\emptyset) = 0$;
2. $\widehat{\xi}$ is monotoon;
3. $\widehat{\xi}$ is subadditief;
4. As ξ σ -additief is, dan is $\widehat{\xi}$ σ -subadditief;

$$5. \|\xi\|(E) \leq \widehat{\xi}(E) \leq |\xi|(E) \text{ vir alle } E \in \Sigma.$$

$$6. \widehat{\xi}(E) = 0 \text{ as en slegs as } \|\xi\|(E) = 0.$$

Bewys. Ons neem deurgaans die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$ en vektore $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ met $\|x_i\| \leq 1$.

$$1. \widehat{\xi}(\emptyset) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi(\emptyset \cap E_i) x_i \right\| = \|\mathbf{0}\| = 0.$$

2. Laat $E, F \in \Sigma$ met $E \subseteq F$. Laat $(F_j) \in D^\Sigma$ en $y_1, y_2, \dots, y_s \in X$ met $\|y_j\| \leq 1$ en beskou die som

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^s \xi((E \cap F_j) y_j) \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^s (\xi((E \cap F_j) y_j) + \xi((F \setminus E \cap F_j) 0)) \right\| \\ &\leq \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi((F \cap E_i) x_i) \right\| = \widehat{\xi}(F) \end{aligned}$$

Neem nou die supremum oor alle sulke (F_j) en (y_j) , dan is $\widehat{\xi}(E) \leq \widehat{\xi}(F)$.

3. As $E, F \in \Sigma$ disjunkte versamelings is, dan is

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}(E \cup F) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi((E \cup F) \cap E_i) x_i \right\| \\ &\leq \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi((E \cap E_i) x_i) \right\| + \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi((F \cap E_i) x_i) \right\| \\ &= \widehat{\xi}(E) + \widehat{\xi}(F). \end{aligned}$$

As $E, F \in \Sigma$ willekeurig is, dan is $E \cup F = E \cup F \setminus E$ en dus is $\widehat{\xi}(E \cup F) \leq \widehat{\xi}(E) + \widehat{\xi}(F \setminus E) \leq \widehat{\xi}(E) + \widehat{\xi}(F)$, want $\widehat{\xi}$ is monotoon.

4. Laat $(F_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings wees. Beskou 'n eindige verdeling $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^\Sigma$ en 'n eindige ry vektore $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ waar $\|x_i\| \leq 1$. Dan is

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^r \xi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap E_i \right) x_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \xi(F_n \cap E_i) x_i \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^r \xi(F_n \cap E_i) x_i \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup \left\| \sum_{i=1}^r \xi(F_n \cap E_i) x_i \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\xi}(F_n). \end{aligned}$$

Deur die supremum aan die linkerkant te neem volg dat $\widehat{\xi}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\xi}(F_n)$.

5. Laat $E \in \Sigma$. Dan is

$$\begin{aligned} \|\xi\|(E) &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(E \cap E_i) \right\| \\ &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)(\alpha_i x) \right\| \leq \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i \right\| = \widehat{\xi}(E). \end{aligned}$$

En

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}(E) &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i \right\| \leq \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \|\xi(E \cap E_i)x_i\| \\ &\leq \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \sup_{\|x\| \leq 1} \|\xi(E \cap E_i)x\| \\ &= \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \sum_{i=1}^r \|\xi(E \cap E_i)\| = |\xi|(E). \end{aligned}$$

6. Aangesien $\|\xi\|(E) \leq \widehat{\xi}(E)$ volg dat $\|\xi\|(E) = 0$ as $\widehat{\xi}(E) = 0$. Andersom, as $\|\xi\|(E) = 0$, dan is $\|\xi(E)\| = 0$ en gevolglik is $\xi(E) = \mathbf{0}$. Aangesien $\|\xi\|$ monotoon is, volg dat $\xi(F) = \mathbf{0}$ vir enige $F \subseteq E$. In die besonder, as $(E_i) \in D^\Sigma$, dan is $\xi(E \cap E_i) = \mathbf{0}$ vir elke i . Per definisie volg dan dat $\widehat{\xi}(E) = 0$. $\square$

Die volgende belangrike stelling gee vir ons voorwaardes waaronder die semivariasie $\widehat{\xi}$ kontinu is. Vir Banach ruimtes wat geen kopie van c_0 bevat nie, sien gevolg 1.5.7 op p.50.

Stelling 2.1.14. (**-Stelling p.515, [9], Lemma 2 p.17, [10]*)

Beskou Banach ruimtes X en Y en 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$. As Y geen kopie van c_0 bevat nie, dan is $\widehat{\xi}$ kontinu.

In die algemeen is $\widehat{\xi}$ kontinu en $\widehat{\xi}(\Omega) < \infty$ as en slegs as daar 'n eindige maat μ op Σ bestaan sodanig dat

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \widehat{\xi}(E) = 0 \quad \text{en} \quad \mu(E) \leq \|\xi\|(E)$$

vir alle $E \in \Sigma$.

Bewys. Neem aan Y bevat geen kopie van c_0 nie, maar dat daar 'n $\epsilon > 0$ en 'n dalende ry meetbare versamelings $E_n \downarrow \emptyset$ bestaan sodanig dat $\widehat{\xi}(E_n) > \epsilon$ vir elke n . Per definisie van $\widehat{\xi}$ kan ons 'n eindige ry vektore $(x_i^{(1)})$ met $\|x_i^{(1)}\| \leq 1$ en 'n verdeling $(F_i^{(1)}) \in D^\Sigma$ kry sodanig dat

$$\left\| \sum_{i=1}^{r_1} \xi(E_1 \cap F_i^{(1)})x_i^{(1)} \right\| > \epsilon.$$

Maar elke vektormaat $\xi(\cdot)x_i$ is σ -additief en $E_n \downarrow \emptyset$. Dus volg vanuit die Bartle-Dunford-Schwartz lemma (gevolg 1.3.17 op p.33) dat $\|\xi(E_n \cap F_i^{(1)})x_i\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ vir elke i . Gaan nou voort op die bostaande wyse om vir elke $k = 1, 2, 3, \dots$ 'n element

$$y_k := \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} \xi((E_{n_{k-1}} \setminus E_{n_k}) \cap F_i^{(k)})x_i^{(k)} \in Y$$

te kry waar $(F_i^{(k)}) \in D^\Sigma$ en $(x_i^{(k)})$ 'n eindige ry vektore met $\|x_i^{(k)}\| \leq 1$ is. Dan is $\|y_k\| > \epsilon$ vir elke k . Hieruit volg dat vir elke begrensde ry skalare (α_k) geld dat $\|\sum_{k=1}^\infty \alpha_k y_k\| \leq \hat{\xi}(\Omega) \sup_k |\alpha_k|$. Volgens Lemma 2 op p.159 van [5] is die reeks $\sum_{k=1}^\infty y_k$ swak onvoorwaardelik konvergent. Dit beteken $\sum_{k=1}^\infty |y^* y_k| < \infty$ vir elke $y^* \in Y^*$. Aangesien Y geen kopie van c_0 bevat nie, volg dat $\sum_{k=1}^\infty y_k$ onvoorwaardelik in norm konvergeer (sien gevolg 1.5.7 op p.50). Maar dan moet $\|y_k\| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ 'n teësprak met die feit dat $\|y_k\| > \epsilon$ vir elke k . Die teësprak wys dat ons aanname vals is. Dus $\hat{\xi}(E_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Om die tweede deel van die stelling te bewys, neem aan $\hat{\xi}$ is kontinu. Dan is ξ 'n operatormaat wat σ -additief in die GOT is. [[As $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry disjunkte versamelings is, dan is

$$\left\| \xi \left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n \right) - \sum_{n=1}^k E_n \right\| = \left\| \xi \left(\bigcup_{n=k+1}^\infty E_n \right) \right\| \leq \hat{\xi} \left(\bigcup_{n=k+1}^\infty E_n \right) \rightarrow 0$$

as $k \rightarrow \infty$, want $\hat{\xi}$ is kontinu en $\hat{\xi}(\Omega) < \infty$ per aanname.]] Dus is ξ 'n σ -additiewe vektormaat. Volgens die lemma van Bartle-Dunford-Schwartz (gevolg 1.3.17 op 33) bestaan daar 'n eindige maat μ op Σ sodanig dat

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\xi\|(E) = 0 \quad \text{en} \quad \mu(E) \leq \|\xi\|(E)$$

vir alle $E \in \Sigma$. As $N \in \Sigma$ en $\mu(N) = 0$ dan is $\|\xi\|(N) = 0$ en dus ook $\hat{\xi}(N) = 0$ (sien proposisie 2.1.13(6)). Neem egter aan dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \hat{\xi}(E) \neq 0$. Dan bestaan daar 'n $\epsilon > 0$ en 'n ry $(F_k) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $\mu(F_k) < 1/2^k$ vir elke k , maar $\hat{\xi}(F_k) > 3\epsilon/2$ vir elke k . Stel $M = \limsup_k F_k$. Aangesien die reeks $\sum_{k=1}^\infty \mu(F_k) < \sum_{k=1}^\infty 1/2^k$ konvergeer, is $\mu(M) = 0$ volgens die Borel-Cantelli lemma. Ons weet $\bigcup_{j=k}^\infty F_j \downarrow M$ as $k \rightarrow \infty$, dus, volgens die kontinuïteit van $\hat{\xi}$ bestaan daar 'n k_ϵ sodanig dat $\hat{\xi} \left(\left(\bigcup_{j=k}^\infty F_j \right) \setminus M \right) < \epsilon/2$ as $k \geq k_\epsilon$. Maar dan is

$$\hat{\xi}(M) = \hat{\xi} \left(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{j=k}^\infty F_j \right) \geq \hat{\xi} \left(\bigcup_{j=k}^\infty F_j \right) - \hat{\xi} \left(\left(\bigcup_{j=k}^\infty F_j \right) \setminus M \right) > \frac{3\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

vir alle $k \geq k_\epsilon$, 'n teësprak. Dus moet $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \hat{\xi}(E) = 0$.

Omgekeerd, as daar so 'n μ bestaan, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$ vir enige meetbare ry $E_n \downarrow \emptyset$. Maar dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}(E_n) = 0$. $\square$

Gevolg 2.1.15.

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n σ -additiewe operatormaat is, $\hat{\xi}$ kontinu is en $\hat{\xi}(\Omega) < \infty$, dan is ξ 'n σ -additiewe vektormaat.

Definisie 2.1.16. (Absoluut kontinu)(p.515, [9])

As $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n vektormaat en $\rho : \Sigma \rightarrow Y$ 'n versamelingsfunksie is, dan sê ons ν is ρ -absoluut kontinu as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $\delta > 0$ bestaan sodanig dat

$$\sup\{\|\rho(F)\| : F \in \Sigma, F \subseteq E\} < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\nu\|(E) < \epsilon$$

vir enige $E \in \Sigma$.

Hierbo is $\|\nu\|$ die semivariasie van die vektormaat ν (of die skalaarsemivariasie van ν as dit as 'n operatormaat beskou word). As $\rho = \mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n eindige nie-negatiewe skalaarmaat is, dan is $\sup\{\|\rho(F)\| : F \in \Sigma, F \subseteq E\} = |\mu(E)| = \mu(E)$. Die voorwaarde word dus $\mu(E) < \delta \Rightarrow \|\nu\|(E) < \epsilon$ oftewel $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu\|(E) = 0$. Die bostaande definisie veralgemeen dus definisie 1.3.11 op p.27.

Voorbeeld 2.1.17. ($\|\xi\|$ -, $\widehat{\xi}$ -absoluut kontinu)

As ν 'n vektormaat en ξ 'n operatormaat is, dan is ν $\|\xi\|$ -absoluut kontinu as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $\delta > 0$ bestaan sodanig dat

$$\|\xi\|(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\nu\|(E) < \epsilon,$$

want die monotoniteit van $\|\xi\|$ gee dat $\sup\{\|\xi\|(F) : F \in \Sigma, F \subseteq E\} = \|\xi\|(E)$. Met ander woorde ν is $\|\xi\|$ -absoluut kontinu ($\widehat{\xi}$ -absoluut kontinu) as

$$\lim_{\|\xi\|(E) \rightarrow 0} \|\nu\|(E) = 0 \quad \left(\lim_{\widehat{\xi}(E) \rightarrow 0} \|\nu\|(E) = 0 \right).$$

Aangesien $\|\xi\|(E) \leq \widehat{\xi}(E)$ vir alle $E \in \Sigma$, volg dat ν $\widehat{\xi}$ -absoluut kontinu is as ν $\|\xi\|$ -absoluut kontinu is [[as $\widehat{\xi}(E) < \delta$, dan is $\|\xi\|(E) < \delta$, en dus $\|\nu\|(E) < \epsilon$]]. $\square$

2.2 'n Spesiale geval

Laat X en Y normeerde ruimtes oor dieselfde skalarveld $\mathbb{K}$ wees en Z 'n Banach ruimte. Neem aan daar bestaan 'n bilineêre afbeelding $\cdot : X \times Y \rightarrow Z$ en 'n $K > 0$ sodanig dat $\|x \cdot y\| \leq K\|x\|\|y\|$ vir alle $x \in X$ en $y \in Y$. Ons sal net xy skryf vir $x \cdot y$.

Voorbeeld 2.2.1. (Voorbeelde van ruimtes met 'n bilineêre afbeelding)
(p.338 [3])

1. Die ruimte $X = Y = Z$ is 'n Banach algebra. In hierdie geval is $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ vir alle $x, y \in X$ ($K = 1$).
2. 'n Banach ruimte X met $Y = X^*$ en $Z = \mathbb{K}$. Hier is $|x^*x| \leq \|x^*\|\|x\|$ vir alle $x^* \in X^*$ en alle $x \in X$ ($K = 1$).
3. Beide X en Z is Banach ruimtes en $Y = L(X, Z)$ is die ruimte van alle begrensde lineêre operatore $T : X \rightarrow Z$. Hier is $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ vir alle $x \in X$ en alle $T \in L(X, Z)$ ($K = 1$). $\square$

Beskou 'n willekeurige versameling Ω , 'n algebra $\mathcal{F}$ van deelversamelings van Ω en Banach ruimtes X, Y en Z . Neem aan ons het 'n bilineêre afbeelding $\cdot : X \times Y \rightarrow Z$. Laat $\mathcal{P}(\Omega)$ die magsversameling van Ω aandui.

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat wees. Ons kan ν as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Z)$ beskou, want enige $y \in Y$ werk as 'n lineêre operator van X na Z deur die bilineêre afbeelding wat op $X \times Y$ bestaan. Die vektormaat ν is σ -additief as dit vir elke ry $(E_n) \subseteq \mathcal{F}$ van disjunkte versamelings waarvoor $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$, geld dat

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

waar die konvergensie van die reeks in die norm topologie van Y plaasvind. Sê $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = y$. Dit beteken

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k \nu(E_n) - y \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k \xi(E_n) - y \right\| = 0.$$

Met ander woorde die norm van die operator $\sum_{n=1}^k \xi(E_n) - y$ konvergeer na 0 as $n \rightarrow \infty$. Die operatormaat ξ is dus σ -additief in die GOT. Soos ons in afdeling 2.1 gesien het, beteken dit nie noodwendig dat ν 'n σ -additiewe operatormaat is nie.

Aangesien ons 'n bilineêre afbeelding op $X \times Y$ tot ons beskikking het, kan ons die produk van $\nu(E)$ met elemente uit X neem. Vir die vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ kan ons dus die semivariasie definieer soos by definisie 2.1.11.

Definisie 2.2.2. (Semivariasie $\hat{\nu}$)(p.338, [3])

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat wees. Ons definieer die semivariasie $\hat{\nu} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ van ν oor 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ deur

$$\hat{\nu}(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap E_i) \right\|,$$

waar die supremum oor alle eindige disjunkte verdelings $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^{\mathcal{F}}$ en elemente $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ met $\|x_i\| \leq 1$ geneem word. Ons brei die semivariasie $\hat{\nu}$ tot $\mathcal{P}(\Omega)$ uit deur te definieer dat

$$\hat{\nu}(A) = \inf \{\hat{\nu}(E) : E \in \mathcal{F}, A \subseteq E\}$$

vir 'n versameling $A \subseteq \Omega$.

Onthou dat die semivariasie $\|\nu\|$ gedefinieer is deur die bostaande supremum oor skalare α_i met $|\alpha_i| \leq 1$ te neem in plaas van vektore $\|x_i\| \leq 1$. Die bostaande definisie stem dus ooreen met die semivariasie van 'n operatormaat. Die semivariasie $\widehat{\nu}$ erf dus al sy eienskappe van die semivariasie van 'n operatormaat (sien proposisie 2.1.13).

Proposisie 2.2.3. (*Eienskappe van die semivariasie $\widehat{\nu}$*)

Die semivariasie $\widehat{\nu}$ het die volgende eienskappe:

1. $\widehat{\nu}(\emptyset) = 0$;
2. $\widehat{\nu}$ is monotoon;
3. $\widehat{\nu}$ is subadditief;
4. $\widehat{\nu}$ is σ -subadditief as ν σ -additief is;
5. $\|\nu(E)\| \leq \|\nu\|(E) \leq \widehat{\nu}(E) \leq |\nu|(E)$ vir elke $E \in \mathcal{F}$.

Hoofstuk 3

Meetbare funksies

Daar is verskillende meetbaarheidsbegrippe wat 'n rol speel in ons studie. Verskillende tipes vektorintegrale word dan ook vir die verskillende tipes meetbare funksies gedefinieer. In hierdie hoofstuk ondersoek ons die onderlinge verbande tussen die meetbaarheidsbegrippe. Dit stel ons ook in staat om later in hoofstuk 7 die verbande tussen verskillende tipes vektorintegrale te ondersoek.

'n Meetbare funksie f sal telkens gedefinieer word as die limiet van 'n ry funksies (f_n) waar elke f_n een of ander tipe trapfunksie is. Die wyse waarop (f_n) na f konvergeer kan ook op verskillende maniere plaasvind. Die manier waarop verskillende tipes meetbare funksies verskil of ooreenstem hang dus af van hoe die verskillende tipes trapfunksies met mekaar vergelyk en hoe die verskillende tipes konvergensie inmekaar steek. Die eerste afdeling in hierdie hoofstuk handel dus oor verskillende maniere waarop 'n ry funksies kan konvergeer.

Laat X 'n Banach ruimte wees en laat (Ω, Σ) 'n meetbare ruimte wees waar Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω is.

3.1 Tipes konvergensie en Egoroff se stelling

In hierdie afdeling kyk ons na verskillende maniere waarop 'n ry van vektorwaardige funksies $f_n : \Omega \rightarrow X$ na 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ kan konvergeer.

Definisie 3.1.1. (Submaat)(Definisie 3 p.3, [30])

'n Nie-negatiewe versamelingsfunksie $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ word 'n submaat genoem as

1. $\rho(\emptyset) = 0$;
2. ρ monotoon is;
3. ρ subadditief is.

'n Versamelingsfunksie $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is subadditief as dit vir disjunkte versamelings $E, F \in \Sigma$ geld dat $\rho(E \cup F) \leq \rho(E) + \rho(F)$. As ρ ook monotoon is, dan volg dat $\rho(E \cup F) \leq \rho(E) + \rho(F)$ vir willekeurige versamelings $E, F \in \Sigma$. Deur induksie volg dan dat $\rho(\bigcup_{k=1}^n E_k) \leq \sum_{k=1}^n \rho(E_k)$ vir enige eindige ry versamelings $E_1, E_2, \dots, E_n \in \Sigma$.

As $\nu : \Sigma \rightarrow X$ 'n vektormaat is en $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat is, dan is die versamelingsfunksies $|\nu|, \|\nu\|, |\xi|, \|\xi\|$ en $\hat{\xi}$ almal submate. Gevolglik kyk ons eers

na konvergensie ten opsigte van 'n algemene submaat voordat ons die verskillende tipes variasies van mate beskou.

Definisie 3.1.2. (Kontinue submaat)(Definisie 3 p.3, [30])

'n Submaat $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ word kontinu genoem as $\rho(E_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ vir enige dalende ry $E_n \downarrow \emptyset$ uit Σ waarvoor daar 'n n bestaan sodanig dat $\rho(E_n) < \infty$.

Proposisie 3.1.3. (Eienskappe van 'n kontinue submaat)

As $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n kontinue submaat is, dan

1. is ρ σ -subadditief;
2. as $E_n \downarrow E$ en $\rho(E_1) < \infty$, dan $\rho(E_n) \rightarrow \rho(E)$ as $n \rightarrow \infty$.

Bewys.

1. Neem 'n willekeurige ry $(E_n) \subseteq \Sigma$ en stel $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ en $F_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$ vir elke n . Dan $F_n \uparrow E$ en dus $E \setminus F_n \downarrow \emptyset$. Volgens die subadditiwiteit en kontinuïteit van ρ ;

$$\begin{aligned} \rho\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \rho(E) \leq \rho\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) + \rho(E \setminus F_n) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \rho(E_k) + \rho(E \setminus F_n) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_k) + 0 \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$.

2. Neem aan $E_n \downarrow E$ en $\rho(E_1) < \infty$. Dan is $\rho(E_n) < \infty$ en $\rho(E_n) \leq \rho(E_n \setminus E) + \rho(E)$ vir enige n , want ρ is monotoon en subadditief. Maar $E_n \setminus E \downarrow \emptyset$, dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(E_n) \leq 0 + \rho(E) \quad (3.1.1)$$

volgens die kontinuïteit van ρ . Aan die ander kant, aangesien ρ monotoon is en $E \subseteq E_n$ vir alle n is $\rho(E_n) \geq \rho(E)$ vir alle n . Tesame met ongelykheid 3.1.1 kry ons $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(E_n) = \rho(E)$. $\square$

Beskou nou 'n ry funksies $f_n : \Omega \rightarrow X$ wat op een of ander manier na 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ konvergeer. Laat $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n submaat wees. Laat $\omega \in \Omega$. Tot dusver het ons $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ geskryf as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $n_{\omega}^{\epsilon} \in \mathbb{N}$ bestaan sodanig dat $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| < \epsilon$ as $n \geq n_{\omega}^{\epsilon}$. As ons dit vir elke $\omega \in \Omega$ kan doen, dan sê ons (f_n) konvergeer puntsgewys (oral) na f . Die ry funksies konvergeer gelykmatig na f as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n n_{ϵ} bestaan sodanig dat vir alle $n \geq n_{\epsilon}$, $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| < \epsilon$ vir alle $\omega \in \Omega$.

As $N \in \Sigma$ en $\rho(N) = 0$, dan noem ons N 'n ρ -nulversameling.

Definisie 3.1.4. (ρ -Byna oral konvergensie)

Die ry funksies (f_n) konvergeer ρ -byna oral na f as daar 'n ρ -nulversameling $N \in \Sigma$ bestaan sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$.

Alhoewel ρ nie 'n maat is nie, word submate soos $\|\nu\|$ gewoonlik deur een of ander tipe maat (in hierdie geval 'n vektormaat ν), voortgebring. Ons maak die volgende definisie.

Definisie 3.1.5. (Konvergensie in ρ -maat)

Die ry funksies (f_n) konvergeer in ρ -maat na f as

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon\}) = 0$$

vir elke $\epsilon > 0$, oftewel, as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n n_ϵ bestaan sodanig dat

$$\rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon\}) < \epsilon$$

vir elke $n \geq n_\epsilon$.

Definisie 3.1.6. (ρ -Byna gelykmatige konvergensie)

Die ry funksies (f_n) konvergeer ρ -byna gelykmatig na f as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n versameling $N_\epsilon \in \Sigma$ bestaan sodanig dat $\rho(N_\epsilon) < \epsilon$ en $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ gelykmatig op $\Omega \setminus N_\epsilon$.

Ons ondersoek nou die verbande wat tussen die verskillende tipes konvergensie bestaan. Die resultate volg op 'n soortgelyke manier as in die klassieke geval, waar daar met 'n maat gewerk word (sien byvoorbeeld hoofstuk 2.5 in [2]). In ons geval waar ons met 'n submaat werk moet ons sekere eienskappe aanneem om te verseker dat die ooreenstemmende resultate geld.

Stelling 3.1.7. (Stelling 2.5.2 p.97, [2])

As die ry funksies (f_n) ρ -byna gelykmatig na f konvergeer, dan

1. konvergeer (f_n) in ρ -maat na f ;
2. konvergeer (f_n) ρ -byna oral na f .

Bewys. Laat $\epsilon > 0$ en $\delta > 0$. Neem aan daar bestaan 'n $n_\delta \in \mathbb{N}$ en 'n versameling $N_\epsilon \in \Sigma$ sodanig dat $\rho(N_\epsilon) < \epsilon$ en $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| < \delta$ as $n \geq n_\delta$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N_\epsilon$.

1. Vir elke $n \geq n_\delta$ is $\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta\} \subseteq N_\epsilon$. Dus is $\rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta\}) \leq \rho(N_\epsilon) < \epsilon$ vir alle $n \geq n_\delta$. Dus konvergeer (f_n) in ρ -maat na f .

2. Kies telkens $\epsilon = \frac{1}{k}$ waar $k = 1, 2, \dots$ en laat $N_\epsilon = N_k$. Dan konvergeer (f_n) gelykmatig na f op elke $\Omega \setminus N_k$. Stel $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Omega \setminus N_k)$. Dan is

$$\rho(\Omega \setminus S) = \rho\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (N_k)\right) \leq \rho(N_k) < \frac{1}{k}$$

vir elke k , want ρ is monotoon. Maar dit beteken $\rho(\Omega \setminus S) = 0$. Vir elke $\omega \in S$, is $\omega \in \Omega \setminus N_k$ vir een of ander k . Dus geld dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in S$. $\square$

As ρ 'n σ -subadditiewe submaat is, dan geld die Borel-Cantelli lemma vir ρ (sien byvoorbeeld lemma 2.2.4 in [2]). Die bewys is woordeliks dieselfde as die bewys vir mate.

Stelling 3.1.8. (Lemma 3 p.346, [3], Stelling 2.5.3 p.97, [2])

As ρ σ -subadditief is en (f_n) in ρ -maat na f konvergeer, dan het (f_n) 'n deelry wat ρ -byna gelykmatig na f konvergeer.

Bewys. Aangesien (f_n) in ρ -maat na f konvergeer, bestaan daar vir elke k 'n $n_k \in \mathbb{N}$ sodanig dat

$$\rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq 2^{-k}\}) < 2^{-k}$$

as $n \geq n_k$. Stel nou $N_k = \{\omega \in \Omega : \|f_{n_k}(\omega) - f(\omega)\| \geq 2^{-k}\}$ vir elke k en $N = \limsup_k N_k$. Dan is $\rho(N_k) < 2^{-k}$ en dus is

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(N_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Aangesien ρ σ -subadditief is, volg vanuit die Borel-Cantelli lemma dat $\rho(N) = 0$. As $\omega \in \Omega \setminus N$, dan bestaan daar 'n k_0 sodanig dat $\omega \notin \bigcup_{k=k_0}^{\infty} N_k$ en dus ook $\omega \notin N_k$ vir alle $k \geq k_0$. Dit beteken $\|f_{n_k}(\omega) - f(\omega)\| < 2^{-k}$ vir alle $k \geq k_0$. Dus konvergeer die deelre (f_{n_k}) puntsgewys op $\Omega \setminus N$ na f .

Laat $\epsilon > 0$ willekeurig wees en stel $N_\epsilon = \bigcup_{k=n_\epsilon}^{\infty} N_k$ waar n_ϵ 'n natuurlike getal is wat groot genoeg is dat

$$\rho(N_\epsilon) \leq \sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} \rho(N_k) \leq \sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon.$$

As $\omega \in \Omega \setminus N_\epsilon$, dan is $\omega \notin N_k$ vir elke $k \geq n_\epsilon$. Dit beteken $\|f_{n_k}(\omega) - f(\omega)\| < 2^{-k}$ vir elke $k \geq n_\epsilon$ en alle $\omega \in \Omega \setminus N_\epsilon$. Dus konvergeer (f_{n_k}) gelykmatig na f op $\Omega \setminus N_\epsilon$. $\square$

Die volgende lemma gee 'n ekwivalente voorwaarde vir ρ -byna oral konvergensie. Dit word gebruik in die bewys van Egoroff se stelling.

Lemma 3.1.9. (*Lemma 2.5.4 p.98, [2]*)

As ρ 'n kontinue submaat is en $\rho(\Omega) < \infty$, dan konvergeer (f_n) puntsgewys ρ -byna oral na f as en slegs as

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|f_k(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta\} \right) = 0$$

vir enige $\delta > 0$.

Bewys. Beskou 'n willekeurige $\delta > 0$. Stel $M_k = \{\omega \in \Omega : \|f_k(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta\}$ vir elke $k \in \mathbb{N}$, $N_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|f_k(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta\}$ vir elke $n \in \mathbb{N}$ en $N_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} M_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n = \limsup_k M_k$. Aangesien ρ kontinue is en $N_n \downarrow N_\delta$, volg dat $\rho(N_n) \rightarrow \rho(N_\delta)$ as $n \rightarrow \infty$. Verder, as $\delta_1 < \delta_2$, dan is

$$M_k^2 := \{\omega \in \Omega : \|f_k(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta_2\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \|f_k(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta_1\} := M_k^1$$

vir elke k . Dus is $N_{\delta_2} = \limsup_k M_k^2 \subseteq \limsup_k M_k^1 = N_{\delta_1}$. Ons kan vir enige $\delta > 0$ 'n $m \in \mathbb{N}$ kry dat $\delta > 1/m$. Gevolglik as ons die vereniging oor alle $\delta > 0$ neem dan is

$$\bigcup_{\delta} N_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_{1/m}.$$

Beskou 'n $\omega \in \Omega$, neem aan daar bestaan 'n $\delta > 0$ sodanig dat $\omega \in N_\delta = \limsup_k M_k$. Dan is bestaan daar vir elke n 'n $k_\delta \geq n$ sodanig dat $\omega \in M_{k_\delta}$, dit

wil sê $\|f_{k_\delta}(\omega) - f(\omega)\| \geq \delta$. Aangesien ons vir enige n so 'n k_δ kan kry beteken dit dat $f_n(\omega)$ nie na $f(\omega)$ konvergeer nie. Deur die argument om te draai sien ons dat as $f_n(\omega)$ nie na $f(\omega)$ konvergeer nie, daar 'n $\delta > 0$ bestaan sodanig dat $\omega \in N_\delta$. Dus konvergeer $f_n(\omega)$ na $f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$ waarvoor $\omega \notin N_\delta$ vir alle $\delta > 0$. Met ander woorde vir alle $\omega \notin \bigcup_{\delta} N_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_{1/m} := N$.

Laat M_k, N_n, N_δ die versamelings geassosieer met 'n spesifieke $\delta > 0$ wees. Per aanname is $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(N_n) = \rho(N_\delta) = 0$ vir enige $\delta > 0$. Dus volg ook dat $\rho(N_{1/m}) = 0$ vir enige $m \in \mathbb{N}$. Volgens proposisie 3.1.3 is die kontinue submaat ρ ook σ -subadditief, dus is

$$\rho(N) = \rho\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} N_{1/m}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \rho(N_{1/m}) = 0.$$

Die versameling N is dus 'n ρ -nulversameling en $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. $\square$

Stelling 3.1.10. (Egoroff se stelling) (2.2.5 p.98, [2])

As ρ 'n kontinue submaat is en $\rho(\Omega) < \infty$, dan konvergeer (f_n) puntsgewys ρ -byna oral na f as en slegs as (f_n) ρ -byna gelykmatig na f konvergeer.

Bewys. Net een rigting hoef bewys te word. Laat $\epsilon > 0$ en neem aan (f_n) konvergeer ρ -byna oral na f . Volgens lemma 3.1.9, kan ons vir elke $n \in \mathbb{N}$ 'n k_n kry sodanig dat

$$\rho(N_n) := \rho\left(\bigcup_{k=k_n}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : \|f_k(\omega) - f(\omega)\| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

As $N_\epsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, dan volg vanuit die kontinuïteit van ρ (sien proposisie 3.1.3) dat

$$\rho(N_\epsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(N_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Ons wys nou dat (f_k) gelykmatig op $\Omega \setminus N_\epsilon$ na f konvergeer. Laat dus $\delta > 0$. Kies n groot genoeg dat $1/n < \delta$. Vir alle $\omega \in \Omega \setminus N_\epsilon$ is $\omega \notin N_n$ vir alle n . Dit beteken dat $\|f_k(\omega) - f(\omega)\| < 1/n < \delta$ as $k \geq k_n$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N_\epsilon$. Die ry (f_n) konvergeer dus gelykmatig na f op $\Omega \setminus N_\epsilon$. Aangesien $\rho(N_\epsilon) < \epsilon$ beteken dit dat (f_n) ρ -byna gelykmatig na f konvergeer. $\square$

Laat $x^* \in X^*$ 'n willekeurige begrensde lineêre funksionaal wees. Ons kyk nou na die konvergensie van die rye skalaarfunksies (x^*f_n) en $(\|f_n\|)$. Vir alle $\omega \in \Omega$ is $|x^*f_n(\omega) - x^*f(\omega)| \leq \|x^*\| \|f_n(\omega) - f(\omega)\|$ en $|\|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\|| \leq \|f_n(\omega) - f(\omega)\|$. Gevolglik, as (f_n) puntsgewys of gelykmatig op 'n versameling na f konvergeer, dan konvergeer die rye (x^*f_n) en $(\|f_n\|)$ op dieselfde wyse op die versameling na x^*f en $\|f\|$.

Proposisie 3.1.11.

Laat $x^* \in X^*$. As 'n ry funksies (f_n) ρ -byna oral, in ρ -maat of ρ -byna gelykmatig na f konvergeer, dan konvergeer die rye $(\|f_n\|)$ en x^*f_n op diedelfde wyse na $\|f\|$ en x^*f respektief.

Bewys. 1. As (f_n) ρ -byna oral na f konvergeer, dan bestaan daar per definisie 'n ρ -nulversameling $N \in \Sigma$ sodanig dat (f_n) puntsgewys op $\Omega \setminus N$ na f konvergeer. Maar dan konvergeer $(x^* f_n)$ en $(\|f_n\|)$ puntsgewys na $x^* f$ en $\|f\|$ op $\Omega \setminus N$. Dit beteken $x^* f_n \rightarrow x^* f$ en $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ ρ -byna oral.

2. As (f_n) in ρ -maat na f konvergeer, dan bestaan daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n n_ϵ en 'n n_ϵ^* sodanig dat $\rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon\}) < \epsilon$ as $n \geq n_\epsilon$ en $\rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon/\|x^*\|\}) < \epsilon$ as $n \geq n_\epsilon^*$. Aangesien

$$\frac{1}{\|x^*\|} |x^* f_n(\omega) - x^* f(\omega)|, \quad \left| \|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\| \right| \leq \|f_n(\omega) - f(\omega)\|$$

vir alle $\omega \in \Omega$, volg dat

$$\{\omega \in \Omega : |x^* f_n(\omega) - x^* f(\omega)| \geq \epsilon\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon/\|x^*\|\}$$

en

$$\{\omega \in \Omega : \left| \|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\| \right| \geq \epsilon\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon\}.$$

Vanuit die feit dat ρ monotoon is, volg dat $\rho(\{\omega \in \Omega : \left| \|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\| \right| \geq \epsilon\}) < \epsilon$ as $n \geq n_\epsilon$ en $\{\omega \in \Omega : |x^* f_n(\omega) - x^* f(\omega)| \geq \epsilon\} < \epsilon$ as $n \geq n_\epsilon^*$. Dit wys dat $(x^* f_n)$ en $(\|f_n\|)$ in ρ -maat na $x^* f$ en $\|f\|$ konvergeer.

3. Laat $\epsilon > 0$. As (f_n) ρ -byna gelykmatig na f konvergeer, dan bestaan daar 'n versameling $N_\epsilon \in \Sigma$ sodanig dat $\rho(N_\epsilon) < \epsilon$ en $f_n \rightarrow f$ gelykmatig op $\Omega \setminus N_\epsilon$. Maar dan konvergeer $(x^* f_n)$ en $(\|f_n\|)$ gelykmatig na $x^* f$ en $\|f\|$ op $\Omega \setminus N_\epsilon$. Dus $x^* f_n \rightarrow x^* f$ en $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ ρ -byna gelykmatig. $\square$

Die volgende proposisie sal dikwels in die volgende afdeling gebruik word.

Proposisie 3.1.12.

As (f_n) en (g_n) rye funksies is wat ρ -byna oral, in ρ -maat of ρ -byna gelykmatig na f en g onderskeidelik konvergeer en $\alpha \in \mathbb{K}$, dan konvergeer $(f_n + \alpha g_n)$ op dieselfde wyse na $f + \alpha g$.

Bewys. Neem aan $f_n \rightarrow f$ en $g_n \rightarrow g$. Ons beskou die verskillende maniere waarop konvergensie kan plaasvind.

1. Konvergensie vind ρ -byna oral plaas. Daar bestaan ρ -nulversamelings N_f en N_g sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N_f$ en $g_n(\omega) \rightarrow g(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N_g$ en dus ook $\alpha g_n(\omega) \rightarrow \alpha g(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N_g$. Dan is $\rho(N) := \rho(N_f \cup N_g) \leq 0 + 0$ en $f_n(\omega) + \alpha g_n(\omega) \rightarrow f(\omega) + \alpha g(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$, want $\Omega \setminus N_f, \Omega \setminus N_g \subseteq \Omega \setminus N$. Dus $f_n + \alpha g_n \rightarrow f + \alpha g$ ρ -byna oral.

2. Konvergensie vind in ρ -maat plaas. Vir elke $\epsilon > 0$ bestaan daar 'n n_f^ϵ en n_g^ϵ sodanig dat

$$\rho(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{en} \quad \rho(\{\omega \in \Omega : \|g_n(\omega) - g(\omega)\| \geq \frac{\epsilon}{2|\alpha|}\}) < \frac{\epsilon}{2}$$

as $n \geq n_f^\epsilon$ en $n \geq n_g^\epsilon$ onderskeidelik. Stel $N_n^f = \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon/2\}$ en $N_n^g = \{\omega \in \Omega : \|\alpha g_n(\omega) - \alpha g(\omega)\| \geq \epsilon/2\}$. Stel

$$\begin{aligned} N_n &:= \{\omega \in \Omega : \|(f_n(\omega) + \alpha g_n(\omega)) - (f(\omega) + \alpha g(\omega))\| \geq \epsilon\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \|(f_n(\omega) - f(\omega)) + \alpha(g_n(\omega) - g(\omega))\| \geq \epsilon\} \end{aligned}$$

vir elke n . Dan is $N_n \subseteq N_n^f \cup N_n^g$ volgens die driehoeksongelykheid en dus as $n \geq \max\{n_f^\epsilon, n_g^\epsilon\} := n_\epsilon$, dan is $\rho(N_n) \leq \rho(N_n^f) + \rho(N_n^g) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Dus konvergeer $(f_n + \alpha g_n)$ in ρ -maat na $f + \alpha g$.

3. Konvergensie vind ρ -byna gelykmatig plaas. Dan bestaan daar vir elke $\epsilon > 0$ versamelings N_f^ϵ en N_g^ϵ sodanig dat $\rho(N_f^\epsilon) < \epsilon/2$ en $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ gelykmatig op $\Omega \setminus N_f^\epsilon$; en $\rho(N_g^\epsilon) < \epsilon/2$ en $g_n(\omega) \rightarrow g(\omega)$ gelykmatig op $\Omega \setminus N_g^\epsilon$. Dus konvergeer $(f_n + \alpha g_n)$ gelykmatig na $f + \alpha g$ op $N_\epsilon := N_f^\epsilon \cup N_g^\epsilon$ en $\rho(N_\epsilon) \leq \rho(N_f^\epsilon) + \rho(N_g^\epsilon) < \epsilon$. Dit wys dat $(f_n + \alpha g_n)$ ρ -byna gelykmatig na $f + \alpha g$ konvergeer. $\square$

3.2 Borel -, Σ - en ρ -meetbare funksies

In die vorige afdeling het ons na verskillende maniere gekyk waarop 'n ry funksies kan konvergeer. In hierdie afdeling kyk ons na verskillende tipes trapfunksies en daarna na verskillende meetbare funksies. Ons begin met die tipe meetbaarheid wat in die klassieke geval gebruik word. Die abstrakte Lebesgue integraal word gedefinieer vir reëlwaardige funksies $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $f^{-1}(B) \in \Sigma$ vir enige Boreldeelversameling $B \subseteq \mathbb{R}$. In die algemeen noem ons 'n funksie wat aan hierdie voorwaarde voldoen 'n Borel meetbare funksie.

Definisie 3.2.1. (Borel meetbare funksie)

Ons noem die vektorfunksie $f : \Sigma \rightarrow X$ Borel meetbaar as $f^{-1}(B) \in \Sigma$ vir elke Boreldeelversameling $B \subseteq X$.

Ons dui die Borel deelversamelings van X deur $\mathcal{B}(X)$ aan. Aangesien die Borel σ -algebra deur die oop deelversamelings voortgebring word, is f Borel meetbaar as en slegs as $f^{-1}(Z) \in \Sigma$ vir enige oop deelversameling $Z \subseteq X$. As (f_n) 'n ry Borel meetbare skalaarfunksies is, dan is $\sup_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, as dit bestaan, almal Borel meetbaar.

Definisie 3.2.2. (Σ -trapfunksie)

'n Vektorwaardige funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word 'n Σ -trapfunksie genoem as f die vorm

$$f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$$

het, waar $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ en $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \subseteq \Sigma$ 'n eindige disjunkte verdeling van Ω is.

'n Σ -trapfunksie is dus 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ wat slegs eindig veel verskillende waardes x_i aanneem en waar $\{f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2), \dots, f^{-1}(x_r)\} = (E_i) \in D^\Sigma$. [[As 'n trapfunksie geskryf word as $\sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ waar $x_i \neq 0$ vir alle i , dan kan ons altyd die term $0\mathcal{I}_F$ waar $F = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^r E_i$ byvoeg sonder om die trapfunksie te verander. In hierdie geval is $\{E_1, E_2, \dots, E_r, F\}$ 'n eindige disjunkte verdeling van Ω .]]

Ons dui die versameling van alle Σ -trapfunksies deur $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ aan. Die funksie $\mathbf{0} = \mathcal{I}_\emptyset$ (waar $\mathbf{0}$ die nulfunksie is) is in $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ en as $f, g \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$ en $\alpha \in \mathbb{K}$, dan is $f + \alpha g \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$. Dit is dus vinnig om te sien dat $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ 'n vektorruimte is. As $f : \Omega \rightarrow X$ definieer ons die supremumnorm van f deur $\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|$ waar $\|f(\omega)\|$ die norm van die element $f(\omega) \in X$ is. In die algemeen sal ons die notasie $\|f\|_E$ gebruik om die norm van f oor 'n versameling $E \in \Sigma$ aan te dui. Hiermee bedoel ons

$$\|f\|_E = \sup_{\omega \in E} \|f(\omega)\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega) \mathcal{I}_E(\omega)\| = \|f \mathcal{I}_E\|.$$

Dus is $\|f\| = \|f\|_\Omega$. Tesame met hierdie norm is $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ 'n normeerde ruimte.

Die draer van f is die versameling $C_f = \{\omega \in \Omega : \|f(\omega)\| > 0\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\}$. Die draer van 'n Σ -trapfunksie soos hierbo is dus die vereniging van die versamelings E_i waarvoor $x_i \neq 0$. Gevolglik is $C_f \in \Sigma$ vir enige $f \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$.

Proposisie 3.2.3.

Enige Σ -trapfunksie is Borel meetbaar.

Bewys. Laat $f \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$, sê $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$. Vir enige oop deelversameling $Z \subseteq X$ is $f^{-1}(Z)$ óf leeg óf die vereniging van sommige van die versamelings E_i . In albei gevalle is $f^{-1}(Z) \in \Sigma$. Gevolglik is f Borel meetbaar. $\square$

In die aanloop tot die definisie van die Dobrakov integraal, maak Dobrakov gebruik van die volgende begrip van meetbaarheid. Om onderskeid met ander meetbaarheidsbegrippe te tref noem ons dit Σ -meetbaarheid.

Definisie 3.2.4. (Σ -meetbare funksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word Σ -meetbaar genoem as daar 'n ry Σ -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat $f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$.

Die konsep van Σ -meetbaarheid behels dus die puntsgewyse konvergensie van Σ -trapfunksies. Ons dui die vektorruimte van alle Σ -meetbare funksies $f : \Omega \rightarrow X$ deur $\mathcal{M}(\Sigma, X)$ aan. [[As $f, g \in \mathcal{M}(\Sigma, X)$ en $\alpha \in \mathbb{K}$, dan is $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ en $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ waar $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$, maar dan is $(f_n + \alpha g_n) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$ en $f_n + \alpha g_n \rightarrow f + \alpha g$, dus $f + \alpha g \in \mathcal{M}(\Sigma, X)$.]]

Tot dusver was daar geen maat ter sprake in ons bespreking oor meetbaarheid nie. Laat ρ nou 'n σ -subadditiewe submaat op (Ω, Σ) wees. Op hierdie stadium neem ons nog nie aan dat ρ eindig of σ -eindig is nie.

Definisie 3.2.5. (ρ -trapfunksie)

'n Σ -meetbare trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ word 'n ρ -trapfunksie of anders 'n ρ -integreerbare trapfunksie genoem as $\rho(E_i) < \infty$ vir elke versameling $E_i = f^{-1}(x_i)$ waarvoor $x_i \neq 0$.

Ons dui die vektorruimte van alle ρ -trapfunksies deur $\mathcal{S}_\rho(\Sigma, X)$ aan. [[As f en g twee ρ -trapfunksie is, dan kan ons f en g met betrekking tot dieselfde eindige disjunkte verdeling skryf. Aangesien ρ monotoon is volg dat $f + \alpha g$ weer 'n ρ -trapfunksie is vir enige $\alpha \in \mathbb{K}$]]. Per definisie is enige ρ -trapfunksie ook 'n Σ -trapfunksie, dus $\mathcal{S}_\rho(\Sigma, X) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$. As $\rho(\Omega) < \infty$, dan is enige Σ -trapfunksie ook 'n ρ -trapfunksie. Met ander woorde $\mathcal{S}_\rho(\Sigma, X) = \mathcal{S}(\Sigma, X)$ as $\rho(\Omega) < \infty$.

Definisie 3.2.6. (Tipe I ρ -meetbare funksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word tipe I ρ -meetbaar genoem (ons skryf (I) ρ -meetbaar) as daar 'n ry ρ -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat (f_n) ρ -byna oral na f konvergeer.

Definisie 3.2.7. (Tipe II ρ -meetbare funksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word tipe II ρ -meetbaar genoem (ons skryf (II) ρ -meetbaar) as daar 'n ry ρ -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat (f_n) in ρ -maat na f konvergeer.

Definisie 3.2.8. (Tipe III ρ -meetbare funksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word tipe III ρ -meetbaar genoem (ons skryf (III) ρ -meetbaar) as daar 'n ry ρ -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat (f_n) ρ -byna gelykmatig na f konvergeer.

Die konsep van ρ -meetbaarheid behels dus konvergensie van ρ -trapfunksies. By tipe I vind konvergensie ρ -byna oral, by tipe II in ρ -maat en by tipe III ρ -byna gelykmatig plaas. Ons dui die vektorruimtes van tipe I, tipe II en tipe III ρ -meetbare funksies $f : \Omega \rightarrow X$ deur $\mathcal{M}_\rho^1(\Sigma, X)$, $\mathcal{M}_\rho^2(\Sigma, X)$ en $\mathcal{M}_\rho^3(\Sigma, X)$ onderskeidelik aan. [[Laat $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{S}_\rho(\Sigma, X)$ telkens rye trapfunksies wees wat na meetbare funksie f en g konvergeer en laat $\alpha \in \mathbb{K}$. Dan is elke funksie $f_n + \alpha g_n$ weer 'n ρ -trapfunksie en volgens proposie 3.1.12 konvergeer $(f_n + \alpha g_n)$ na $f + \alpha g$

op dieselfde wyse waarop (f_n) en (g_n) na f en g onderskeidelik konvergeer. Dus is $f + \alpha g \in \mathcal{M}_\rho^1(\Sigma, X)$, $\mathcal{M}_\rho^2(\Sigma, X)$ of $\mathcal{M}_\rho^3(\Sigma, X)$ as $f, g \in \mathcal{M}_\rho^1(\Sigma, X)$, $\mathcal{M}_\rho^2(\Sigma, X)$ of $\mathcal{M}_\rho^3(\Sigma, X)$.]] In die geval waar iets vir enige tipe ρ -meetbare funksie geld, sal ons net praat van 'n ρ -meetbare funksie.

Vanuit die verskillende verbande wat tussen die tipes konvergensie bestaan (stellings 3.1.7, 3.1.8 en 3.1.10), kan ons die volgende verband tussen die verskillende tipes ρ -meetbare funksies aflei.

Proposisie 3.2.9.

Beskou 'n σ -subadditewe submaat $\rho : \Sigma \rightarrow X$ en 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$. Beskou die volgende bewerings:

1. f is (I) ρ -meetbaar;
2. f is (II) ρ -meetbaar;
3. f is (III) ρ -meetbaar.

Dan geld $2 \iff 3 \Rightarrow 1$. As ρ kontinu is en $\rho(\Omega) < \infty$, dan geld $1 \Rightarrow 3$.

Bewys. Neem deurgaans aan dat (f_n) 'n ry ρ -trapfunksies is.

$3 \Rightarrow 2$. As f 'n (III) ρ -meetbare funksie is, dan konvergeer (f_n) ρ -byna gelykmatig na f . Volgens stelling 3.1.7(1) konvergeer (f_n) in ρ -maat na f . Dus is f 'n (II) ρ -meetbare funksie.

$2 \Rightarrow 3$. As f 'n (II) ρ -meetbare funksie is, dan konvergeer (f_n) in ρ -maat na f . Volgens stelling 3.1.8 bestaan daar 'n deelry (f_{n_k}) (wat dus 'n ry ρ -trapfunksies is) wat ρ byna gelykmatig na f konvergeer. Dus is f 'n (III) ρ -meetbare funksie.

$3 \Rightarrow 1$. As f 'n (III) ρ -meetbare funksie is, dan konvergeer (f_n) ρ -byna gelykmatig na f . Vanuit stelling 3.1.7 volg dat (f_n) ρ -byna oral na f konvergeer. Dus is f 'n (I) ρ -meetbare funksie.

$1 \Rightarrow 3$ Neem aan ρ is kontinu en $\rho(\Omega) < \infty$. As f 'n (I) ρ -meetbare funksie is, dan konvergeer (f_n) ρ -byna oral na f . Volgens Egoroff se stelling (stelling 3.1.10), konvergeer (f_n) ρ -byna gelykmatig na f . Dus is f (III) ρ -meetbaar. $\square$

Proposisie 3.2.10.

Beskou 'n willekeurige funksionaal $x^* \in X^*$. As $f : \Omega \rightarrow X$ 'n Σ -trapfunksie, ρ -trapfunksie of Borel meetbare trapfunksie is, dan geld dieselfde vir $\|f\|$ en x^*f . Gevolglik, as f 'n Borel, Σ - of ρ -meetbare funksie is, dan geld dieselfde vir $\|f\|$ en x^*f .

Bewys. Beskou 'n vaste $x^* \in X^*$ en 'n trapfunksie

$$f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}.$$

1a. As f Borel meetbaar is, dan is $f^{-1}(Z) \in \Sigma$ vir enige oop deelversameling $Z \subseteq X$. Aangesien die norm op X en x^* beide kontinue afbeeldings is, volg vir die saamgestelde funksies dat $\|f\|^{-1}(S) \in \Sigma$ en $(x^*f)^{-1}(S) \in \Sigma$ vir enige oop deelversameling $S \subseteq \mathbb{R}$. Gevolglik is $\|f\|$ en x^*f Borel meetbaar.

2a. As f 'n Σ -trapfunksie is, dan is $(E_i) \in D^\Sigma$. Aangesien die versamelings E_i disjunk is, volg dat

$$\|f\| = \sum_{i=1}^r \|x_i\| \mathcal{I}_{E_i} \quad \text{en} \quad x^*f = \sum_{i=1}^r x^*(x_i) \mathcal{I}_{E_i}.$$

Beide $\|f\|$ en x^*f het dus die korrekte vorm vir 'n reëelwaardige Σ -trapfunksie.

3a. As f 'n ρ -trapfunksie is, dan is $(E_i) \in D^\Sigma$ en $\rho(E_i) < \infty$ vir elke versameling E_i waarvoor $x_i \neq 0$. Aangesien $\|x_i\| = 0$ en $x^*x_i = 0$ as $x_i = 0$, volg dat $\|f\|$ en x^*f weer reëelwaardige ρ -trapfunksies is.

Beskou nou 'n algemene funksie $f : \Omega \rightarrow X$.

1b. As f Borel meetbaar is, dan volg dat $\|f\|$ en x^*f Borel meetbaar is net soos in die trapfunksie geval.

2b. As f 'n Σ -meetbare funksie is dan bestaan daar 'n ry Σ -trapfunksies (f_n) wat oral na f konvergeer. Maar dan konvergeer die rye Σ -trapfunksies $(\|f_n\|)$ en (x^*f_n) oral na $\|f\|$ en x^*f . Gevolglik is $\|f\|$ en x^*f albei Σ -meetbare funksies.

3b. As f een van die tipes ρ -meetbare funksies is, dan bestaan daar 'n ry ρ -trapfunksies wat op een van die drie maniere na f konvergeer. Volgens proposisie 3.1.11 konvergeer die rye ρ -trapfunksies $(\|f_n\|)$ en (x^*f_n) op dieselfde manier na $\|f\|$ en x^*f . Gevolglik is $\|f\|$ en x^*f weer 'n ρ -meetbare funksie. $\square$

Vir reëelwaardige funksies het ons die volgende verband tussen die meetbaarheidsbegrippe. Ons neem nou aan dat ρ 'n σ -eindige submaat is. Dit beteken dat daar 'n ry versamelings (Ω_n) bestaan sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\rho(\Omega_n) < \infty$. Ons sê ρ is volledig as $N \in \Sigma$ met $\rho(N) = 0$ impliseer dat $M \in \Sigma$ vir enige $M \subseteq N$.

Proposisie 3.2.11.

Laat ρ 'n σ -eindige σ -subadditiewe submaat op (Ω, Σ) wees. Beskou die volgende bewerings vir 'n reëelwaardige funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

1. f is Borel meetbaar;

2. f is Σ -meetbaar;

3a. f is (I) ρ -meetbaar;

3b. f is (II) ρ -meetbaar;

3c. f is (III) ρ -meetbaar.

Dan geld $1 \iff 2 \Rightarrow 3a$ en $3b \iff 3c \Rightarrow 3a$. As ρ volledig is, dan geld $3a \Rightarrow 1$. As ρ kontinu en eindig is, dan geld $3a \Rightarrow 3c$.

Bewys. Neem aan ρ is σ -eindig. Laat (Ω_n) 'n ry meetbare versamelings wees waarvoor dit geld dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\rho(\Omega_n) < \infty$ vir alle n .

$1 \Rightarrow 2$. As f Borel meetbaar is, dan is beide die positiewe deel f^+ en die negatiewe deel f^- van f ook Borel meetbaar. Aangesien f^+ en f^- positiewe funksies

is, bestaan daar rye Σ -trapfunksies (g_n) en (h_n) sodanig dat $g_n(\omega) \uparrow f^+(\omega)$ en $h_n(\omega) \uparrow f^-(\omega)$ vir alle ω . Stel $f_n = g_n - h_n$ vir elke n . Dan is (f_n) 'n ry Σ -trapfunksies wat oral na $f^+ - f^- = f$ konvergeer. Dus is f 'n Σ -meetbare funksie.

$2 \Rightarrow 1$. As f 'n Σ -meetbare funksie is, dan bestaan daar 'n ry Σ -trapfunksies (f_n) wat oral na f konvergeer. Maar elke Σ -trapfunksie f_n is ook Borel meetbaar. Aangesien f die limiet van Borel meetbare funksies is, is f ook self Borel meetbaar.

$2 \Rightarrow 3a$. As f 'n Σ -meetbare funksie is, dan bestaan daar 'n ry Σ -trapfunksies (g_n) wat oral na f konvergeer. Stel $f_n = g_n \mathcal{I}_{\Omega_n}$ vir elke n . Dan is elke f_n 'n ρ -trapfunksie en (f_n) konvergeer oral (en dus ook ρ -byna oral) na f . Dus is f 'n (I) ρ -meetbare funksie.

$3a \Rightarrow 1$. Neem aan ρ is volledig. As f 'n (I) ρ -meetbare funksie is, dan bestaan daar 'n ry ρ -trapfunksies (f_n) en 'n ρ -nulversameling N sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Nou, elke trapfunksie $f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ is 'n Σ -trapfunksie en is dus ook Borel meetbaar. Die ry Borel meetbare funksies $(f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N})$ konvergeer oral na $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$. Die funksie $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ is dus Borel meetbaar en ρ -byna oral gelyk aan f . Aangesien ons aanneem dat ρ volledig is, volg dat f self ook Borel meetbaar is.

Die res van die resultaat volg direk uit proposisie 3.2.9. $\square$

Ons begin nou te ondersoek onder watter voorwaardes 'n $f : \Omega \rightarrow X$ meetbaar in een of ander sin is. Ons kyk eerstens na Σ -meetbare funksies.

'n Deelruimte $\Psi \subseteq X^*$ word normierend vir $S \subseteq X$ genoem as

$$\|x\| = \sup_{x^* \in \Psi} \frac{|x^*x|}{\|x^*\|} = \sup_{x^* \in \Psi, \|x^*\|=1} |x^*x|$$

vir elke $x \in S$. Die volgende lemma wys dat as S separabel is, ons 'n ry eenheidsvektore uit Ψ kan kry wat normierend vir S is. Die lemma word gebruik in hieropvolgende meetbaarheidstellings.

Lemma 3.2.12.

As $S \subseteq X$ 'n separabele deelruimte van X is en $\Psi \subseteq X^*$ 'n normerende deelruimte vir S is, dan bestaan daar 'n ry $(x_n^*) \subseteq \Psi$ sodanig dat

$$\|x_n^*\| = 1 \quad \text{en} \quad \|x\| = \sup_n |x_n^*x|$$

vir elke $x \in S$.

Bewys. Aangesien $S \subseteq X$ separabel is, kan ons 'n digte ry $(x_n) \subseteq S$ kry. Aangesien Ψ normierend vir S is, volg dat ons vir elke n en enige $\epsilon > 0$ 'n $x_\epsilon^* \in \Psi$ kan kry sodanig dat $\|x_\epsilon^*\| = 1$ en $|x_\epsilon^*x_n| > \|x_n\| - \epsilon$. In die besonder kan ons vir elke n 'n x_n^* kry sodanig dat $\|x_n^*\| = 1$ en $|x_n^*x_n| \geq (1 - \frac{1}{n})\|x_n\|$. Ons wys nou dat hierdie ry (x_n^*) normierend vir S is. Beskou 'n willekeurige $x \in S$ en laat $\epsilon > 0$. Kies n_ϵ groot genoeg dat $\frac{1}{n_\epsilon} \leq \epsilon$ en $\|x - x_{n_\epsilon}\| < \epsilon$ (en dus ook $\|x\| \leq \|x_{n_\epsilon}\| + \epsilon$). Dan kry ons

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)\|x\| &\leq \left(1 - \frac{1}{n_\epsilon}\right) \|x\| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n_\epsilon}\right) \|x_{n_\epsilon}\| + \left(1 - \frac{1}{n_\epsilon}\right) \epsilon \leq |x_{n_\epsilon}^*x_{n_\epsilon}| + \epsilon \leq |x_{n_\epsilon}^*x| + 2\epsilon \end{aligned}$$

$[|x_{n_\epsilon}^* x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon}^* x| \leq \|x_{n_\epsilon}^*\| \|x_{n_\epsilon} - x\| \leq 1\epsilon$ en gevolglik is $|x_{n_\epsilon}^* x_{n_\epsilon}| \leq |x_{n_\epsilon}^* x| + \epsilon$]]. Aangesien $\epsilon > 0$ willekeurig is, volg dat $\|x\| \leq \sup_n |x_n^* x|$. Omgekeerd is $\sup_n |x_n^* x| \leq \sup_{x^* \in \Psi, \|x^*\|=1} |x^* x| = \|x\|$. $\square$

Definisie 3.2.13. (Separabelwaardige funksie)(Stelling 2 p.42,[8])

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word separabelwaardig genoem as $f(\Omega)$ 'n separabele deelversameling van X is.

Stelling 3.2.14. (Stelling 1.5 p.4, [25])

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ is Σ -meetbaar as en slegs as

1. f separabelwaardig is;
2. daar 'n normerende deelruimte $\Psi \subseteq X^*$ vir $f(\Omega)$ bestaan sodanig dat $x^* f$ Borel meetbaar is vir elke $x^* \in \Psi$.

Bewys. As f Σ -meetbaar is, dan bestaan daar 'n ry meetbare trapfunksies (f_n) wat oral op Ω na f konvergeer.

Elke versameling $f_n(\Omega)$ is eindig en $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)$ is aftelbaar. Vir enige $\omega \in \Omega$ is $f(\omega)$ die limiet van die ry $(f_n(\omega)) \subseteq A$. Dus is $f(\omega) \in \overline{A}$ vir alle ω , met ander woorde, $f(\Omega) \subseteq \overline{A}$. Maar $\overline{A}$ is separabel, dus is f self ook separabelwaardig.

Tweedens volg vanuit proposisies 3.2.10 en 3.2.11 dat $x^* f$ vir elke $x^* \in X^*$ 'n Borel meetbare funksie is.

Omgekeerd, aangesien $f(\Omega)$ separabel is, kan ons 'n ry $(x_n) \subseteq f(\Omega)$ kry wat dig in $f(\Omega)$ is en volgens lemma 3.2.12 kan ons 'n ry $(x_n^*) \subseteq \Psi$ kry sodanig dat

$$\|x_n^*\| = 1 \quad \text{en} \quad \|x\| = \sup_n |x_n^* x|$$

vir elke $x \in f(\Omega)$. Neem nou 'n vaste n en beskou die punte $x_1, x_2, \dots, x_n$. Aangesien ons net 'n eindige aantal punte het, bestaan die minimum

$$\min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\|$$

vir elke $\omega \in \Omega$. Die minimum mag egter dalk by meer as een van die punte i voorkom. Laat k_ω^n die kleinste natuurlike getal wees waar dit gebeur, met ander woorde, laat

$$k_\omega^n := \min \left\{ 1 \leq j \leq n : \|f(\omega) - x_j\| = \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| \right\}.$$

Vir elke $\omega \in \Omega$ is k_ω^n uniek bepaal. Ons kan dus 'n trapfunksie $f_n : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ definieer deur $f_n(\omega) := x_{k_\omega^n}$. Let op dat as $m > n$, dan is

$$\|f(\omega) - x_{k_\omega^m}\| = \min_{1 \leq i \leq m} \|f(\omega) - x_i\| \leq \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| = \|f(\omega) - x_{k_\omega^n}\|.$$

Vir 'n $\omega \in \Omega$ en 'n $1 \leq k \leq n$ is $f_n(\omega) = x_k$ as en slegs as

1. $\|f(\omega) - x_k\| = \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\|$;
2. k die kleinste $1 \leq j \leq n$ is waarvoor $\|f(\omega) - x_j\| = \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\|$, dit wil sê, $\|f(\omega) - x_j\| > \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\|$ vir elke $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Dus, vir elke $1 \leq k \leq n$, is $f_n^{-1}(x_k) = \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) = x_k\} = A_k^{(n)} \cap B_k^{(n)} = E_k^{(n)}$, waar

$$A_k^{(n)} = \left\{ \omega \in \Omega : \|f(\omega) - x_k\| = \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| \right\}$$

$$B_k^{(n)} = \left\{ \omega \in \Omega : \|f(\omega) - x_j\| > \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| \text{ vir elke } j = 1, 2, \dots, k-1 \right\}.$$

Ons kan dus die trapfunksie f_n skryf as

$$f_n = \sum_{k=1}^n x_k \mathcal{I}_{E_k^{(n)}}.$$

Nou vir elke $1 \leq k \leq n$ is $h_k(\omega) := \|f(\omega) - x_k\| = \sup_n |x_n^*(f(\omega) - x_k)|$ 'n Borel meetbare funksie. [[Elke skalaar funksie $x_n^*(f(\omega) - x_k) = x^*f(\omega) - x^*x_k \mathcal{I}_\Omega$ is 'n Borel meetbare funksie, want per aanname is elke x_n^*f Borel meetbaar. Gevolglik is elke $|x_n^*(f(\omega) - x_k)|$ en dus ook h_k Borel meetbaar.]] Dus is $\{\omega \in \Omega : h_k(\omega) = \alpha\} \in \Sigma$ vir elke $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\{\omega \in \Omega : h_j(\omega) > \alpha\} \in \Sigma$ vir elke $\alpha \in \mathbb{R}$ en elke $j = 1, 2, \dots, k-1$. Dit volg dat al die versamelings $A_k^{(n)}, B_k^{(n)}$ en dus ook al die versamelings $E_k^{(n)}, 1 \leq k \leq n$, in Σ is. Dus is f_n 'n Σ -trapfunksie. Vir elke vaste $\omega \in \Omega$ en enige $\epsilon > 0$ kan ons 'n N_ϵ kry sodanig dat $\|f(\omega) - x_{N_\epsilon}\| < \epsilon$ en $x_{N_\epsilon} = x_{k_\omega^{N_\epsilon}} = f_{N_\epsilon}(\omega)$. Vir alle $n \geq N_\epsilon$ is

$$\|f(\omega) - f_n(\omega)\| = \|f(\omega) - x_{k_\omega^n}\| \leq \|f(\omega) - x_{k_\omega^{N_\epsilon}}(\omega)\| < \epsilon.$$

Die ry (f_n) is dus 'n ry Σ -trapfunksies wat oral na f konvergeer. $\square$

As 'n gevolg kry ons dat die ruimte $\mathcal{M}(\Sigma, X)$ geslote is onder die neem van puntsgewyse limiete.

Gevolg 3.2.15. (Gevolg 1.7 p.5, [25])

As (f_n) 'n ry Σ -meetbare funksies is sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$, dan is f 'n Σ -meetbare funksie

Bewys. Stelling 3.2.14 impliseer dat elkeen van die versamelings $f_n(\Omega)$ separabel is. Aangesien f_n oral op Ω na f konvergeer, is

$$f(\Omega) \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)}.$$

Gevolglik is f separabelwaardig. Vanuit proposisies 3.2.10 en 3.2.11 volg dat elkeen van die funksies x^*f_n en dus ook x^*f Borel meetbaar is vir alle $x^* \in X^*$. Stelling 3.2.14 verseker dat f 'n Σ -meetbare funksie is. $\square$

Gevolg 3.2.16. (Gevolg 1.7 p.5, [25])

As $f : \Omega \rightarrow X$ 'n Σ -meetbare funksie is en $T : X \rightarrow Y$ 'n kontinue operator is, dan is $Tf : \Omega \rightarrow Y$ 'n Σ -meetbare funksie.

Bewys. Laat $f_n : \Omega \rightarrow X$ 'n ry Σ -trapfunksies wees wat oral na f konvergeer. Sê

$$f_n = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$$

waar $(E_i^{(n)}) \in D^\Sigma$. Laat $\omega \in \Omega$, sê $\omega \in E_k^{(n)}$ waar $1 \leq k \leq r^{(n)}$. Dan is

$$Tf_n(\omega) = T \left(\sum_{i=1}^{r^{(n)}} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}(\omega) \right) = Tx_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{r^{(n)}} Tx_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}(\omega)$$

en $x_k^{(n)} \rightarrow f(\omega)$ as $n \rightarrow \infty$. Ons kan dit vir enige $\omega \in \Omega$ doen. Ons sien dus dat elke Tf_n 'n Y -waardige Σ -trapfunksie is en vanuit die kontinuïteit van T volg dat $Tf_n(\omega) \rightarrow Tf(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$. Dus is Tf 'n Σ -meetbare funksie. $\square$

Vanuit stelling 3.2.14 kry ons die volgende verband tussen Borel meetbare funksies en Σ -meetbare funksies.

Stelling 3.2.17. (*Proposisie 1.8 p.5, [25]*)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ is Σ -meetbaar as en slegs as

1. f separabelwaardig is;
2. f Borel meetbaar is.

Bewys. Neem aan f is Σ -meetbaar. Laat (f_n) 'n ry Σ -trapfunksies wees wat oral na f konvergeer en laat $Z \subseteq X$ 'n oop deelversameling wees. Volgens stelling 3.2.14 is f separabelwaardig. Tweedens, laat $B(x, r)$ die oop bol rondom 'n punt $x \in X$ met straal $r > 0$ wees. Stel $Z_k = \{x \in Z : B(x, \frac{1}{k}) \subseteq Z\}$. Elke Z_k is 'n oop versameling. Aangesien Z oop is en f_n oral op Ω na f konvergeer, is $f(\omega) \in Z$ as en slegs as daar $N \in \mathbb{N}$ bestaan sodanig dat $f_n(\omega) \in Z$ vir alle $n \geq N$. Maar dit geld as en slegs as daar 'n k bestaan sodanig dat $f_n(\omega) \in Z_k$ vir alle $n \geq N$. Dus is

$$\begin{aligned} f^{-1}(Z) &= \{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} : f_n(\omega) \in Z_k \ \forall n \geq N\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} f_n^{-1}(Z_k) \right) \right). \end{aligned}$$

Maar elke Σ -trapfunksie f_n is ook Borel meetbaar, dus is elke versameling $f_n^{-1}(Z_k)$ in Σ . Aangesien $f^{-1}(Z)$ die resultaat van aftelbaar veel versamelingsbewerkings met die versamelings $f_n^{-1}(Z_k)$ is, volg dat $f^{-1}(Z) \in \Sigma$. Dus is f Borel meetbaar.

Andersom, vanuit 2 is x^*f Borel meetbaar vir elke $x^* \in X^*$. Dus, tesame met 1 kan ons stelling 3.2.14 toepas en dit lewer dat f 'n Σ -meetbare funksie is. $\square$

Vir reëelwaardige funksies f het ons gesien dat die konsepte van Borel- en Σ -meetbaarheid ooreenstem. Let op dat die reële getalle separabel is. Vanuit stelling 3.2.17 volg dat dit in die algemeen ook waar is.

Gevolg 3.2.18.

As die Banach ruimte X separabel is, dan is $f : \Omega \rightarrow X$ 'n Σ -meetbare funksie as en slegs as f Borel meetbaar is.

Ons sê 'n funksie f is ρ -byna oral Σ -meetbaar as daar 'n Σ -meetbare funksie g bestaan sodanig dat $f = g$ ρ -byna oral. Dus is f ρ -byna oral Σ -meetbaar as daar 'n ry Σ -trapfunksies (f_n) en 'n ρ -nulversameling N bestaan sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}(\omega) = g(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$. Die volgende proposisie wys dat (I) ρ -meetbaarheid en ρ -byna oral Σ -meetbaarheid ooreenstem as ρ 'n σ -eindige submaat is.

Proposisie 3.2.19. (*Proposisie 1.10 p.6, [25]*)

As ρ 'n σ -eindige submaat is, dan is die funksie $f : \Omega \rightarrow X$ 'n $(I)\rho$ -meetbare funksie as en slegs as f ρ -byna oral Σ -meetbaar is.

Bewys. Neem aan f is 'n $(I)\rho$ -meetbare funksie. Dan bestaan daar per definisie 'n ρ -nulversameling $N \in \Sigma$ sodanig dat $\rho(N) = 0$ en $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ waar (f_n) 'n ry ρ -trapfunksies is. Dan is $(f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N})$ 'n ry Σ -trapfunksies en $f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}(\omega) \rightarrow f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$. Dit wys dat f 'n ρ -byna oral Σ -meetbare funksie is.

Andersom, neem aan f is 'n ρ -byna oral Σ -meetbare funksie. Sê $f_n(\Omega) \rightarrow f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$, waar (f_n) 'n ry Σ -trapfunksies is en $\rho(N) = 0$. Laat (Ω_n) 'n ry wees waarvoor $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\rho(\Omega_n) < \infty$ vir alle n . Dan is elke $f_n \mathcal{I}_{\Omega_n}$ 'n ρ -trapfunksie en $(f_n \mathcal{I}_{\Omega_n})$ konvergeer ρ -byna oral na f . $\square$

Gevolg 3.2.20.

As ρ kontinu is en $\rho(\Omega) < \infty$ dan is die volgende bewerings ekwivalent:

1. f is Σ -meetbaar;
2. f is $(I)\rho$ -meetbaar;
3. f is $(II)\rho$ -meetbaar;
4. f is $(III)\rho$ -meetbaar.

Bewys. Aangesien ρ ook σ -eindig is as $\rho(\Omega) < \infty$, volg die aanspraak direk vanuit proposisies 3.2.19 en 3.2.9. $\square$

Definisie 3.2.21. (Swak ρ -meetbaar, Ψ - ρ -meetbaar, swak*- ρ -meetbaar)
(Definisie 1 p.41, [8])

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word swak ρ -meetbaar genoem as die skalaarfunksie x^*f 'n ρ -meetbare funksie is vir elke $x^* \in X^*$. In die algemeen as $\Psi \subseteq X^*$ dan word f Ψ - ρ -meetbaar genoem as x^*f 'n ρ -meetbare funksie is vir elke $x^* \in \Psi$. As $f \rightarrow X^*$ X -meetbaar is (waar X as 'n deelruimte van X^{**} beskou word), dan sê ons f is swak*- ρ -meetbaar.

Ons sal byvoorbeeld skryf f is swak $(I)\rho$ -meetbaar, Ψ -(II) ρ -meetbaar of swak*-(III) ρ -meetbaar.

Enige ρ -meetbare funksie is ook 'n swak ρ -meetbare funksie van dieselfde tipe. [[As (f_n) 'n ry ρ -trapfunksies is wat na f konvergeer, dan konvergeer die ry skalaar ρ -trapfunksies (x^*f_n) vir alle $x^* \in X^*$ na x^*f op dieselfde wyse (sien proposisie 3.1.11).]] Vanuit proposisies 3.2.10 en 3.2.11 volg dat as ρ 'n volledige σ -eindige σ -subadditiewe submaat is en f swak ρ -meetbaar is, dat x^*f Borel meetbaar is vir elke $x^* \in X^*$.

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word ρ -byna separabelwaardig genoem as daar 'n ρ -nulversameling $N \in \Sigma$ bestaan sodanig dat $f(\Omega \setminus N)$ 'n separabele deelversameling van X is.

Stelling 3.2.22. ((I) ρ -meetbaarheid stelling) (*Stelling 1.11 p.7, [25]*)

As ρ 'n volledige σ -eindige σ -subadditiewe submaat is, dan is $f : \Omega \rightarrow X$ $(I)\rho$ -meetbaar as en slegs as

1. f ρ -byna separabelwaardig is;

2. daar 'n normerende deelversameling $\Psi \subseteq X^*$ bestaan sodanig dat f Ψ -(I) ρ -meetbaar is.

Bewys. Neem aan f is (I) ρ -meetbaar. Dan is f ρ -byna oral Σ -meetbaar (proposisie 3.2.19). Sê $f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ is Σ -meetbaar waar $\rho(N) = 0$. Stelling 3.2.14 gee dan dat $f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ separabelwaardig is en dat daar 'n normerende deelruimte $\Psi \subseteq X^*$ bestaan sodanig dat $x^*f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ Borel meetbaar is vir elke $x^* \in \Psi$. Maar dan is $f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}(\Omega) = f(\Omega \setminus N)$ 'n separabele deelversameling van X . Die funksie f is dus ρ -byna separabelwaardig. Tweedens is die skalaarfunksies $x^*f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ almal Σ -meetbaar (proposisie 3.2.11). Proposisie 3.2.19 gee nou dat x^*f 'n (I) ρ -meetbare funksie is vir elke $x^* \in \Psi$. Dit beteken dat f 'n Ψ -(I) ρ -meetbare funksie is.

Andersom, as voorwaardes 1 en 2 geld, dan bestaan daar 'n ρ -nulversameling $N \in \Sigma$ sodanig dat $f(\Omega \setminus N)$ separabel is. Laat (x_n) 'n digte ry in $f(\Omega \setminus N)$ wees. Volgens lemma 3.2.12 kan ons 'n ry $(x_n^*) \subseteq \Psi$ kry sodanig dat

$$\|x_n^*\| = 1 \quad \text{en} \quad \|x\| = \sup_n |x_n^*x|$$

vir elke $x \in f(\Omega \setminus N)$. Definieer die reëlwaardige funksie h op die hele Ω deur

$$h(\omega) = \sup_n |x_n^*(f(\omega))|$$

vir $\omega \in \Omega$. Aangesien ρ volledig is, is h 'n Borel meetbare funksie [[h is die supremum van die funksies $|x_n^*f|$ en elkeen van die funksies x_n^*f is ρ -meetbaar en dus ook Borel meetbaar volgens proposisie 3.2.11]]. Verder is $h(\omega) = \|f\|(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ en dus is $\|f\| = h\mathcal{I}_{\Omega \setminus N} + \|f\|\mathcal{I}_N$ 'n Borel meetbare funksie [[h is Borel meetbaar en $\|f\|\mathcal{I}_N$ is ook Borel meetbaar want ρ is volledig]]. Definieer nou

$$h_n(\omega) = f(\omega) - x_n$$

vir elke n en alle $\omega \in \Omega$. Dan is elke h_n 'n Ψ -(I) ρ -meetbare funksie. [[Vir elke $x^* \in \Psi$ is $x^*(h(\omega)) = x^*(f(\omega)) - x^*(x_n)\mathcal{I}_\Omega$, wat 'n skalaar (I) ρ -meetbare funksie is.]] Verder is elkeen van die versamelings $h_n(\Omega \setminus N)$ 'n separabele versameling. [[Die versameling $Y = \{y_m := x_m - x_n : m \in \mathbb{N}\}$ is aftelbaar en vir elke $\epsilon > 0$ en vir elke $\omega \in \Omega \setminus N$ bestaan daar 'n $m = N_\epsilon$ sodanig dat $\|f(\omega) - x_{N_\epsilon}\| < \epsilon$. Dus is

$$\|h_n(\omega) - y_{N_\epsilon}\| = \|(f(\omega) - x_n) - (x_{N_\epsilon} - x_n)\| = \|f(\omega) - x_{N_\epsilon}\| < \epsilon.$$

Die aftelbare versameling Y is dus dig in $h_n(\Omega \setminus N)$.]] Maar dan voldoen elke funksie h_n aan presies dieselfde voorwaardes waaraan f voldoen [[h_n is Ψ -(I) ρ -meetbaar en ρ -byna separabelwaardig]] en kan ons net soos in die argument met f , 'n Borel meetbare skalaarfunksie g_n kry sodanig dat $g_n(\omega) = \|h_n(\omega)\|$ op $\Omega \setminus N$. Aangesien die maat ρ volledig is, volg weer dat $\|h_n\|$ Borel meetbaar is.

Neem nou 'n vaste n en beskou die punte $x_1, x_2, \dots, x_n$ uit die ry (x_n) . Ons konstrueer nou net soos in die bewys van stelling 3.2.14 Σ -meetbare trapfunksies g_n . Vir elke n en alle $\omega \in \Omega$ stel

$$k_\omega^n := \min \left\{ 1 \leq j \leq n : \|f(\omega) - x_j\| = \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| \right\}.$$

Definieer 'n trapfunksie $g_n : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ deur $g_n(\omega) := x_{k_\omega^n}$. Net soos in die bewys van 3.2.14 geld dat $\|f(\omega) - x_{k_\omega^m}\| \leq \|f(\omega) - x_{k_\omega^n}\|$ as $m > n$. Vir elke

$1 \leq k \leq n$ stel

$$A_k^{(n)} = \left\{ \omega \in \Omega : \|f(\omega) - x_k\| = \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| \right\}$$

$$B_k^{(n)} = \left\{ \omega \in \Omega : \|f(\omega) - x_j\| > \min_{1 \leq i \leq n} \|f(\omega) - x_i\| \text{ vir elke } j = 1, 2, \dots, k-1 \right\}.$$

Dan is $g_n^{-1}(x_k) = A_k^{(n)} \cap B_k^{(n)} := E_k^{(n)}$ vir elke $1 \leq k \leq n$. Ons kan dus die trapfunksie g_n skryf as

$$g_n = \sum_{i=1}^n x_k \mathcal{I}_{E_k^{(n)}}.$$

Aangesien elke funksie $\|h_n\|$ Borel meetbaar is, is elkeen van die versamelings $A_k^{(n)}$ en $B_k^{(n)}$ en dus ook elke $E_k^{(n)}$ 'n meetbare versameling. Gevolglik is g_n 'n Σ -trapfunksie. Definieer nou die trapfunksie f_n deur

$$f_n = \sum_{i=1}^n x_k \mathcal{I}_{E_k^{(n)} \setminus N}.$$

Dan is $f_n = g_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ vir elke n . Aangesien (x_n) dig in $f(\Omega \setminus N)$ is, kan ons vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ en enige $\epsilon > 0$ 'n N_ϵ kry sodanig dat $\|f(\omega) - x_{N_\epsilon}\| < \epsilon$ en $x_{N_\epsilon} = x_{k_\omega^{N_\epsilon}} = f_{N_\epsilon}(\omega) = g_{N_\epsilon}(\omega)$. Dus, vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ en alle $n \geq N_\epsilon$ is

$$\|f(\omega) - f_n(\omega)\| = \|f(\omega) - x_{k_\omega^n}\| \leq \|f(\omega) - x_{k_\omega^{N_\epsilon}}(\omega)\| < \epsilon.$$

Die ry (f_n) is dus 'n ry Σ -trapfunksies waarvoor $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Vir elke n is die funksie $f_n \mathcal{I}_{\Omega_n}$ 'n ρ -trapfunksie [[want $\rho((E_k^{(n)} \setminus N) \cap \Omega_n) \leq \rho(\Omega_n) < \infty$]] en $f_n \mathcal{I}_{\Omega_n} \rightarrow f$ ρ -byna oral. Die funksie f is dus (I) ρ -meetbaar. $\square$

Weer eens kan ons vanuit proposisie 3.2.9 die volgende afleiding maak.

Gevolg 3.2.23.

Laat $\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n volledige σ -eindige σ -subadditiewe submaat wees. Beskou die volgende bewerings oor 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$.

1. f is (II) ρ -meetbaar;
2. f is (III) ρ -meetbaar;
3. f is ρ -byna separabelwaardig en daar bestaan 'n normerende deelversameling $\Psi \subseteq X^*$ sodanig dat $f \Psi$ -(I) ρ -meetbaar is.

Dan geld $1 \iff 2 \Rightarrow 3$. As ρ eindig en kontinu is, dan geld $3 \Rightarrow 1$.

Bewys. Volgens proposisie 3.2.9 geld $1 \iff 2$. Verder, as f (III) ρ -meetbaar is, dan is f (I) ρ -meetbaar. Dus geld 3 volgens stelling 3.2.22. As ρ eindig en kontinu is, dan volg vanuit stelling 3.2.22 dat f (I) ρ -meetbaar is, maar in hierdie geval impliseer dit ook dat f (III) ρ -meetbaar is. $\square$

As ρ σ -eindig en σ -subadditief is, kry ons vanuit gevolg 3.2.15 en proposisie 3.2.19 dat die ruimte $\mathcal{M}_\rho^1(\Sigma, X)$ geslote is onder die neem van ρ -byna oral limiete.

Gevolg 3.2.24. (*Gevolg 1.12 p.7, [25]*)

Laat ρ 'n σ -eindige σ -subadditiewe As (f_n) 'n ry $(I)\rho$ -meetbare funksies is wat ρ -byna oral na f konvergeer, dan is f $(I)\rho$ -meetbaar.

Bewys. Sê $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ met $\rho(N) = 0$. Elke $(I)\rho$ -meetbare funksie f_n is volgens proposisie 3.2.19 ρ -byna oral Σ -meetbaar. Sê vir elke n is $f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus N_n}$ Σ -meetbaar waar $\rho(N_n) = 0$ vir elke n . Stel $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Aangesien ons aanneem dat ρ σ -subadditief is, is $\rho(M) = 0$. Verder is elke funksie $f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus (M \cup N)}$ Σ -meetbaar, $\rho(M \cup N) \leq \rho(M) + \rho(N) = 0$ en $f_n \mathcal{I}_{\Omega \setminus (M \cup N)}(\omega) \rightarrow f(\omega) \mathcal{I}_{\Omega \setminus (M \cup N)}$ vir alle $\omega \in \Omega$. Dus, volgens gevolg 3.2.15 is $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus (M \cup N)}$ ook Σ -meetbaar. Met ander woorde, f is ρ -byna oral Σ -meetbaar en dus $(I)\rho$ -meetbaar volgens proposisie 3.2.19. $\square$

Gevolg 3.2.16 tesame met proposisie 3.2.19 gee die volgende resultaat.

Gevolg 3.2.25. (*Gevolg 1.14 p.7, [25]*)

As ρ 'n σ -eindige submaat is en f 'n $(I)\rho$ -meetbare funksie is en $T : X \rightarrow Y$ 'n begrensde operator is, dan is $Tf : \Omega \rightarrow Y$ ook 'n $(I)\rho$ -meetbare funksie.

Bewys. As f 'n $(I)\rho$ -meetbare funksie is, dan is $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ 'n Σ -meetbare funksie vir een of ander ρ -nulversameling N . Volgens gevolg 3.2.16 is $T(f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}) = (Tf) \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ 'n Σ -meetbare funksie. Maar dan is Tf ρ -byna oral Σ -meetbaar en dus ook $(I)\rho$ -meetbaar. $\square$

Hoofstuk 4

Die Bochner integraal

Die Bochner integraal is die eerste tipe vektorwaardige integraal wat ons bestudeer. Die Bochner integraal brei die Lebesgue integraal uit tot funksies wat hul waardes in 'n Banach ruimte aanneem. Die integraal word ten opsigte van 'n skaalmaat μ gedefinieer. Die ontwikkeling wat ons doen is gebaseer op hoofstuk II.2 van [8]. Hier word dit aangeneem dat μ 'n eindige maat is. Ons ontwikkel die integraal vir 'n σ -eindige maat.

4.1 μ -Meetbare funksies

Beskou 'n Banach ruimte X , 'n willekeurige versameling Ω en 'n σ -algebra Σ , van deelversamelings van Ω . Laat μ deurgaans 'n σ -eindige maat op Σ wees. [[Daar bestaan 'n ry versamelings $(\Omega_n) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\mu(\Omega_n) < \infty$ vir elke n en as $M \subseteq N$ met $N \in \Sigma$ en $\mu(N) = 0$, dan is $M \in \Sigma$.]] Dan is μ 'n submaat wat volledig σ -eindig en σ -subadditief is.

Definisie 4.1.1. (μ -trapfunksie)

'n Σ -meetbare trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ word 'n μ -trapfunksie of anders 'n μ -integreerbare trapfunksie genoem as $\mu(E_i) < \infty$ vir elke versameling E_i waarvoor $x_i \neq 0$.

Ons dui die vektorruimte van alle μ -trapfunksies deur $\mathcal{S}_\mu(\Sigma, X)$ aan. Per definisie is $\mathcal{S}_\mu(\Sigma, X) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$. As die maat μ eindig is, dan is $\mathcal{S}_\mu(\Sigma, X) = \mathcal{S}(\Sigma, X)$. 'n μ -trapfunksie is dus 'n ρ -trapfunksie waar $\rho = \mu$.

Definisie 4.1.2. (μ -Meetbare funksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word μ -meetbaar genoem as daar 'n ry μ -integreerbare trapfunksies (f_n) bestaan wat μ -byna oral na f konvergeer.

Die funksie f is dus μ -meetbaar as daar 'n versameling $N \in \Sigma$ en 'n ry (f_n) van μ -integreerbare trapfunksies bestaan sodanig dat $\mu(N) = 0$ en $\|f(\omega) - f_n(\omega)\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Daar word soms na μ -meetbare funksies verwys as sterk meetbare funksies. Ons sal altyd praat van μ -meetbare funksies. Ons dui die vektorruimte van μ -meetbare funksies $f : \Omega \rightarrow X$ deur $\mathcal{M}_\mu(\Sigma, X)$ aan.

'n μ -Meetbare funksie is dus 'n tipe I ρ -meetbare funksie met $\rho = \mu$. 'n μ -Meetbare funksie het dus al die eienskappe wat 'n (I) ρ -meetbare funksie het. Vir gerief herhaal ons hierdie eienskappe. Vanuit proposisies 3.2.10 en 3.2.11 kry ons die volgende eienskappe:

Proposisie 4.1.3.

As $x^* \in X^*$, en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n μ -meetbare (trap)funksie is, dan is x^*f en $\|f\|$ albei skalaar μ -meetbare funksies (μ -trapfunksies).

Proposisie 4.1.4.

Beskou die volgende bewerings vir 'n reëelwaardige funksie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

1. f is Borel meetbaar;
2. f is Σ -meetbaar;
3. f is μ -meetbaar.

Dan geld $1 \iff 2 \Rightarrow 3$. As die maatruimte volledig is, dan geld ook dat $3 \Rightarrow 1$.

Die volgende resultaat volg direk vanuit stelling 3.2.22.

Stelling 4.1.5. (Pettis se meetbaarheidstelling) (Gevolg 4 p.42-43, [8]) (Stelling 1.11 p.7, [25])

As μ 'n volledige σ -eindige maat is, dan is $f : \Omega \rightarrow X$ μ -meetbaar as en slegs as

1. f μ -byna separabelwaardig is;
2. daar 'n normerende deelversameling $\Psi \subseteq X^*$ bestaan sodanig dat f Ψ - μ -meetbaar is.

As die maat μ boonop 'n eindige maat is, kan ons die volgende sterker resultaat kry. In [8] word daar nie aangeneem dat μ volledig is nie. Hierdie aanname word wel benodig vir die bewys wat daar gelewer word.

Stelling 4.1.6. (Pettis se meetbaarheidstelling vir 'n eindige maat) (Stelling 2, gevolg 3 p. 42, [8])

As μ 'n volledige eindige maat op Σ is, dan is $f : \Omega \rightarrow X$ 'n μ -meetbare funksie as en slegs daar 'n ry aftelbaarwaardige μ -meetbare funksies f_n bestaan sodanig dat $f_n \rightarrow f$ μ -byna gelykmatig.

Bewys. As f 'n μ -meetbare funksie is, dan volg vanuit die σ -eindige weergawe van Pettis se meetbaarheidstelling (stelling 4.1.5) dat f μ -byna separabelwaardig is en dat daar 'n normerende deelversameling $\Psi \subseteq X^*$ bestaan sodanig dat f 'n Ψ - μ -meetbare funksie is. Laat N 'n μ -nulversameling wees waarvoor $f(\Omega \setminus N)$ separabel is. Laat (x_n) 'n digte ry in $f(\Omega \setminus N)$ wees. Net soos in die bewys van stelling 3.2.22 is elke funksie $h_n : \Omega \rightarrow X$ gedefinieer deur

$$h_n(\omega) = f(\omega) - x_n$$

'n Ψ - μ -meetbare funksie en is $\|h_n\|$ 'n Borel meetbare funksie vir elke n . Stel nou

$$\begin{aligned} G_n^k &:= \left\{ \omega \in \Omega : \|h_n(\omega)\| < \frac{1}{k} \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega \setminus N : \|f(\omega) - x_n\| < \frac{1}{k} \right\} \cup \left\{ \omega \in N : \|h_n(\omega)\| < \frac{1}{k} \right\} =: F_n^k \cup N_n^k. \end{aligned}$$

Aangesien $\|h_n\|$ Borel meetbaar is, is elke versameling G_n^k meetbaar. Verder is elke versameling N_n^k 'n deelversameling van die nulversameling N en is dus ook

meetbaar. Gevolglik is die versamelings F_n^k en $G_n^k \Delta F_n^k$ meetbaar en $\mu(G_n^k \Delta F_n^k) = \mu(N_n^k) = 0$. Vorm nou 'n ry disjunkte meetbare versamelings soos volg

$$E_1^k = F_1^k \quad \text{en} \quad E_n^k = F_n^k \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i^k$$

vir $n \geq 2$. Dan is (E_n^k) 'n verdeling van $\Omega \setminus N$ in disjunkte versamelings. [[Vir elke $\omega \in \Omega \setminus N$ bestaan daar 'n n_k sodanig dat $\|f(\omega) - x_{n_k}\| < \frac{1}{k}$, dit is, dat $\omega \in F_{n_k}^k$ en dus ook $\omega \in E_n^k$ vir een of ander $n \leq n_k$.]]

Definieer nou vir elke k die aftelbaarwaardige funksie q_k op Ω deur

$$q_k(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathcal{I}_{E_n^k}(\omega).$$

Dan is $q_k = 0$ op N [[want $E_n^k \cap N = \emptyset$ vir elke n]] en $\|f(\omega) - q_k(\omega)\| < \frac{1}{k}$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ [[vir elke $\omega \in \Omega \setminus N$ is $\omega \in E_n^k$ vir een of ander n en dan is $\|f(\omega) - q_k(\omega)\| = \|f(\omega) - x_n\| < \frac{1}{k}$]]. Die ry aftelbaarwaardige funksies (q_k) konvergeer dus gelykmatig na f op $\Omega \setminus N$. Elkeen van die funksies q_k is ook μ -meetbaar [[die ry μ -trapfunksies $(\sum_{n=1}^m x_n \mathcal{I}_{E_n^k}(\omega))$ konvergeer oral na q_k]]. Ons het dus 'n ry aftelbaarwaardige μ -meetbare funksies gekry wat μ -byna gelykmatig na f konvergeer.

Andersom, laat (f_n) 'n ry aftelbaarwaardige μ -meetbare funksies wees wat μ -byna gelykmatig na f konvergeer. Sê

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$$

vir elke n en $f_n \rightarrow f$ gelykmatig op $\Omega \setminus N$ waar $\mu(N) = 0$. Dan is elke versameling $f_n(\Omega \setminus N)$ aftelbaar en

$$f(\Omega \setminus N) \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \setminus N)}.$$

Dus is $f(\Omega \setminus N)$ separabel.

Die ry (f_n) konvergeer gelykmatig op $\Omega \setminus N$ na f . Daar bestaan dus vir elke $\epsilon > 0$ 'n N_ϵ sodanig dat $\|f(\omega) - f_n(\omega)\| = \|f(\omega) - x_i^{(n)}\| < \epsilon$ as $n \geq N_\epsilon$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Aangesien μ 'n eindige maat is, is

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i^{(n)}) \leq \mu(\Omega) < \infty.$$

Ons kan dus vir elke n 'n $i_n \in \mathbb{N}$ kies sodanig dat

$$\mu\left(\bigcup_{i=i_n}^{\infty} E_i^{(n)}\right) = \sum_{i=i_n}^{\infty} \mu(E_i^{(n)}) < 2^{-n}.$$

Stel $M_n = \bigcup_{i=i_n}^{\infty} E_i^{(n)}$. Definieer 'n μ -nul versameling M deur

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} M_j = \limsup_n M_n$$

$[[\mu(M) = 0$ vanuit die Borel-Cantelli lemma]]. Vir elke $\omega \in (\Omega \setminus N) \setminus M$ is

$$\omega \in \Omega \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} M_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Omega \setminus \bigcup_{j=k}^{\infty} M_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} (\Omega \setminus M_k) = \liminf_k \Omega \setminus M_k$$

Vir enige $\omega_0 \in \Omega \setminus N \setminus M$ bestaan daar dus 'n n_0 sodanig dat $\omega_0 \notin M_n = \bigcup_{i=i_n}^{\infty} E_i^{(n)}$ vir alle $n \geq n_0$. Maar dan is ω_0 vir alle $n \geq n_0$ in een van die versamelings $E_i^{(n)}$ met $1 \leq i \leq i_n - 1$. Stel

$$g_n(\omega) = \sum_{i=1}^{i_n-1} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$$

vir elke n . Dan is (g_n) 'n ry μ -trapfunksies en vir elke $\omega_0 \in \Omega \setminus (N \cup M)$ bestaan daar 'n n_0 sodanig dat vir alle $n \geq n_0$ en een of ander $1 \leq i \leq i_n - 1$ dit geld dat $\omega_0 \in E_i^{(n)}$. Dus, as $n \geq \max\{n_0, N_\epsilon\} := N_{\omega_0}$, dan is

$$\|f(\omega_0) - g_n(\omega_0)\| = \|f(\omega_0) - x_i^{(n)}\| < \epsilon.$$

Vir enige ϵ en $\omega \in (N \cup M)$ kan ons so 'n N_ω kry. Die ry μ -trapfunksies (g_n) konvergeer dus puntsgewys μ -byna oral na f . Dit wys dat f 'n μ -meetbare funksie is. $\square$

Vanuit gevolg 3.2.24 kry ons direk dat die ruimte $\mathcal{M}_\mu(\Sigma, X)$ geslote is onder die neem van μ -byna oral limiete. Die Bochner integraal word vir funksies $f \in \mathcal{M}_\mu(\Sigma, X)$ gedefinieer.

4.2 Die integraal van 'n μ -meetbare funksie

Die Bochner integraal word gedefinieer vir μ -meetbare funksies. Aangesien sulke funksies die limiet van 'n ry μ -trapfunksies is, begin ons met die integraal van 'n μ -trapfunksie.

Definisie 4.2.1. (Integraal van 'n μ -trapfunksie)

As $f = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{I}_{E_i}$ 'n μ -trapfunksie is dan word die integraal van f met betrekking tot μ oor 'n versameling $E \in \Sigma$ gedefinieer deur

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n x_i \mu(E \cap E_i).$$

Dat die integraal van 'n μ -trapfunksie onafhanklik van die representasie van f is, volg op die standaard manier (sien byvoorbeeld lemma 1.2.3 op p.17). Die volgende proposisie wys onder andere dat die integraal van 'n μ -trapfunksie lineêr is.

Proposisie 4.2.2. (Eienskappe van die integraal van 'n μ -trapfunksie)

Laat f_n en f_m μ -trapfunksies wees. Dan is

1. $\int_E (f_n + f_m) d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E f_m d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$.
2. $\|\int_E f_n d\mu\| \leq \int_E \|f_n\| d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$.

Bewys. Skryf die μ -integreerbare trapfunksies f_n en f_m met betrekking tot dieselfde verdeling (E_i) . Sê

$$f_n = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i} \quad \text{en} \quad f_m = \sum_{i=1}^r y_i \mathcal{I}_{E_i}.$$

1. Die funksie $(f_n + f_m)$ is dan die μ -trapfunksie $\sum_{i=1}^r (x_i + y_i) \mathcal{I}_{E_i}$ en dus is

$$\begin{aligned} \int_E (f_n + f_m) d\mu &= \sum_{i=1}^r (x_i + y_i) \mu(E_i \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^r x_i \mu(E_i \cap E) + \sum_{i=1}^r y_i \mu(E_i \cap E) = \int_E f_n d\mu + \int_E f_m d\mu. \end{aligned}$$

2. Aangesien $\|f\|$ 'n skalaarwaardige μ -trapfunksie is, kan ons die integraal van $\|f\|$ met betrekking tot μ neem om die volgende te kry:

$$\left\| \int_E f_n d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mu(E_i \cap E) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \mu(E_i \cap E) = \int_E \|f_n\| d\mu. \quad \square$$

As $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 'n positiewe μ -meetbare funksie is, dan is g volgens proposisie 3.2.19 op p.84 ook μ -byna Σ -meetbaar en dus volgens proposisie 3.2.11 op p.79 ook μ -byna Borel meetbaar. Sê $g \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ is Borel meetbaar waar $\mu(N) = 0$. Dan is die funksie $g \mathcal{I}_N$ Borel meetbaar as die maat μ volledig is [[want dan is $g^{-1} \mathcal{I}_N(S) \subseteq N$ en dus $g^{-1} \mathcal{I}_N(S) \in \Sigma$ vir enige oop deelversameling $S \subseteq \mathbb{R}$, want $\mu(N) = 0$]].

Dus, as μ 'n volledige maat is, dan is g Borel meetbaar en kan ons die abstrakte Lebesgue integraal van g met betrekking tot μ bepaal. In hierdie geval geld dat

$$\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega \setminus N} g d\mu.$$

Beskou nou 'n μ -meetbare funksie $f : \Omega \rightarrow X$ en 'n ry μ -trapfunksies (f_n) wat μ -byna oral na f konvergeer. Vir elke n is $f - f_n$ en dus ook $\|f - f_n\|$ 'n μ -meetbare funksie. Aangesien ons aanneem dat μ 'n volledige maat is, volg dat die integraal $\int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu$ goed gedefinieerd is. Vir elke $p \in \mathbb{N}$ dui ons die L^p -ruimte $\{f \in \mathcal{M}_{\mu}(\Sigma, \mathbb{K}) : (\int_{\Omega} |f|^p)^{\frac{1}{p}} d\mu < \infty\}$ deur $L^p(\mu)$ aan. Dus is $\|f - f_n\| \in L^1(\mu)$. Die volgende lemma verseker die bestaan van die Bochner integraal. Die feite wat in die lemma voorkom word sonder bewys genoem in [8]. Ons gee 'n bewys.

Lemma 4.2.3.

As f 'n μ -meetbare funksie is en (f_n) 'n ry μ -trapfunksies is sodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0,$$

dan bestaan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$. Verder, as (g_n) 'n ry μ -trapfunksies is wat aan dieselfde voorwaardes as die ry funksies (f_n) voldoen, dan geld dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu$.

Bewys. Laat (f_n) 'n ry μ -trapfunksies wees soos in die stelling. Vir enige $\epsilon > 0$ bestaan daar 'n N_{ϵ} sodanig dat $\int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu < \epsilon/2$ as $n \geq N_{\epsilon}$. Dus geld vir enige $E \in \Sigma$ dat

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_n d\mu - \int_E f_m d\mu \right\| &= \left\| \int_E (f_n - f_m) d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f_n - f_m\| d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu + \int_{\Omega} \|f - f_m\| d\mu \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

as $n, m \geq N_{\epsilon}$. Die ry integrale $(\int_E f_n d\mu)$ is dus 'n Cauchyry in die Banach ruimte X . Dit wys dat die limiet van hierdie integrale bestaan. Tweedens as (g_n) 'n ry μ -trapfunksies is wat aan dieselfde voorwaardes as (f_n) voldoen, dan is

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E f_n d\mu - \int_E g_n d\mu \right\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E (f_n - f + f - g_n) d\mu \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - g_n\| d\mu = 0. \end{aligned}$$

Dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu$. □

Definisie 4.2.4. (Bochner Integreerbaar, Bochner Integraal)(Definisie 1 p.44,[8])

'n μ -Meetbare funksie f word Bochner integreerbaar (met betrekking tot μ) genoem as daar 'n ry μ -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0.$$

In hierdie geval word die Bochner integraal van f oor 'n versameling $E \in \Sigma$ met betrekking tot μ gedefinieer as

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

As f Bochner integreerbaar is met betrekking tot μ , sê ons f is μ -integreerbaar. In hierdie geval noem ons 'n ry μ -trapfunksies (f_n) wat aan die voorwaardes in die bostaande definisie voldoen, 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f .

Onthou dat 'n Borel meetbare funksie $f : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue integreerbaar met betrekking tot die maat μ is as en slegs as $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$. As μ 'n volledige maat is, dan kry ons dieselfde nodige en voldoende voorwaarde vir die Bochner integraal. Die volgende stelling word in [8] net vir 'n eindige maat gegee. Ons vereis slegs dat die maat volledig moet wees. Die basiese idee vir die bewys kom uit [25].

Stelling 4.2.5. (*Stelling 2 p.45, [8]*)(*Proposisie 1.16 p.8, [25]*)
Laat μ 'n volledige maat wees. 'n μ -Meetbare funksie f is μ -Bochner integreerbaar as en slegs as $\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty$.

Bewys. As f μ -integreerbaar is en (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is. Dan is $\|f\|$, $\|f - f_n\|$ en $\|f_n\|$ almal Borel meetbaar, want μ is volledig. Dus is

$$\int_{\Omega} \|f\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu + \int_{\Omega} \|f_n\| d\mu < \infty$$

vir n groot genoeg want $\int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Andersom, aangesien f 'n μ -meetbare funksie is, is daar 'n ry μ -trapfunksies (f_n) wat μ -byna oral na f konvergeer. Sê $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ waar $\mu(N) = 0$. Laat $\epsilon > 0$. Dan bestaan daar vir elke $\omega \in \Omega \setminus N$ 'n N_{ϵ}^{ω} sodanig $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| < \epsilon$ as $n \geq N_{\epsilon}^{\omega}$. Stel nou

$$E_n = \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega)\| \leq 2\|f(\omega)\|\} \text{ en } F_n = \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega)\| > 2\|f(\omega)\|\}.$$

Dan is E_n en F_n disjunkte, meetbare versamelings, want $\|f_n\|$ is Borel meetbaar, en $\Omega = E_n \cup F_n$ vir alle n . Stel $g_n = f_n \mathcal{I}_{E_n}$. Dan is elke g_n 'n μ -trapfunksie en

$$\begin{aligned} \|f(\omega) - g_n(\omega)\| &\leq \|f(\omega) - f_n(\omega) \mathcal{I}_{E_n \setminus N}(\omega)\| + \|f(\omega) - f_n(\omega) \mathcal{I}_{F_n \setminus N}(\omega)\| \\ &\quad + \|f(\omega) - f_n(\omega) \mathcal{I}_N(\omega)\| \end{aligned}$$

vir elke $\omega \in \Omega$. As $\omega \in \Omega \setminus N$, dan is daar twee moontlikhede: $\|f(\omega)\| \geq \epsilon$ of $\|f(\omega)\| < \epsilon$. Verder moet $\omega \in E_n \setminus N$ óf $\omega \in F_n \setminus N$ vir elke n , want die versamelings is disjunkt. Neem aan $n \geq N_{\epsilon}^{\omega}$, dan is $\|f(\omega) - f_n(\omega)\| < \epsilon$.

1. Neem aan $\epsilon \leq \|f(\omega)\|$ en $\omega \in F_n \setminus N$. Dan is $\|f_n(\omega)\| > 2\|f(\omega)\| > \|f(\omega)\|$. Dus is $\epsilon > \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq |\|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\|| = \|\|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\|\|$. Dus $\|f_n(\omega)\| < \epsilon + \|f(\omega)\| \leq 2\|f(\omega)\|$ 'n teësprak. Dus moet $\omega \in E_n \setminus N$ as $\epsilon \leq \|f(\omega)\|$. Maar dan is $g_n(\omega) = f_n(\omega)$ en dus $\|f(\omega) - g_n(\omega)\| = \|f(\omega) - f_n(\omega)\| < \epsilon$.

2. As $\|f(\omega)\| < \epsilon$ en $\omega \in E_n$, dan is $g_n(\omega) = f_n(\omega)$ en dus is $\|f(\omega) - g_n(\omega)\| < \epsilon$.
 As $\omega \in F_n$, dan is $g_n(\omega) = 0$, want E_n en F_n is disjunk. In hierdie geval is $\|f(\omega) - g_n(\omega)\| = \|f(\omega)\| < \epsilon$.

In al die gevalle is $\|f(\omega) - g_n(\omega)\| < \epsilon$ as $n \geq N_\epsilon^\omega$ en ons kan dit vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ doen. Dit wys dat $\|f - g_n\|(\omega) \rightarrow 0$ vir μ -byna alle ω . Verder is

$$\|f - g_n\|(\omega) \leq \|f\|(\omega) + \|f_n\|(\omega)\mathcal{I}_{E_n}(\omega) \leq 3\|f\|(\omega)$$

vir alle $\omega \in \Omega$ en alle n . Volgens Lebesgue se gedomineerde konvergenstelling kry ons dus dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - g_n\| d\mu = 0.$$

Die ry (g_n) is dus 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Die funksie f is dus μ -integreerbaar. $\square$

Baie van die eienskappe van die Lebesgue integraal dra oor na die Bochner integraal. Alhoewel ons nie 'n monotone konvergenstelling het nie, kry ons 'n gedomineerde konvergenstelling.

Stelling 4.2.6. (*Gedomineerde konvergenstelling*) (Stelling 3 p. 45, [8])
 Beskou 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$. As (f_n) 'n ry μ -integreerbare funksies is en $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ 'n integreerbare funksie is sodanig dat

1. $f_n \rightarrow f$ μ -byna oral.
2. $\|f_n\| \leq |g|$ μ -byna oral vir alle n .

Dan is f μ -Bochner integreerbaar en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

In die besonder geld dat vir enige $E \in \Sigma$ dat

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Bewys. Aangesien $\|f_n\| \leq |g|$ μ -byna oral vir alle n volg ook dat $\|f\| \leq |g|$ μ -byna oral. Dit impliseer dat $\|f_n - f\| \leq 2|g|$. Die skalaar Borel meetbare funksies $\|f_n - f\|$ word dus deur μ -byna oral deur $2|g|$ gedomineer en konvergeer μ -byna oral na 0. Vanuit Lebesgue se gedomineerde konvergenstelling volg dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0. \quad \square$$

Ons som nou sommige van die eienskappe van die Bochner integraal op in die volgende resultaat.

Stelling 4.2.7. (*Eienskappe van Bochner integraal*) (Stelling 4 p.46, [8])
 As $f : \Omega \rightarrow X$ μ -Bochner integreerbaar is, dan geld die volgende

1. As $E, F \in \Sigma$ disjunkt is, dan is

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

met ander woorde die Bochner integraal is eindig additief.

2. $\|\int_E f d\mu\| \leq \int_E \|f\| d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$.
3. As μ eindig is, dan is $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E f d\mu = 0$. Die Bochner integraal is dus μ -absoluut kontinu as μ 'n eindige maat is.
4. As μ eindig is en $(E_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings is en $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, dan is

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Die Bochner integraal is dus σ -additief.

5. Die Bochner integraal is 'n vektormaat van begrensde variasie en as $\nu(E) := \int_E f d\mu$, dan is

$$|\nu|(E) = \int_E \|f\| d\mu.$$

6. Vir alle $x^* \in X^*$ is x^*f 'n μ -Bochner integreerbare funksie en $x^*(\int_E f d\mu) = \int_E x^*f d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$.
7. As f μ -integreerbaar is en $f = g$ μ -byna oral, dan is g μ -integreerbaar en $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Bewys. Laat (f_n) deurgaans 'n ry van definiërende μ -trapfunksies vir die Bochner integraal van f wees. Sê

$$f_n = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$$

waar $\mu(E_i^{(n)}) < \infty$ as $x_i^{(n)} \neq 0$.

1. Aangesien die versamelings E en F disjunkt is en μ 'n maat is, volg dat

$$\begin{aligned} \int_{E \cup F} f_n d\mu &= \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mu(E_i^{(n)} \cap (E \cup F)) \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mu(E_i^{(n)} \cap E) + \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mu(E_i^{(n)} \cap F) = \int_E f_n d\mu + \int_F f_n d\mu \end{aligned}$$

vir elke n . Aangesien (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is, volg dat

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cup F} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E f_n d\mu + \int_F f_n d\mu \right) = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

2. Vir elke n geld dat $\|f_n\| = \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \|x_i^{(n)}\| \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$, dus is

$$\left\| \int_E f_n d\mu \right\| \leq \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \|x_i^{(n)}\| \mu(E_i^{(n)} \cap E) = \int_E \|f_n\| d\mu.$$

Maar $(\|f_n\|)$ is dan ook 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal $\|f\|$ [[want $\int_\Omega \|f\| - \|f_n\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu \rightarrow 0$]] en dus is

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_E f_n d\mu \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \|f_n\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu.$$

3. As μ eindig is en f μ -Bochner integreerbaar is, dan is $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$ (proposisie 4.2.5). Dus is $\|f\| \in L^1(\mu)$ en kry ons vanuit 2 dat

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| d\mu \rightarrow 0$$

as $\mu(E) \rightarrow 0$. Dus geld ook dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E f d\mu = 0$.

4. Neem die som van die ry reële getalle $(\int_{E_n} \|f\| d\mu)$, dan kry ons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$$

waar die eindigheid volg vanuit die feit dat f Bochner integreerbaar is. Vanuit 2 weet ons dat $\|\int_{E_n} f d\mu\| \leq \int_{E_n} \|f\| d\mu$ vir elke n . Die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \|\int_{E_n} f d\mu\|$ word dus term vir term deur die konvergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\| d\mu$ gedomineer. Dit beteken dat $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$ absoluut konvergent is in die Banach ruimte X . Aangesien die Bochner integraal eindig additief is (1), volg dat

$$\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^k \int_{E_n} f d\mu \right\| = \left\| \int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\| \rightarrow 0$$

as $k \rightarrow \infty$, want $\mu(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ (3). Dit wys dat

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

5 Aangesien die Bochner integraal eindig additief is (1), is ν 'n vektormaat, trouens 4 gee dat ν 'n σ -additiewe vektormaat is as μ eindig is. Beskou nou 'n eindige verdeling $(E_i) \in D^\Sigma$. Dan geld vir enige $E \in \Sigma$ dat

$$\sum_{i=1}^r \|\nu(E \cap E_i)\| = \sum_{i=1}^r \left\| \int_{E \cap E_i} f d\mu \right\| \leq \sum_{i=1}^r \int_{E \cap E_i} \|f\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu.$$

Neem die supremum oor alle verdelings $(E_i) \in D^\Sigma$, dan sien ons $|\nu|(E) \leq \int_E \|f\| d\mu$.

Omgekeerd, laat $\epsilon > 0$, laat $E \in \Sigma$ en laat (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f wees. Dan bestaan daar 'n n_E sodanig dat $\int_E \|f - f_{n_E}\| d\mu < \epsilon$. Kies 'n verdeling $(E_i) \in D^\Sigma$ sodanig dat

$$\sum_{i=1}^r \left\| \int_{E \cap E_i} f_{n_E} d\mu \right\| = \int_E \|f_{n_E}\| d\mu.$$

[[Byvoorbeeld, as $f_{n_E} = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$, dan is $\sum_{i=1}^r \left\| \int_{E \cap E_i} f_{n_E} d\mu \right\| = \sum_{i=1}^r \|x_i \mu(E_i)\| = \sum_{i=1}^r \|x_i\| \mu(E_i) = \int_E \|f_{n_E}\| d\mu$.]] Kies nou 'n verfyning $\{F_1, F_2, \dots, F_s\} \in D^\Sigma$ van (E_i) sodanig dat

$$|\nu|(E) - \sum_{j=1}^s \left\| \int_{E \cap F_j} f d\mu \right\| = \sup_{(G_j) \in D^\Sigma} \sum_{j=1}^t \left\| \int_{E \cap G_j} f d\mu \right\| - \sum_{i=1}^s \left\| \int_{E \cap F_i} f d\mu \right\| < \epsilon.$$

Aangesien (F_j) 'n verfyning van (E_i) is, geld nog steeds dat

$$\sum_{j=1}^s \left\| \int_{E \cap F_j} f_{n_E} d\mu \right\| = \int_E \|f_{n_E}\| d\mu.$$

Die skalaar integraal is additief. Dus is $\int_E \|f_{n_E}\| d\mu = \sum_{j=1}^s \int_{E \cap F_j} \|f_{n_E}\| d\mu$. Ons kry dus die volgende ongelykheid

$$\begin{aligned} & \left| |\nu|(E) - \sum_{j=1}^s \int_{E \cap F_j} \|f_{n_E}\| d\mu \right| \\ & \leq \left| |\nu|(E) - \sum_{j=1}^s \left\| \int_{E \cap F_j} f d\mu \right\| \right| + \left| \sum_{j=1}^s \left\| \int_{E \cap F_j} f d\mu \right\| - \sum_{j=1}^s \int_{E \cap F_j} \|f_{n_E}\| d\mu \right| \\ & < \epsilon + \left| \sum_{j=1}^s \int_{E \cap F_j} (\|f\| - \|f_{n_E}\|) d\mu \right| \\ & \leq \epsilon + \int_E \|\|f\| - \|f_{n_E}\|\| d\mu \leq \epsilon + \int_E \|f - f_{n_E}\| d\mu < \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

Dit wys dat ons vir enige $E \in \Sigma$ en alle $\epsilon > 0$ 'n n_E kan kry sodanig dat

$$\left| |\nu|(E) - \int_E \|f_{n_E}\| d\mu \right| < 2\epsilon.$$

Dus is $|\nu|(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \|f_n\| d\mu = \int_E \|f\| d\mu$.

6. Beskou 'n funksionaal $x^* \in X^*$. Aangesien die ry μ -trapfunksie (f_n) 'n definiërende ry vir die integraal van f is, volg dat die ry skalaar μ -trapfunksies $(x^* f_n)$ 'n definiërende ry vir die integraal van $x^* f$ is [[want $\int_\Omega |x^* f - x^* f_n| d\mu \leq \|x^*\| \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu \rightarrow 0$]]. Die skalaarfunksie $x^* f$ is dus μ -Bochner integreerbaar.

Vir elke n en elke $E \in \Sigma$ is

$$x^* \left(\int_E f_n d\mu \right) = x^* \left(\sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mu(E_i^{(n)}) \right) = \sum_{i=1}^{r(n)} x^* x_i^{(n)} \mu(E_i^{(n)}) = \int_E x^* f_n d\mu.$$

Dus, aangesien $(x^* f_n)$ 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van $x^* f$ is, volg dat

$$\begin{aligned} \int_E x^* f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E x^* f_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^* \left(\int_E f_n d\mu \right) = x^* \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \right) = \int_E x^* f d\mu. \end{aligned}$$

7. Neem aan (f_n) is 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f en $g = f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ waar $\mu(N) = 0$. Dan is elke $f_n\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ 'n μ -trapfunksie en

$$\int_{\Omega} \|f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N} - f_n\mathcal{I}_{\Omega \setminus N}\| d\mu = \int_{\Omega} \|f - f_n\|_{\Omega \setminus N} d\mu \leq \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$. Gevolglik is $(f_n\mathcal{I}_{\Omega \setminus N})$ 'n ry definiërende trapfunksies vir $f\mathcal{I}_{\Omega \setminus N} = g$. Vir elke n is

$$\begin{aligned} \int_E f_n\mathcal{I}_{\Omega \setminus N} d\mu &= \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mu(E \cap (E_i^{(n)} \setminus N)) \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} (\mu(E \cap E_i^{(n)}) - \mu(N)) = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mu(E \cap E_i^{(n)}) = \int_E f_n d\mu \end{aligned}$$

vir alle $E \in \Sigma$. Dus is

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n\mathcal{I}_{\Omega \setminus N} d\mu = \int_E g d\mu. \quad \square$$

As 'n gevolg sien ons dat funksies waarvoor die μ -Bochner integraal gelyk is, self μ -byna oral gelyk is.

Gevolg 4.2.8. (*Gevolg 5 p.47, [8]*)

As f en g μ -integreerbaar is en $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$, dan is $f = g$ μ -byna oral.

Bewys. Definieer 'n vektormaat ν deur $\nu(E) = \int_E (f - g) d\mu$ vir $E \in \Sigma$. Aangesien die Bochner integraal lineêr is, volg dat $\nu(E) = 0$ vir alle $E \in \Sigma$. Dus geld ook dat $|\nu|(E) = 0$ vir alle $E \in \Sigma$. Vanuit die vorige stelling (5) kry ons dus dat $\int_{\Omega} \|f - g\| d\mu = 0$ en dus is $\|f - g\| = 0$ μ -byna oral en so ook $f = g$ μ -byna oral. $\square$

As $f : \Omega \rightarrow X$ 'n μ -integreerbare funksie is en (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is en $T : X \rightarrow Y$ 'n begrensde operator is dan is elke $Tf_n : \Omega \rightarrow Y$ 'n μ -trapfunksie en $Tf_n \rightarrow Tf$ μ -byna oral, want T is kontinu. Verder is $\int_{\Omega} \|Tf - Tf_n\| d\mu \leq \|T\| \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, want (f_n) is 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Gevolglik is (Tf_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van Tf en $\int_{\Omega} Tf d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Tf_n d\mu = T(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu)$, want $\int_{\Omega} Tf_n d\mu = T \int_{\Omega} f_n d\mu$ vir elke trapfunksie. As T 'n geslote operator is en f en Tf beide μ -integreerbaar is, dan kan ons dieselfde afleiding maak.

Stelling 4.2.9. (Stelling van Hille) (*Stelling 6 p.47, [8]*)

Beskou 'n geslote operator $T : X \rightarrow Y$ met definisieversameling $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. Laat $f : \Omega \rightarrow X$ 'n funksie wees wat sy waardes μ -byna oral in $\mathcal{D}(T)$ aanneem. As μ 'n eindige maat is en f en Tf beide μ -Bochner integreerbare funksies is, dan is $\int_E f d\mu \in \mathcal{D}(T)$ vir enige $E \in \Sigma$ en

$$T \left(\int_E f d\mu \right) = \int_E Tf d\mu.$$

Bewys. Laat $\epsilon > 0$. Aangesien f μ -meetbaar is, kan ons 'n ry aftelbaarwaardige μ -meetbare funksies (h_n) kry wat μ -byna gelykmatig na f konvergeer (stelling 4.1.6). Maar dan kan ons 'n aftelbaarwaardige funksie $h_\epsilon = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathcal{I}_{E_i}$ en 'n μ -nulversameling N_ϵ kry sodanig dat

$$\sup\{\|f(\omega) - h_\epsilon(\omega)\| : \omega \in \Omega \setminus N_\epsilon\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Aangesien Tf ook μ -meetbaar is, kan ons 'n μ -meetbare aftelbaarwaardige funksie $g_\epsilon = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^i \mathcal{I}_{E_j^i}$ kry, waar $(y_j^i) \subseteq Y$, $(E_j^i) \subseteq \Sigma$ 'n ry van disjunkte versamelings is sodanig dat $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^i$, en 'n μ -nulversamelings M_ϵ kry sodanig dat

$$\sup\{\|Tf(\omega) - g_\epsilon(\omega)\| : \omega \in \Omega \setminus M_\epsilon\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Vir enige paar $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, kies $\omega_j^i \in E_j^i$ willekeurig. Definieer

$$\phi_\epsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(\omega_j^i) \mathcal{I}_{E_j^i}.$$

Kies 'n $\omega_0 \in E \setminus N_\epsilon$, dan is $\omega_0 \in E_{j_0}^{i_0}$ vir een of ander i_0 en j_0 . Vir alle $\omega \in E_{j_0}^{i_0}$ geld dat

$$\|x_{i_0} - f(\omega)\| = \|h_\epsilon(\omega) - f(\omega)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dus is

$$\|f(\omega_0) - \phi_\epsilon(\omega_0)\| \leq \|f(\omega_0) - h_\epsilon(\omega_0)\| + \|h_\epsilon(\omega_0) - \phi_\epsilon(\omega_0)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Net so volg dat $\|Tf(\omega) - T\phi_\epsilon(\omega)\| < \epsilon$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus M_\epsilon$. Gevolglik is

$$\int_{\Omega} \|f - \phi_\epsilon\| d\mu < \epsilon \mu(\Omega) \quad \text{en} \quad \int_{\Omega} \|Tf - T\phi_\epsilon\| d\mu < \epsilon \mu(\Omega).$$

Volgens die gedomineerde konvergenstelling (stelling 4.2.6) volg dat

$$\int_E \phi_\epsilon d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\omega_j^i) \mathcal{I}_{E_j^i} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\omega_j^i) \mu(E_j^i)$$

en

$$\int_E T\phi_\epsilon d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Tf(\omega_j^i) \mu(E_j^i).$$

Elke element $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Tf(\omega_j^i) \mu(E_j^i) \in Y$ is in die beeld van T , want T is lineêr. Dus is elke element $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\omega_j^i) \mu(E_j^i) \in X$ in die definisieversameling van T . Aangesien T geslote is, is die limiet van hierdie elemente, $\int_E \phi_\epsilon d\mu \in \mathcal{D}(T)$ en

$$T \left(\int_E \phi_\epsilon d\mu \right) = \int_E T\phi_\epsilon d\mu.$$

Definieer nou vir elke n 'n aftelbaarwaardige funksie $f_n = \phi_{\frac{1}{n}}$. Dan geld $\|f(\omega) - f_n(\omega)\| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ μ -byna oral en $\|Tf(\omega) - Tf_n(\omega)\| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$ μ -byna oral soos $n \rightarrow \infty$. Dus is

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \quad \text{en} \quad \int_E Tf d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E Tf_n d\mu.$$

Maar $T(\int_E f_n d\mu) = \int_E Tf_n d\mu$ vir elke n en T is geslote, dus is

$$T\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E Tf d\mu. \quad \square$$

Beskou nou twee vektorwaardige funksies $f : \Omega \rightarrow X$ en $g : \Omega \rightarrow X$. As $x^* \in X^*$ en $x^*f = x^*g$ μ -byna oral, dan bestaan daar 'n μ -nulversameling $N^* \in \Sigma$ (wat afhanklik van $x^* \in X^*$ is) sodanig dat $x^*f(\omega) = x^*g(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N^*$. As $x^*f = x^*g$ μ -byna oral vir alle $x^* \in X^*$, dan kan daar ooraftelbaar veel μ -nulversamelings N^* wees. Ons kan dus nie noodwendig sê dat die (ooraftelbare) vereniging van hierdie versamelings 'n μ -nulversameling is nie. Dit beteken dat ons nie direk kan aflei dat f μ -byna oral gelyk aan g is nie. As die funksies egter μ -Bochner integreerbaar is, dan kan ons wel daardie afleiding maak.

Gevolg 4.2.10. (Gevolg 7, [8])

As μ eindig is en f en g twee μ -meetbare funksies is sodanig dat $x^*f = x^*g$ μ -byna oral vir alle $x^* \in X^*$, dan is $f = g$ μ -byna oral.

Bewys. Kies 'n stygende ry $(\Omega_n) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Kies die ry (Ω_n) boonop só dat f en g beide begrens op elke Ω_n is. Dan is

$$\int_E \|f\| \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu \leq \|f\|_{\Omega_n} \mu(\Omega_n) < \infty \quad \text{en} \quad \int_E \|g\| \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu \leq \|g\|_{\Omega_n} \mu(\Omega_n) < \infty.$$

Aangesien μ eindig is volg vanuit stelling 4.2.5 dat elke funksie $f\mathcal{I}_{\Omega_n}$ en $g\mathcal{I}_{\Omega_n}$ 'n μ -Bochner integreerbare funksie is. Omdat $x^*f = x^*g$ μ -byna oral vir alle $x^* \in X^*$, volg vanuit die stelling van Hille (stelling 4.2.9), dat

$$x^* \int_E f \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu = \int_E x^* f \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu = \int_E x^* g \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu = x^* \int_E g \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu$$

vir elke x^* , elke n en elke $E \in \Sigma$. Maar dan is $\int_E f \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu = \int_E g \mathcal{I}_{\Omega_n} d\mu$ vir elke n en elke $E \in \Sigma$. Dus, volgens gevolg 4.2.8 is $f\mathcal{I}_{\Omega_n} = g\mathcal{I}_{\Omega_n}$ μ -byna oral vir elke n . Maar $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$, dus is $f = g$ μ -byna oral. $\square$

Vir 'n deelversameling $Z \subseteq X$ dui ons die geslote konvekse omhullende van Z deur $\overline{\text{co}}(Z)$ aan. Dit is die snyding van alle geslote konvekse deelversamelings van X wat Z bevat. Die versameling $\overline{\text{co}}(Z)$ is geslote. Die volgende skeidingsresultaat volg vanuit die Hahn-Banach stelling.

Stelling 4.2.11. (Stelling V.2.10 p.417, [7])

As $Y, Z \subseteq X$ twee disjunkte geslote konvekse versamelings is en Z kompak is, dan bestaan daar 'n funksionaal $x^* \in X^*$ en 'n $\alpha \in \mathbb{R}$ sodanig dat

$$\text{Re } x^*y \leq \alpha < \text{Re } x^*z$$

vir alle $y \in Y$ en alle $z \in Z$.

As 'n gevolg van die stelling van Hille kan ons 'n weergawe van die middelwaardestelling vir die Bochner integraal beyws.

Stelling 4.2.12. (*Gevolg 8 p.48, [8]*)

As μ eindig is en f 'n μ -Bochner integreerbare funksie is, dan geld vir elke $E \in \Sigma$ met $\mu(E) > 0$ dat

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in \overline{\text{co}}(f(E)).$$

Bewys. Neem aan daar bestaan 'n versameling $E \in \Sigma$ met $\mu(E) > 0$ waarvoor $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \notin \overline{\text{co}}(f(E))$. Dan is die enkelpunt versameling $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$ disjunk met die geslote konvekse versameling $\overline{\text{co}}(f(E))$. Daar bestaan dus volgens stelling 4.2.11 'n funksionaal x^* en 'n $\alpha \in \mathbb{R}$ sodanig dat

$$\text{Re } x^* \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \right) < \alpha \leq \text{Re } x^* f(\omega)$$

vir alle $\omega \in E$. Maar $\text{Re } x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ is 'n kontinue lineêre operator. Volgens Hille se stelling (stelling 4.2.9) kry ons

$$\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E \text{Re } x^* f d\mu \right) < \alpha \leq \text{Re } x^* f(\omega).$$

Deur nou die integraal oor E te neem, volg dat

$$\int_E x^* \text{Re } f d\mu = \int_E \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E x^* \text{Re } f d\mu \right) d\mu < \int_E \alpha d\mu \leq \int_E \text{Re } x^* f d\mu$$

'n teësprak. □

As $\Omega = \mathbb{R}$ en ons oor 'n interval $[a, b] \in \Sigma$ integreer, dan sal ons skryf

$$\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f d\mu.$$

Die volgende stelling is die Bochner integraal weergawe van die fundamentele stelling van calculus. In die bewys van die stelling gebruik ons die Lebesgue differensiasie stelling.

Stelling 4.2.13. (*Stelling 9 p.49, [8]*)

Laat λ die Lebesguemaat op $[0, 1]$ wees. As $f : [0, 1] \rightarrow X$ λ -Bochner integreerbaar is, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| d\lambda(t) = 0$$

λ -byna oral op $[0, 1]$. Gevolglik geld vir λ -byna alle $s \in [0, 1]$ dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) d\lambda(t) = f(s).$$

Bewys. Aangesien f 'n λ -meetbare funksie is, volg vanuit Pettis se meetbaarheidstelling dat f λ -byna separabelwaardig is. Sê $f([0, 1] \setminus N)$ is separabel en $\lambda(N) = 0$. Laat (x_n) 'n digte ry in $f([0, 1] \setminus N)$ wees. Dan is elke funksie $\|f - x_n\|$ Lebesgue integreerbaar. Volgens Lebesgue se differensiasie stelling is

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - x_n\| d\lambda(t) = \|f(s) - x_n\|$$

vir λ -byna alle $s \in [0, 1]$ vir elke n . Vir enige so 'n $s \in [0, 1]$ geld dat

$$\begin{aligned} & \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| d\lambda(t) \\ & \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_s^{s+h} \|f(t) - x_n\| d\lambda(t) + \int_s^{s+h} \|x_n - f(s)\| d\lambda(t) \right) = 2\|f(s) - x_n\| \end{aligned}$$

vir alle n . Maar (x_n) is dig in $f([0, 1] \setminus N)$, dus bestaan daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n N_ϵ sodanig dat $\|f(s) - x_{N_\epsilon}\| < \frac{\epsilon}{2}$. Dus as ons $n = N_\epsilon$ kies in die bostaande ongelykheid, dan sien ons dat

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| d\lambda(t) < \epsilon$$

vir λ -byna alle $s \in [0, 1]$. Dit bewys die eerste bewering. Tweedens geld

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) d\lambda(t) - f(s) \right\| \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \|f(t) - f(s)\| d\lambda(t) = 0.$$

Dus is $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) d\lambda(t) = f(s)$ vir λ -byna alle $s \in [0, 1]$. □

Hoofstuk 5

Die Bartle integraal

Die Bartle integraal is die tweede tipe vektorintegraal wat ons bestudeer. Die Bochner integraal brei die Lebesgue integraal uit tot funksies f wat hul waardes in 'n Banach ruimte X aanneem. By die Bochner integraal vind integrasie ten opsigte van 'n volledige maat μ plaas. Bartle het gepoog om vektorwaardige funksies $f : \Omega \rightarrow X$ ten opsigte van 'n vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ te integreer. Om dit reg te kry, werk Bartle onder omstandighede waar daar 'n spesiale verhouding tussen die waardeversamelings X en Y van die funksie f en die vektormaat ν bestaan. Waar die Lebesgue en Bochner integrale gedefinieer word vir (σ -additiewe) mate, kan die Bartle integraal ten opsigte van 'n (eindig additiewe) vektormaat gegee word. Dit is nog 'n manier waarop Bartle die Lebesgue integraal veralgemeen. Die bron wat vir hierdie hoofstuk gebruik word is Bartle se oorspronklike artikel [3], wat steeds die beste beskrywing van die integraal bied.

Laat X, Y en Z Banach ruimtes wees. Neem aan daar bestaan 'n bilineêre afbeelding $\cdot : X \times Y \rightarrow Z$ met $\|x \cdot y\| \leq K\|x\|\|y\|$ vir alle $x \in X$ en $y \in Y$. Ons sal net xy skryf vir $x \cdot y$. Die Bartle integraal word gedefinieer vir vektorwaardige funksies wat hul waardes in X aanneem ten opsigte van 'n vektormaat wat sy waardes in Y aanneem.

5.1 ν -Meetbare funksies

In die eerste deel definieer ons die integraal ten opsigte van 'n vektormaat wat nie noodwendig σ -additief is nie. Beskou dus 'n algebra $\mathcal{F}$ van deelversamelings van Ω en 'n vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$. Ons herhaal nou die definisie van die semivariasie $\hat{\nu}$.

Definisie 5.1.1. (Semivariasie $\hat{\nu}$)(p.338, [3])

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat wees. Ons definieer die semivariasie $\hat{\nu}$ van ν oor 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ deur

$$\hat{\nu}(E) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap E_i) \right\|$$

waar die supremum oor alle eindige disjunkte verdelings $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in \mathcal{F}$ en elemente $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ met $\|x_i\| \leq 1$ geneem word.

Die semivariasie $\hat{\nu}$ is ook vir willekeurige versamelings $A \subseteq \Omega$ gedefinieer deur

$\hat{\nu}(A) = \inf\{\hat{\nu}(E) : E \in \mathcal{F}, A \subseteq E\}$. Die semivariasie $\hat{\nu}$ is 'n submaat (sien proposisie 2.2.3).

Aangesien ons in hierdie afdeling op 'n algebra $\mathcal{F}$ werk, praat ons van $\mathcal{F}$ -trapfunksies $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ waar $(E_i) \in D^{\mathcal{F}}$. Ons definieer nou 'n ν -trapfunksie ten opsigte van die submaat $\hat{\nu}$ (sien definisie 3.2.5).

Definisie 5.1.2. (ν -Trapfunksie)

'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ word 'n ν -trapfunksie of 'n ν -integreerbare trapfunksie genoem as $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ en $\hat{\nu}(E_i) < \infty$ op elke versameling E_i waarvoor $x_i \neq 0$. Ons dui die vektorruimte van ν -trapfunksies deur $\mathcal{S}_{\nu}(\mathcal{F}, X)$ aan.

Op soortgelyke wyse definieer ons konvergensie in ν -maat as konvergensie in $\hat{\nu}$ -maat (sien definisie 3.1.5).

Definisie 5.1.3. (Konvergensie in ν -maat)(p.340, [3])

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat wees. Ons sê 'n ry van funksies $f_n : \Omega \rightarrow X$ konvergeer in ν -maat na f as

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\nu}(\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \epsilon\}) = 0$$

vir elke $\epsilon > 0$.

Net so definieer ons ν -byna oral en ν -byna gelykmatige konvergensie as $\hat{\nu}$ -byna oral en $\hat{\nu}$ -byna gelykmatige konvergensie (sien definisies 3.1.4 en 3.1.6). Ons definieer nou 'n ν -meetbare funksie as die limiet (in ν -maat) van 'n ry ν -trapfunksies.

Definisie 5.1.4. (ν -meetbare funksie)(p.340, [3])

Ons noem $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ν -meetbare funksie as daar 'n ry ν -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat (f_n) in ν -maat na f konvergeer.

Ons dui die vektorruimte van ν -meetbare funksies deur $\mathcal{M}_{\nu}(\Sigma, X)$ aan. 'n ν -Meetbare funksie is dus 'n tipe II $\hat{\nu}$ -meetbare funksie.

5.2 Die integraal van ν -meetbare funksies

Ons begin met die (Bartle) integraal van 'n ν -trapfunksie.

Definisie 5.2.1. (Integraal van 'n ν -trapfunksie)(p.339, [3])

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ν -trapfunksie wees. As $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$, dan word die (Bartle) integraal van f oor 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ gegee deur

$$\int_E f d\nu = \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap E_i).$$

waar die produk $x_i \nu(E \cap E_i)$ in Z is.

Die bostaande integraal van f is onafhanklik van die representasie van die ν -trapfunksie f . Die integraal van 'n ν -trapfunksie het die volgende eienskappe:

Proposisie 5.2.2. (Eienskappe van die integraal van 'n ν -trapfunksie)
(Lemma 1 p.340, [3])

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat wees. Die (Bartle) integraal van 'n ν -trapfunksie het die volgende eienskappe:

1. $\int_E (\cdot) d\nu : \mathcal{S}_\nu(\mathcal{F}, X) \rightarrow Z$ is 'n lineêre afbeelding vir elke $E \in \mathcal{F}$.
2. $\int_{(\cdot)} f d\nu : \mathcal{F} \rightarrow Z$ is 'n additiewe funksie vir elke $f \in \mathcal{S}_\nu(\mathcal{F}, X)$.
3. Vir elke $E \in \mathcal{F}$ geld dat

$$\left\| \int_E f(\omega) d\nu \right\| \leq \|f\|_E \widehat{\nu}(E).$$

Bewys. Laat $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i} \in \mathcal{S}_\nu(\mathcal{F}, X)$ en $E \in \mathcal{F}$.

1. Laat g nog 'n ν -trapfunksie wees en laat $\alpha \in \mathbb{K}$. Skryf f en g met betrekking tot dieselfde verdeling. Sê

$$f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i} \quad \text{en} \quad g = \sum_{i=1}^r y_i \mathcal{I}_{E_i}.$$

Dan is $f + \alpha g = \sum_{i=1}^r (x_i + \alpha y_i) \mathcal{I}_{E_i}$ 'n ν -trapfunksie en

$$\begin{aligned} \int_E (f + \alpha g) d\nu &= \sum_{i=1}^r (x_i + \alpha y_i) \nu(E \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap E_i) + \alpha \sum_{i=1}^r y_i \nu(E \cap E_i) = \int_E f d\nu + \alpha \int_E g d\nu. \end{aligned}$$

2. Laat $E, F \in \mathcal{F}$ disjunkte versamelings wees. Aangesien ν 'n vektormaat is, volg dat

$$\begin{aligned} \int_{E \cup F} f d\nu &= \sum_{i=1}^r x_i \nu((E \cup F) \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap E_i) + \sum_{i=1}^r x_i \nu(F \cap E_i) = \int_E f d\nu + \int_F f d\nu. \end{aligned}$$

3. Aangesien f 'n ν - en dus ook 'n $\mathcal{F}$ -trapfunctie is, is $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^{\mathcal{F}}$. Vir elke i geld ook dat $\|x_i\|/\|f\|_E \leq 1$. Dus is

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f d\nu \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap E_i) \right\| \\ &= \|f\|_E \left\| \sum_{i=1}^r \frac{x_i}{\|f\|_E} \nu(E \cap E_i) \right\| \\ &\leq \|f\|_E \sup \left\| \sum_{i=1}^r x_i \nu(E \cap F_i) \right\| = \|f\|_E \widehat{\nu}(E). \quad \square \end{aligned}$$

Eienskap 2 in die bostaande proposisie sê dus dat die integraal van 'n ν -trapfunctie 'n vektormaat op $\mathcal{F}$ is.

Ons definieer die Bartle integraal vir 'n spesiale deelversameling van die ν -meetbare funksies.

Definisie 5.2.3. (Bartle integreerbare funksie) (Definisie 1 p.341, [3])

Laat f 'n ν -meetbare funksie wees en laat (f_n) 'n ry ν -trapfunksies wees wat in ν -maat na f konvergeer wees. Laat ν_n vir elke n die ooreenstemmende vektormaat

$$\nu_n(E) := \int_E f_n d\nu$$

wees. Ons sê f is 'n ν -Bartle-integreerbare funksie as daar so 'n ry (f_n) bestaan waarvoor geld dat:

1. daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $\delta > 0$ bestaan sodanig dat as $E \in \mathcal{F}$ en $\widehat{\nu}(E) < \delta$, dan $\|\nu_n(E)\| < \epsilon$ vir alle n (die ry (ν_n) is gelykmatig $\widehat{\nu}$ -absoluut kontinu);
2. daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n versameling $\Omega_\epsilon \in \mathcal{F}$ bestaan met $\widehat{\nu}(\Omega_\epsilon) < \infty$ sodanig dat as $E \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, dan $\|\nu_n(E)\| < \epsilon$ vir alle n (die ry (ν_n) is ekwikontinu met betrekking tot $\widehat{\nu}$).

Ons noem die funksie ν -Bartle-integreerbaar om aan te dui dat die funksie Bartle integreerbaar is ten opsigte van die vektormaat ν . Aangesien ons in hierdie hoofstuk net die Bartle integraal bestudeer, sal ons slegs praat van 'n funksie as ν -integreerbaar.

Indien $\widehat{\nu}(\Omega) < \infty$, dan geld voorwaarde 3 hierbo altyd [[vir enige $\epsilon > 0$ neem $\Omega_\epsilon = \Omega$, dan is $\widehat{\nu}(E) = 0$ vir enige $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon = \emptyset$]]. Ons dui die versameling van alle Bartle- ν -integreerbare funksies deur $\mathcal{I}_B^\nu$ aan (of slegs $\mathcal{I}_B$ wanneer dit duidelik is dat ons met ν werk).

As f 'n ν -integreerbare funksie is en (f_n) 'n ry ν -trapfunksies is wat aan die voorwaardes in die bostaande definisie voldoen, dan noem ons (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die (Bartle) integraal van f . Verder noem ons die ry vektormate (ν_n) die ry vektormate deur (f_n) voortgebring. Die definisie van 'n ν -integreerbare funksie is natuurlik op so 'n manier gekonstrueer dat die limiet van 'n ry integrale van definiërende trapfunksies konvergeer.

Stelling 5.2.4. (Stelling 1 p.341, [3])

As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat is, $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ν -integreerbare funksie is en (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is, dan bestaan die limiet

$$\nu_B(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$$

gelykmatig in $E \in \mathcal{F}$ in die norm van Z . Verder is die limiet onafhanklik van die ry definiërende trapfunksies (f_n) .

Bewys. Laat $\epsilon > 0$ en laat (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f wees. Dan is die ry vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring gelykmatig $\hat{\nu}$ -absoluut kontinu en ekwikuin met betrekking tot $\hat{\nu}$. Daar bestaan dus 'n $\delta > 0$ sodanig dat as $E \in \mathcal{F}$ en $\hat{\nu}(E) < \delta$, dan $\|\nu_n(E)\| < \epsilon$ vir alle n en daar bestaan 'n versameling $\Omega_\epsilon \in \mathcal{F}$ sodanig dat $\hat{\nu}(\Omega_\epsilon) < \infty$ en $E \in \mathcal{F}$ met $E \subseteq \Omega_\epsilon$, dan $\|\nu_n(E)\| < \epsilon$ vir alle n . Aangesien die ry (f_n) in ν -maat na f konvergeer, is (f_n) 'n Cauchy ry in ν -maat. Gevolglik bestaan daar 'n $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ en 'n versameling $F \in \mathcal{F}$ sodanig dat $\hat{\nu}(F) < \delta$ en $\|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| < \epsilon/\hat{\nu}(\Omega_\epsilon)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus F$ en elke $n, m \geq n_\epsilon$. Gebruik ons die feit dat

$$E = (E \cap F) \cup (E \setminus F) = (E \cap F) \cup ((E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon) \cup (E \setminus F) \setminus \Omega_\epsilon$$

volg vanuit die einskappe van die integraal van 'n ν -trapfunksie (proposisie 5.2.2), dat

$$\begin{aligned} \|\nu_m(E) - \nu_n(E)\| &= \|\nu_m(E \cap F) - \nu_n(E \cap F) + \nu_m(E \setminus (\Omega_\epsilon \cup F)) - \nu_n(E \setminus (\Omega_\epsilon \cup F)) \\ &\quad + \nu_m((E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon) - \nu_n((E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon)\| \\ &\leq \|\nu_m(E \cap F) - \nu_n(E \cap F)\| + \|\nu_m(E \setminus (\Omega_\epsilon \cup F)) - \nu_n(E \setminus (\Omega_\epsilon \cup F))\| + \\ &\quad \|\nu_m((E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon) - \nu_n((E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon)\| \\ &< 4\epsilon + \left\| \int_{(E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon} (f_m - f_n) d\nu \right\| \\ &\leq 4\epsilon + \frac{\epsilon}{\hat{\nu}(\Omega_\epsilon)} \hat{\nu}((E \setminus F) \cap \Omega_\epsilon) \\ &\leq 5\epsilon \end{aligned}$$

vir elke $n, m \geq n_\epsilon$. Dus is die ry $(\nu_n(E))$ 'n Cauchy ry in die norm van Z vir enige $E \in \mathcal{F}$. Verder is n_ϵ onafhanklik van die versameling $E \in \Sigma$. Die limiet van $(\nu_n(E))$ bestaan dus gelykmatig in $E \in \mathcal{F}$ in die norm van Z .

Ons wys nou dat hierdie limiet onafhanklik van die ry definiërende trapfunksies is. Laat $\epsilon > 0$ en $E \in \mathcal{F}$. Neem aan (f_n) en (g_n) is twee rye definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Dan bestaan daar 'n $\delta_1 > 0$ en 'n $\delta_2 > 0$ sodanig dat

$$\hat{\nu}(F) < \delta_1 \Rightarrow \left\| \int_F f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{6} \quad \text{en} \quad \hat{\nu}(F) < \delta_2 \Rightarrow \left\| \int_F g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Dus, as $\hat{\nu}(F) < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dan is

$$\left\| \int_F (f_n - g_n) d\nu \right\| \leq \left\| \int_F f_n d\nu \right\| + \left\| \int_F g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Verder bestaan daar versamelings $\Omega_\epsilon^f, \Omega_\epsilon^g \in \mathcal{F}$ met $\hat{\nu}(\Omega_\epsilon^f), \hat{\nu}(\Omega_\epsilon^g) < \infty$ sodanig dat as dat as $F, G \in \mathcal{F}$ en $F \subseteq \Omega_\epsilon^f, G \subseteq \Omega_\epsilon^g$, dan

$$\left\| \int_F f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{6} \quad \text{en} \quad \left\| \int_G g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{6}$$

vir alle n . Dus, as $\Omega_\epsilon := \Omega_\epsilon^f \cap \Omega_\epsilon^g$, dan is $\hat{\nu}(\Omega_\epsilon) < \infty$ en as $E \subseteq \Omega_\epsilon$, dan is

$$\left\| \int_E (f_n - g_n) d\nu \right\| \leq \left\| \int_E f_n d\nu \right\| + \left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{3}$$

vir alle n . Stel nou vir elke n die versameling $A_n := \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - g_n(\omega)\| \geq \epsilon/3\hat{\nu}(E \cap \Omega_\epsilon)\}$. Aangesien $f_n \rightarrow f$ en $g_n \rightarrow f$ in ν -maat, volg dat daar 'n n_δ bestaan sodanig dat $\hat{\nu}(A_n) < \delta$ as $n \geq n_\delta$. Per definisie van A_n is $\|f_n(\omega) - g_n(\omega)\| < \epsilon/3\hat{\nu}(E \cap \Omega_\epsilon)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus A_n$. Soos in die berekening in die vorige deel volg dat

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_n d\nu - \int_E g_n d\nu \right\| &\leq \left\| \int_{E \cap A_n} (f_n - g_n) d\nu \right\| + \left\| \int_{(E \setminus A_n) \cap \Omega_\epsilon} (f_n - g_n) d\nu \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{E \setminus (A_n \cup \Omega_\epsilon)} (f_n - g_n) d\nu \right\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\hat{\nu}(E \cap \Omega_\epsilon)} \hat{\nu}((E \setminus A_n) \cap \Omega_\epsilon) + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

vir alle $n \geq n_\delta$. Dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$. $\square$

Definisie 5.2.5. (Bartle integraal) (Stelling 1 p.341, [3])

As $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat is en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ν -integreerbare funksie is, dan definieer ons die Bartle integraal van f oor 'n versameling $E \in \mathcal{F}$ deur

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$$

waar (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is. As $E \in \mathcal{F}$ en $f : E \rightarrow X$ 'n ν -integreerbare funksie is, dan sê ons f is ν -integreerbaar oor E .

Die eienskappe van die Bartle integraal word saamgevat in die volgende stelling:

Stelling 5.2.6. (Eienskappe van die Bartle integraal) (Stelling 2 p.342, [3])

Laat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ 'n vektormaat wees en laat $\mathcal{I}_B$ die ruimte van funksies wees wat Bartle integreerbaar is met betrekking tot ν . Die Bartle integraal het die volgende eienskappe:

1. Die versameling $\mathcal{I}_B$ is 'n vektorruimte en $\int_E (\cdot) d\nu : \mathcal{I}_B \rightarrow Z$ is 'n lineêre afbeelding vir elke $E \in \mathcal{F}$.
2. $\int_{(\cdot)} f d\nu : \mathcal{F} \rightarrow Z$ is 'n additiewe funksie vir elke $f \in \mathcal{I}_B$.
3. $\lim_{\hat{\nu}(E) \rightarrow 0} \int_E f d\nu = 0$ vir elke $f \in \mathcal{I}_B$.
4. Vir elke $f \in \mathcal{I}_B$ en alle $\epsilon > 0$ bestaan daar 'n versameling $\Omega_\epsilon \in \mathcal{F}$ sodanig dat as $E \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq \Omega_\epsilon$, dan $\|\int_E f d\nu\| < \epsilon$.

Bewys. Neem regdeur die bewys aan dat $f \in \mathcal{I}_B$ en dat (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is.

1. Laat $g \in \mathcal{I}_B$ en laat $\alpha \in \mathbb{K}$. Neem aan (g_n) is 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van g . Laat $\epsilon > 0$. Dan bestaan daar 'n $\delta_1 > 0$ en 'n $\delta_2 > 0$ sodanig dat

$$\hat{\nu}(E) < \delta_1 \Rightarrow \left\| \int_E f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{en} \quad \hat{\nu}(E) < \delta_2 \Rightarrow \left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2|\alpha|}$$

vir alle n , en daar bestaan versamelings $F_\epsilon, G_\epsilon \in \mathcal{F}$ sodanig dat $\widehat{\nu}(F_\epsilon) < \infty$, $\widehat{\nu}(G_\epsilon) < \infty$ en

$$E \subseteq \Omega \setminus F_\epsilon \Rightarrow \left\| \int_E f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{en} \quad E \subseteq \Omega \setminus G_\epsilon \Rightarrow \left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2|\alpha|}$$

vir alle n . Vir die ry ν -trapfunksies $(f_n + \alpha g_n)$ geld die volgende

i. $f_n + \alpha g_n \rightarrow f + \alpha g$ in ν -maat (proposisie 3.1.12).

ii. As $E \in \mathcal{F}$ en $\widehat{\nu}(E) < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dan

$$\left\| \int_E (f_n + \alpha g_n) d\nu \right\| \leq \left\| \int_E f_n d\nu \right\| + |\alpha| \left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} + |\alpha| \frac{\epsilon}{2|\alpha|} = \epsilon$$

vir alle n .

iii. As $E \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$ waar $\Omega_\epsilon = F_\epsilon \cup G_\epsilon$, dan is

$$\left\| \int_E (f_n + \alpha g_n) d\nu \right\| \leq \left\| \int_E f_n d\nu \right\| + |\alpha| \left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \epsilon$$

vir alle n en $\widehat{\nu}(\Omega_\epsilon) \leq \widehat{\nu}(F_\epsilon) + \widehat{\nu}(G_\epsilon) < \infty$.

Die ry ν -trapfunksies $(f_n + \alpha g_n)$ is dus 'n ry definiërende trapfunksies vir $f + \alpha g$. Dit wys dat $\mathcal{I}_B$ 'n vektorruimte is. Aangesien die Bartle integraal onafhanklik van die ry definiërende trapfunksies is, volg dat

$$\begin{aligned} \int_E (f + \alpha g) d\nu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + \alpha g_n) d\nu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\nu + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu = \int_E f d\nu + \alpha \int_E g d\nu. \end{aligned}$$

2. Laat $E, F \in \mathcal{F}$ disjunkte versamelings wees. Volgens die eienskappe van die integraal van 'n ν -trapfunksie is

$$\begin{aligned} \int_{E \cup F} f d\nu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cup F} f_n d\nu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n d\nu = \int_E f d\nu + \int_F f d\nu. \end{aligned}$$

3. Die integraal van f is die gelykmatige limiet van die ry vektormate (ν_n) . Daar bestaan dus vir elke $\epsilon > 0$ 'n n_ϵ sodanig dat

$$\left\| \int_E f_n d\nu - \int_E f d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

as $n \geq n_\epsilon$ vir alle $E \in \mathcal{F}$. Aangesien (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is bestaan daar 'n $\delta > 0$ sodanig dat

$$\widehat{\nu}(E) < \delta \Rightarrow \left\| \int_E f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

vir alle n . Neem nou aan $\widehat{\nu}(E) < \delta$, dan is

$$\left\| \int_E f d\nu \right\| \leq \left\| \int_E (f - f_{n_\epsilon}) d\nu \right\| + \left\| \int_E f_{n_\epsilon} d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dit wys dat $\lim_{\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0} \int_E f d\nu = 0$.

4. Laat $\epsilon > 0$. Dan bestaan daar 'n versameling Ω_ϵ met $\widehat{\nu}(\Omega_\epsilon) < \infty$ sodanig dat as $E \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, dan

$$\left\| \int_E f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

vir alle n . Verder is daar 'n n_ϵ sodanig dat

$$\left\| \int_E f d\nu - \int_E f_{n_\epsilon} d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

vir elke $n \geq n_\epsilon$ en alle $E \in \mathcal{F}$. Neem aan $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$ dan is

$$\left\| \int_E f d\nu \right\| \leq \left\| \int_E f d\nu - \int_E f_{n_\epsilon} d\nu \right\| + \left\| \int_E f_{n_\epsilon} d\nu \right\| < \epsilon.$$

Dit voltooi die bewys. □

Definisie 5.2.7. (M-afkapping)(p.339, [3])

Die M -afkapping f^M van 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word gedefinieer deur

$$f^M(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{as } \|f(\omega)\| < M \\ \frac{f(\omega)}{\|f(\omega)\|} M & \text{as } \|f(\omega)\| \geq M. \end{cases}$$

Die M -afkapping van 'n ν -trapfunksie is weer 'n ν -trapfunksie.

Definisie 5.2.8. ($\widehat{\nu}$ -Essensieel begrens, $\widehat{\nu}$ -essensiële supremum)(p.342, [3])

Ons noem 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ $\widehat{\nu}$ -essensieel begrens op $E \subseteq \Omega$ as daar 'n $M > 0$ bestaan sodanig dat

$$\widehat{\nu}(\{\omega \in E : \|f(\omega)\| > M\}) = 0.$$

As f $\widehat{\nu}$ -essensieel begrens is, dan definieer ons die essensiële supremum van f as

$$\text{ess sup}_{\omega \in E} \|f(\omega)\| = \inf\{M > 0 : \widehat{\nu}(\{\omega \in E : \|f(\omega)\| > M\}) = 0\}.$$

Die volgende stelling wys dat die $\widehat{\nu}$ -essensieel begrensde ν -meetbare funksies Bartle integreerbaar is oor 'n versameling waarvan die semivariasie $\widehat{\nu}$ eindig is.

Stelling 5.2.9. (Stelling 3 p.342, Stelling 4 p.343, [3])

As $f : \Omega \rightarrow X$ $\widehat{\nu}$ -essensieel begrens en ν -meetbaar is en $E \in \mathcal{F}$ met $\widehat{\nu}(E) < \infty$, dan is f ν -integreerbaar oor E en

$$\left\| \int_E f d\nu \right\| \leq \text{ess sup}_{\omega \in E} \|f(\omega)\| \widehat{\nu}(E).$$

Bewys. Laat (f_n) 'n ry van ν -trapfunksies wees wat in ν -maat na f konvergeer. Laat $E \in \mathcal{F}$ waar $\widehat{\nu}(E) < \infty$ en stel $M_1 = \text{ess sup}_{\omega \in E} \|f(\omega)\|$. Dan bestaan daar 'n versameling $N \in \mathcal{F}$ sodanig dat $\widehat{\nu}(N) = 0$ en $\{\omega \in E : \|f(\omega)\| \geq M_1 + 1\} \subseteq N$. Laat $M = M_1 + 2$ en stel $N_\alpha^n = \{\omega \in E : \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \geq \alpha\}$ vir $\alpha \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\{\omega \in E : \|f_n(\omega)\| \geq M\} \subseteq N \cup N_1^n.$$

Kies 'n willekeurige $\epsilon > 0$ en laat f_n^M die M -afkapping van die ν -trapfunksie f_n wees. As $\|f_n(\omega)\| < M$, dan is $\|f_n(\omega) - f_n^M(\omega)\| = 0$. Dit beteken dat $\|f_n(\omega) - f_n^M(\omega)\| \geq \epsilon$ net kan plaasvind as $\|f_n(\omega)\| \geq M$ en dus is

$$\{\omega \in E : \|f_n(\omega) - f_n^M(\omega)\| \geq \epsilon\} \subseteq \{\omega \in E : \|f_n(\omega)\| \geq M\} \subseteq N \cup N_1^n.$$

Gevolgtlik kry ons

$$\begin{aligned} \{\omega \in E : \|f(\omega) - f_n^M(\omega)\| \geq 2\epsilon\} &\subseteq \{\omega \in E : \|f_n(\omega)\| \geq M\} \cup N_\epsilon^n \\ &\subseteq N \cup N_1^n \cup N_\epsilon^n. \end{aligned}$$

Aangesien $f_n \rightarrow f$ in ν -maat en $\widehat{\nu}(N) = 0$, volg dat

$$\widehat{\nu}(\{\omega \in E : \|f(\omega) - f_n^M(\omega)\| \geq 2\epsilon\}) \leq \widehat{\nu}(N) + \widehat{\nu}(N_1^n) + \widehat{\nu}(N_\epsilon^n) \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$. Dit wys dat die ry ν -trapfunksies (f_n^M) in ν -maat na f konvergeer. Ons wys nou dat hierdie ry 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is:

As $\epsilon > 0$, stel $\delta = \epsilon/M$, dan volg vanuit proposisie 5.2.2 dat $\|\int_E f_n^M\| \leq M\widehat{\nu}(E) < \epsilon$ vir alle n as $\widehat{\nu}(E) < \delta$. Die ry (f_n^M) is dus gelykmatig $\widehat{\nu}$ -absoluut kontinu.

Aangesien $\widehat{\nu}(E) < \infty$, volg dat die ry (f_n^M) outomaties ekwikontinu is met betrekking tot $\widehat{\nu}$ oor die versameling E .

Die funksie f is dus Bartle integreerbaar met betrekking tot ν en (f_n^M) is 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f .

Tweedens, om die ongelykheid in die stelling te bewys, kies 'n $\epsilon > 0$ willekeurig. Stel $M_\epsilon = \text{ess sup}_{\omega \in E} \|f(\omega)\| + \epsilon$. Dan is die ry M_ϵ -afkappings $(f_n^{M_\epsilon})$ 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Volgens proposisie 5.2.2, geld

$$\|\nu_n(E)\| = \left\| \int_E f_n^{M_\epsilon} d\nu \right\| \leq M_\epsilon \widehat{\nu}(E)$$

vir elke n . Aangesien die integraal van f die gelykmatige limiet van die ry (ν_n) is, volg

$$\left\| \int_E f d\nu \right\| \leq (\text{ess sup}_{\omega \in E} \|f(\omega)\| + \epsilon) \widehat{\nu}(E).$$

Ons kan dit bewys vir enige $\epsilon > 0$, dus volg die gevraagde ongelykheid. $\square$

Die volgende stelling wys dat as (f_n) 'n ry ν -integreerbare funksies is wat aan dieselfde voorwaardes as 'n ry definiërende trapfunksies voldoen, dan is die limiet van die integrale van f_n gelyk aan die integraal van die limiet f .

Stelling 5.2.10. (Vitali konvergenstelling) (Stelling 5 p.343, [3])

Beskou 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ en 'n ry funksies $(f_n) \subseteq \mathcal{I}_B$ wat aan die volgende voorwaardes voldoen:

1. Die ry (f_n) konvergeer in ν -maat na f .
2. Die ry vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring is gelykmatig $\hat{\nu}$ -absoluut kontinu.
3. Die ry vektormate (ν_n) is ekwikontinu met betrekking $\hat{\nu}$.

Dan is f 'n ν -Bartle integreerbare funksie en

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$$

gelykmatig in $E \in \mathcal{F}$.

Bewys. Vir elke ν -integreerbare funksie f_n bestaan daar 'n ry definiërende trapfunksies $(g_k^{(n)})$. Ons konstrueer 'n ry definiërende trapfunksies (g_n) vir die integraal van f . Vir elke n bestaan daar 'n $k_1^{(n)}$ sodanig dat

$$\hat{\nu} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \|g_k^{(n)}(\omega) - f_n(\omega)\| \geq \frac{1}{2^n} \right\} \right) < \frac{1}{2^n}$$

vir alle $k \geq k_1^{(n)}$, want $(g_k^{(n)})$ konvergeer in ν -maat na f_n . Verder bestaan daar 'n $k_2^{(n)}$ sodanig dat

$$\left\| \int_E g_k^{(n)} d\nu - \int_E f_n d\nu \right\| < \frac{1}{2^n}$$

vir alle $k \geq k_2^{(n)}$ en alle E , want $\int_E f_n d\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k^{(n)} d\nu$ gelykmatig in E . Laat $M_n = \max\{k_1^{(n)}, k_2^{(n)}\}$ en stel $g_n = g_{M_n}^{(n)}$. Ons wys nou dat die ry ν -trapfunksies (g_n) aan die nodige voorwaardes voldoen om 'n definiërende ry vir die integraal van f te wees. Vir elke n en vir alle $E \in \mathcal{F}$ is

$$\left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \left\| \int_E f_n d\nu \right\| + \frac{1}{2^n}.$$

1. Laat $\epsilon > 0$. Dan is

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - g_n(\omega)\| \geq 2\epsilon\} \\ & \subseteq \{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \geq \epsilon\} \cup \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega) - g_n(\omega)\| \geq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Vir n groot genoeg, sê n_ϵ , is $1/2^n < \epsilon$ vir alle $n \geq n_\epsilon$. Dus is $\hat{\nu}(\{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - g_n(\omega)\| \geq 2\epsilon\}) < 2\epsilon$ as $n \geq n_\epsilon$. Dit wys dat die ry (g_n) in ν -maat na f konvergeer.

2. Laat $\epsilon > 0$. Daar bestaan 'n $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sodanig dat $1/2^n < \epsilon/2$ vir alle $n \geq n_\epsilon$. Gebruik die gelykmatige $\hat{\nu}$ -absoluut kontinuïteit van die ry (ν_n) om 'n $\delta_0 > 0$ te kry sodanig dat $\|\int_E f_n d\nu\| < \epsilon/2$ as $\hat{\nu}(E) < \delta_0$ vir alle n . Dan is

$$\left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

as $\hat{\nu}(E) < \delta_0$ vir alle $n \geq n_\epsilon$. Vir $k = 1, 2, \dots, n_\epsilon - 1$ kan ons telkens 'n δ_k kies sodanig dat $\|\int_E g_k d\nu\| < \epsilon$ as $\hat{\nu}(E) < \delta_k$. Stel $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n_\epsilon-1}\}$. Dan is $\|\int_E g_n d\nu\| < \epsilon$ as $\hat{\nu}(E) < \delta$ vir alle n .

3. Laat $\epsilon > 0$. Kies weer n_ϵ groot genoeg dat $1/2^n < \epsilon/2$ vir alle $n \geq n_\epsilon$. Volgens die ekwi $\widehat{\nu}$ -kontinuiteit van (ν_n) kan ons 'n versameling $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ met $\widehat{\nu}(\Omega_0) < \infty$ kry sodanig dat $\|\int_E f_n d\nu\| < \epsilon/2$ as $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_0$ vir alle $n \geq n_\epsilon$. Dus, as $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_0$, dan is

$$\left\| \int_E g_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

vir alle $n \geq n_\epsilon$. Kies vir elke $k = 1, 2, \dots, n_\epsilon - 1$ 'n versameling Ω_k met $\widehat{\nu}(\Omega_k) < \infty$ sodanig dat as $E \subseteq \Omega_k$, dan $\|\int_E g_k d\nu\| < \epsilon$. Stel $\Omega_\epsilon = \bigcup_{k=0}^{n_\epsilon-1} \Omega_k$. Dan is $\widehat{\nu}(\Omega_\epsilon) < \infty$ en as $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, dan is $\|\int_E g_n d\nu\| < \epsilon$ vir alle n , want as $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, dan is $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_k$ vir elke $k = 0, 1, \dots, n_\epsilon - 1$.

Die funksie f is dus ν -integreerbaar en (g_n) is 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Volgens stelling 5.2.4 is $\int_E f d\nu$ die gelykmatige limiet van die ry $(\int_E g_n d\nu)$. Vir enige $\epsilon > 0$ bestaan daar dus 'n n_ϵ sodanig dat

$$\left\| \int_E g_n d\nu - \int_E f d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

vir alle $n \geq n_\epsilon$ en vir alle $E \in \mathcal{F}$. Kies n_ϵ boonop so groot dat $1/2^{n_\epsilon} < \epsilon/2$. Dan is

$$\left\| \int_E f d\nu - \int_E f_n d\nu \right\| \leq \left\| \int_E f d\nu - \int_E g_n d\nu \right\| + \left\| \int_E g_n d\nu - \int_E f_n d\nu \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

vir alle $n \geq n_\epsilon$. Dit wys dat $\int_E f d\nu$ die gelykmatige limiet oor $E \in \mathcal{F}$ van die ry $(\int_E f_n d\nu)$ is. $\square$

As $X = \mathbb{K}$ of $Y = \mathbb{K}$, dan impliseer die integreerbaarheid van f die integreerbaarheid van $|f|$, want $|f| = f^+ - f^-$. In hierdie geval kan ons die Vitali konvergenstelling toepas om 'n gedomineerde konvergenstelling vir die Bartle integraal te kry. In die algemeen is dit egter nie so nie. Die volgende voorbeeld wys dat daar funksies f bestaan wat Bartle integreerbaar is, waarvoor $\|f\|$ nie noodwendig integreerbaar is nie.

Voorbeeld 5.2.11. (Voorbeeld (a) p.344, [3])

Laat $X = Y = \mathbb{R}^3$ met bilineêre afbeelding $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Laat $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ en $e_3 = (0, 0, 1)$ die eenheidsvektore wees. Laat $\mathcal{F}$ die versameling van Lebesgue deelversamelings van $\Omega = [0, 1]$ wees en laat λ die Lebesgue maat op $[0, 1]$ wees. Stel $\nu(E) = \lambda(E)e_1$ vir $E \in \mathcal{F}$.

Beskou die funksie $g(\omega) := (1/\omega)e_2$. Laat (ϕ_n) 'n ry reële trapfunksies wees sodanig dat $\phi_n(\omega) \uparrow \phi(\omega) := 1/\omega$ op $[0, 1]$. Omdat $\mu([0, 1]) < \infty$, konvergeer ϕ_n in maat na ϕ . Stel $g_n = \phi_n e_2$. Dan geld:

- i. (g_n) konvergeer in ν -maat na g ;
- ii. vir alle $E \in \mathcal{F}$ en elke n is $\mu(E)$ en $g_n(\omega)$ orthogonaal in $\mathbb{R}^3$ en dus is

$$\nu_n(E) = \int_E g_n d\nu = 0.$$

Gevollik is die ry vektormate (ν_n) gelykmatig $\widehat{\nu}$ -absoluut kontinu.

- iii. Aangesien $\widehat{\nu}([0, 1]) = 1 < \infty$ is (ν_n) ekwikontinu met betrekking tot $\widehat{\nu}$.

Die ry (g_n) is dus 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van g en

$$\int_E g d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = 0.$$

Die funksie $\|g\| : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \omega \rightarrow 1/\omega$ is egter nie ν -integreerbaar oor $[0, 1]$ nie.

Die volgende voorbeeld wys dat 'n algemene weergawe van Lebesgue se gedomineerde konvergenstelling nie geld nie.

Voorbeeld 5.2.12. (Voorbeeld (b) p.344, [3])

Beskou weer die funksie $g(\omega) := (1/\omega)e_2$ van die vorige voorbeeld. Vir elke n , stel $f_n(\omega) := \omega^{-1+1/n}e_1$ en stel $f_0(\omega) = (1/\omega)e_1$. Dan is

$$|f_n(\omega)| = \omega^{-(1-\frac{1}{n})} \leq \omega^{-1} = \|g(\omega)\|$$

vir elke n en alle $\omega \in [0, 1]$. Elke funksie f_n is ν -integreerbaar en $f_n \rightarrow f_0$ in ν -maat $\|f_n(\omega) - f_0(\omega)\| = |\omega^{-1+1/n} - \omega^{-1}| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ vir alle $\omega \in (0, 1]$, dus $\hat{\nu}(\{\omega \in [0, 1] : \|f_n(\omega) - f_0(\omega)\| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0$ vir enige $\epsilon > 0$. Die funksie f_0 is egter nie ν -integreerbaar nie, want $1/\omega$ is nie λ -integreerbaar oor $[0, 1]$ nie.

Die volgende voorbeeld wys dat die omgekeerde van Vitali se konvergenstelling nie geld nie.

Voorbeeld 5.2.13. (voorbeeld (c) p.344, [3])

Laat $\Omega, \mathcal{F}, \lambda, X, Y$ en ν weer wees soos in die vorige voorbeelde. Laat $h_0(\omega) := 1e_2$ en $h_n(\omega) = 1e_3$ vir elke n . Dan is elke h_n en h_0 'n ν -integreerbare funksie en, omdat die funksies en ν ortogonaal is in $\mathbb{R}^3$, is

$$0 = \int_E h_0 d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n d\nu$$

vir alle $E \in \mathcal{F}$. As $\nu_n(E) = \int_E h_n d\nu$, dan is $\nu_n(E) = 0$ vir elke n en alle $E \in \mathcal{F}$. Dus is die ry (ν_n) gelykmatig $\hat{\nu}$ -absoluut kontinu en ekwikontinu. Die ry (h_n) voldoen dus aan voorwaardes 2 en 3 van Vitali se konvergenstelling, maar (h_n) kan op geen manier na h_0 konvergeer nie.

Ten spyte van voorbeeld 5.2.12, kan ons wel 'n tipe gedomineerde konvergenstelling bewys. Die verskil hier is dat die integrale van die ry funksies (f_n) deur die integraal van 'n funksie g gedomineer word. By die klassieke stelling word slegs vereis dat die funksies f_n deur g gedomineer word (wat dan ook impliseer dat die integrale van f_n deur die integraal van g gedomineer word).

Stelling 5.2.14. (Gedomineerde konvergenstelling) (Stelling 6 p.345, [3])

Laat (f_n) 'n ry ν -integreerbare funksies wees wat in ν -maat na f konvergeer. As daar 'n ν -integreerbare funksie g bestaan sodanig dat

$$\left\| \int_E f_n d\nu \right\| \leq \left\| \int_E g d\nu \right\|$$

vir elke $n \in \mathbb{N}$ en alle $E \in \mathcal{F}$, dan is f 'n ν -integreerbare funksie en

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$$

vir alle $E \in \mathcal{F}$.

Bewys. Laat $\epsilon > 0$. Aangesien g 'n ν -integreerbare funksie is, volg vanuit die eenskappe van die Bartle integraal (stelling 5.2.6), dat daar 'n $\delta > 0$ bestaan sodanig dat as $\widehat{\nu}(E) < \delta$, dan $\|\int_E g d\nu\| < \epsilon$. Verder bestaan daar 'n versameling $\Omega_\epsilon \in \mathcal{F}$ met $\widehat{\nu}(\Omega_\epsilon) < \infty$ sodanig dat as $E \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, dan $\|\int_E g d\nu\| < \epsilon$. Gevolglik voldoen die ry (f_n) aan al die voorwaardes van Vitali se konvergenstelling (stelling 5.2.10):

1. (f_n) konvergeer in ν -maat na f .
2. As $\widehat{\nu}(E) < \delta$, dan is $\|\int_E f_n d\nu\| \leq \|\int_E g d\nu\| < \epsilon$ vir alle n .
3. As $E \in \mathcal{F}$ en $E \subseteq \Omega \setminus \Omega_\epsilon$, dan $\|\int_E f_n d\nu\| \leq \|\int_E g d\nu\| < \epsilon$ vir alle n .

Dus is $\int_E f d\nu$ die gelykmatige limiet van $(\int_E f_n d\nu)$. $\square$

Vanuit Vitali se stelling kry ons ook 'n begrensde konvergenstelling.

Stelling 5.2.15. (Begrensde konvergenstelling) (Stelling 7 p.345, [3])

Laat (f_n) 'n ry ν -integreerbare funksies wees wat in ν -maat na f konvergeer. As $M > 0$ en $\|f(\omega)\| \leq M$ vir $\widehat{\nu}$ -byna alle $\omega \in \Omega$, dan is f ν -integreerbaar oor enige versameling $E \in \mathcal{F}$ met $\widehat{\nu}(E) < \infty$ en

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu.$$

Bewys. Neem aan $E \in \mathcal{F}$ en $\widehat{\nu}(E) < \infty$. Ons wys die ry (f_n) voldoen aan die voorwaardes van Vitali se stelling:

1. (f_n) konvergeer in ν -maat na f .
2. As $\epsilon > 0$, stel $\delta = \epsilon/M$, dan, as $\widehat{\nu}(E) < \delta$, dan is $\|\int_E f_n d\nu\| \leq M\widehat{\nu}(E) < \epsilon$.
3. Uit die aanname dat $\widehat{\nu}(E) < \infty$ volg die ekwi $\widehat{\nu}$ -kontinuïteit outomaties.

Dus volg dat $\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$. $\square$

Verder as (f_n) 'n ry ν -integreerbare funksies wat ν -byna oral gelykmatig na f konvergeer, dan is f ν -integreerbaar oor enige versameling van eindige $\widehat{\nu}$ semivariësie.

Stelling 5.2.16. (Stelling 8 p.345, [3])

As (f_n) 'n ry ν -integreerbare funksies is wat gelykmatig ν -byna oral na f konvergeer, dan is f ν -integreerbaar oor enige versameling $E \in \mathcal{F}$ met $\widehat{\nu}(E) < \infty$ en

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu.$$

Bewys. Neem aan (f_n) is 'n ry ν -integreerbare funksies wat ν -byna oral gelykmatig na f konvergeer en $\widehat{\nu}(E) < \infty$. Dan bestaan daar 'n ν -nulversameling $N \in \mathcal{F}$ sodanig dat $f_n \rightarrow f$ gelykmatig op $E \setminus N$. Dus konvergeer (f_n) ook ν -byna gelykmatig na f op E . Volgens stelling 3.1.7 op p.71 konvergeer (f_n) ook in ν -maat na f op E . Dit is die eerste voorwaarde van Vitali se stelling.

Stel $\nu_n(E) := \int_E f_n d\nu$ vir elke n . Laat $\epsilon > 0$. Aangesien die ry (f_n) gelykmatig Cauchy op $\Omega \setminus N$ is, bestaan daar 'n n_ϵ sodanig dat $\sup_{\omega \in \Omega \setminus N} \|f_n(\omega) - f_m(\omega)\| <$

$\epsilon/(2\hat{\nu}(E \setminus N))$ as $n, m \geq n_\epsilon$. Verder kan ons volgens stelling 5.2.6(3) 'n $\delta_0 > 0$ kry sodanig dat $\|\nu_{n_\epsilon}(E)\| < \epsilon/2$ as $\hat{\nu}(E) < \delta_0$. Dus, as $\hat{\nu}(E) < \delta_0$ en $n \geq n_\epsilon$, dan is

$$\begin{aligned}\|\nu_n(E)\| &\leq \left\| \int_{E \setminus N} (f_{n_\epsilon} - f_n) d\nu \right\| + \left\| \int_E f_{n_\epsilon} d\nu \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{2\hat{\nu}(E \setminus N)} \hat{\nu}(E \setminus N) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Op soortgelyke wyse as die bewys van Vitali se stelling kan ons vir elke $n = n_1, n_2, \dots, n_\epsilon - 1$ 'n $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_\epsilon-1}$ kry dat $\|\nu_k(E)\| < \epsilon$ as $\hat{\nu}(E) < \delta_k$. Dus as $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n_\epsilon-1}\}$, dan is $\|\nu_n(E)\| < \epsilon$ as $\hat{\nu}(E) < \delta$ vir alle n . Dus is (ν_n) gelykmatig ν -kontinu. Dis die tweede voorwaarde van Vitali se stelling.

Laastens neem ons aan dat $\hat{\nu}(E) < \infty$, dus is (ν_n) ekwikontinu met betrekking tot $\hat{\nu}$ oor E . Dis die laaste voorwaarde wat bevredig moet word.

Volgens Vitali se stelling is $\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$. □

5.3 Die σ -additiewe geval

Sover het ons net gewerk met 'n eindig additiewe vektormaat $\nu : \mathcal{F} \rightarrow Y$ op die algebra $\mathcal{F}$. Ons beskou nou 'n σ -algebra Σ van deelversamelings van Ω en 'n σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$. Die Bartle integraal van 'n ν -integreerbare funksie is self 'n σ -additiewe vektormaat op Σ .

Stelling 5.3.1. (p.346, [3])

As $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ 'n σ -additiewe vektormaat en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ν -Bartle integreerbare funksie is, dan is die vektormaat

$$\nu_B(E) := \int_E f d\nu, \quad E \in \Sigma$$

σ -additief op Σ .

Bewys. In stelling 5.2.6(2) het ons reeds gesien dat ν_B 'n vektormaat is. Laat (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f wees, sê $f_n = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$. Laat $(F_m) \subseteq \Sigma$ 'n ry disjunkte versamelings wees. Dan is

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m} f_n d\nu &= \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \nu \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \cap E_i^{(n)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \sum_{m=1}^{\infty} \nu(F_m \cap E_i^{(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} \sum_{m=1}^{\infty} x_i^{(n)} \nu(F_m \cap E_i^{(n)}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \nu(F_m \cap E_i^{(n)}) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{F_m} f_n d\nu. \end{aligned}$$

Waar ons die orde van sommasie kan omruil omdat die reeks onvoorwaardelik konvergent is (ν is σ -additief op die σ -algebra Σ). Per definisie is

$$\nu_B \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \right) = \int_{\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m} f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m} f_n d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{F_m} f_n d\nu$$

en die konvergensie vind gelykmatig plaas (stelling 5.2.4). Ons kan dus die som en limiet omruil en dus is

$$\nu_B \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{F_m} f_n d\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{F_m} f d\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \nu_B(F_m) \quad \square$$

Onthou dat 'n σ -additiewe vektormaat ν op 'n σ -algebra 'n sterk additiewe vektormaat is. Volgens die Bartle-Dunford-Schwartz lemma (gevolg 1.3.17 op p.33) bestaan daar 'n eindige maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ sodanig dat $\|\nu\|(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\mu(E) \rightarrow 0$. As hierdie eienskap ook vir die semivariasie $\hat{\nu}$ geld, dan sê Bartle ν het die *-eienskap.

Definisie 5.3.2. (Bartle *-eienskap)(Definisie 2 p.346, [3])

Ons sê 'n σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ het die *-eienskap met betrekking tot X as daar 'n eindige maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ bestaan sodanig dat $\mu(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0$.

Voorbeeld 5.3.3. (Vektormate met die *-eienskap)(p.436, [3])

Daar is verskeie omstandighede waaronder 'n vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ die *-eienskap kan hê:

1. As $y^*\nu$ 'n eindige σ -additiewe maat is vir elke $y^* \in Y^*$, dan het ν die *-eienskap met betrekking tot $\mathbb{K}$.
2. As $X = \mathbb{K}$, dan stem die semivariasies $\|\nu\|$ en $\widehat{\xi}$ ooreen, dus het ν die *-eienskap volgens die lemma van Bartle-Dunford-Schwartz.
3. As $Y = \mathbb{K}$, dan is ν 'n skalaarmaat en dus $|\nu| = \|\nu\| = \widehat{\nu}$. In hierdie geval het ν ook die *-eienskap.

Die volgende belangrike feit word nie bewys in [3] nie.

Proposisie 5.3.4. (p.346, [3])

As 'n σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ die *-eienskap het, dan is $\widehat{\nu}(\Omega) < \infty$.

Bewys. Laat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n eindige maat wees sodanig dat $\mu(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0$. Aangesien μ eindig is, kan ons (Ω, Σ) ontbind in 'n difuse maatruimte (Ω_2, Σ_2) en 'n maatruimte (Ω_1, Σ_1) waar Σ_1 uit 'n aftelbare aantal atome bestaan. Dit wil sê $\Sigma_1 = (E_n) \subseteq \Sigma$, $\mu(E_n) > 0$ vir alle n en vir elke n geld dat as $F_n \in \Sigma$, $F_n \subset E_n$ en $\mu(F_n) < \mu(E_n)$, dan is $\mu(F_n) = 0$.

As $E \in \Sigma_1$ en $(E_i) \in D^\Sigma$, dan is

$$\sum_{i=1}^r \mu(E \cap E_i) = \mu(E).$$

Maar μ is nie-negatief en $E \in \Sigma_1$. Dus is daar presies een $1 \leq i \leq r$, sê $i = j$ sodanig dat $\mu(E) = \mu(E \cap E_j)$ en $\mu(E \cap E_i) = 0$ vir alle $i \neq j$. Maar dan is $\|\nu(E \cap E_i)\| \leq \widehat{\nu}(E \cap E_i) = 0$ as $i \neq j$, want $\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\mu(E) \rightarrow 0$. Dit impliseer $\nu(E \cap E_i) = 0$ as $i \neq j$. Beskou ν as die operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Z)$ waar $\xi(E)x := x\nu(E)$. Dan is

$$\widehat{\xi}(E) = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i \right\| = \sup_{F \in \Sigma} \sup_{\|x\| \leq 1} \|\xi(E \cap F)x\|$$

en aangesien $\|\xi(E)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\xi(E)x\|$ geld op dieselfde manier dat

$$\begin{aligned} \|\xi\|(E) &= \sup_{|\alpha_i| \leq 1} \sup_{(E_i) \in D^\Sigma} \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi(E \cap E_i) \right\| \\ &= \sup_{F \in \Sigma} \sup_{|\alpha| \leq 1} \|\xi(E \cap F)\alpha\| \\ &= \sup_{F \in \Sigma} \sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha \xi(E \cap F)x\| \\ &= \sup_{F \in \Sigma} \sup_{\|x\| \leq 1} \|\xi(E \cap F)x\|. \end{aligned}$$

Dus is $\widehat{\xi}(E) = \|\xi\|(E)$ vir alle $E \in \Sigma_1$. Maar ν is σ -additief op Σ_1 . Dit impliseer dat ν 'n begrensde vektormaat op (Ω_1, Σ_1) is (gevolg 1.3.9 op 27). Dit beteken $\|\nu\|(\Omega_1) = \widehat{\nu}(\Omega_1) < \infty$.

Tweedens, aangesien (Ω_2, Σ_2) 'n difuse maatruimte is, bestaan daar vir elke $\delta > 0$ 'n eindige verdeling $(E_i) \in D^{\Sigma_2}$ sodanig dat $\mu(E_i) < \delta$ vir elke i . Verder aangesien $\mu(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0$, bestaan daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $\delta > 0$ sodanig dat as $\mu(E) < \delta$ dan is $\widehat{\nu}(E) < \epsilon$. Dus is

$$\widehat{\nu}(\Omega_2) \leq \sum_{i=1}^r \widehat{\nu}(E_i) < \epsilon \cdot r < \infty$$

waar (E_i) 'n eindige disjunkte verdeling van Ω_2 is sodanig dat $\mu(E_i) < \delta$ vir elke i . Tesame met die vorige deel volg dat $\widehat{\nu}(\Omega) \leq \widehat{\nu}(\Omega_1) + \widehat{\nu}(\Omega_2) < \infty$. $\square$

Sê nou die σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ het die $*$ -eienskap, dit wil sê, $\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\mu(E) \rightarrow 0$ vir een of ander eindige maat μ . Dan is $\widehat{\nu}$ eindig en as $(E_n) \subseteq \Sigma$ en $E_n \downarrow \emptyset$, dan $\mu(E_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, want μ is 'n eindige maat. Maar dan $\widehat{\nu}(E_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Dit beteken $\widehat{\nu}$ is 'n kontinue submaat $\widehat{\nu}$. Maar dan is $\widehat{\nu}$ ook σ -subadditief. Dus, as $\rho = \widehat{\nu}$, dan is 'n ν -meetbare funksie 'n (II) ρ -meetbare funksie. As ν die $*$ -eienskap het dan volg dat f ook 'n (I) ρ -meetbare funksie is.

Proposisie 5.3.5.

As ν die $*$ -eienskap het, dan is 'n funksie f 'n ν -meetbare funksie as en slegs as daar 'n ry ν -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat (f_n) ν -byna oral na f konvergeer.

Bewys. As ν die $*$ -eienskap het, dan is $\widehat{\nu}$ 'n kontinue submaat en $\widehat{\nu}(\Omega) < \infty$. Volgens proposisie 3.2.9 val die (I) $\widehat{\nu}$ -meetbare- (dit wil sê, ν -meetbare-) en (II) $\widehat{\nu}$ -meetbare funksies saam. Die (II) $\widehat{\nu}$ -meetbare funksies is presies die funksies wat die ν -byna oral limiet van ν -trapfunksies is. $\square$

Volgens gevolg 3.2.24 op p.87 is die ruimte $\mathcal{M}_\nu(\Sigma, X)$ geslote is onder die neem van ν -byna oral limiete as ν die $*$ -eienskap het.

Die volgende stelling wys dat die definisie van die Bartle integraal vereenvoudig as die vektormaat ν die $*$ -eienskap het.

Stelling 5.3.6. (Stelling 9 p.247, [3])

Neem aan ν het die $*$ -eienskap, dan is 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ ν -integreerbaar as en slegs as daar 'n ry ν -trapfunksies (f_n) bestaan sodanig dat

1. $f_n \rightarrow f$ ν -byna oral.
2. Die ry $(\nu_n(E))$ konvergeer in die norm van Z vir elke $E \in \Sigma$.

Bewys. Neem aan $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is 'n eindige maat sodanig dat $\mu(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0$. Dan is $\widehat{\nu}$ 'n eindige kontinue submaat.

Neem aan f is ν -integreerbaar. Dan bestaan daar 'n ry ν -trapfunksies (f_n) wat in ν -maat na f konvergeer. Laat (ν_n) die ry vektormate deur hierdie trapfunksies voortgebring wees. Dan is die ry gelykmatig $\widehat{\nu}$ -absoluut kontinu en ekwikontinu met betrekking tot $\widehat{\nu}$. Volgens stelling 3.1.8, bestaan daar 'n deelry (f_{n_k}) wat ν -byna gelykmatig na f konvergeer. Die deelry (ν_{n_k}) voldoen aan dieselfde voorwaardes waaraan (ν_n) voldoen. Dus volg vanuit stelling 5.2.4 dat die ry $(\nu_{n_k}(E))$

gelykmatig in die norm van Z konvergeer vir elke $E \in \Sigma$.

Andersom, as (f_n) 'n ry ν -trapfunksies is wat aan die voorwaardes van die stelling voldoen, dan konvergeer (f_n) ook in ν -maat na f volgens stellings 3.1.10 en 3.1.7.

Tweedens, aangesien elke ν_n die integraal van 'n ν -trapfunksie is, volg dat $\lim_{\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0} \nu_n(E) = 0$ vir elke n (sien proposisie 5.2.2). Maar dan geld ook dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu_n(E) = 0$ vir elke n . Per aanname bestaan die funksie $\nu_B(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$. Volgens stelling 5.3.1 is elke ν_n 'n σ -additiewe vektormaat. Dus volg vanuit die Vitali-Hahn-Saks stelling (stelling 1.5.17) dat $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \nu_n(E) = 0$ gelykmatig in n . Maar dan volg dat $\lim_{\widehat{\nu}(E) \rightarrow 0} \nu_n(E) = 0$ gelykmatig in n . Dit beteken (ν_n) is gelykmatig $\widehat{\nu}$ -absoluut kontinu.

Derdens, aangesien ν die $*$ -eienskap het, volg dat $\widehat{\nu}(\Omega) < \infty$. Die ekwikontinuiteit van (ν_n) volg dus automaties.

Die ry (f_n) is 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Die funksie f is dus ν -integreerbaar. $\square$

Laastens gee ons Vitali se konvergensiestelling vir ν -integreerbare funksies waar ν die $*$ -eienskap het.

Stelling 5.3.7. (stelling 10 p.347, [3])

As ν die $*$ -eienskap het en (f_n) 'n ry van ν -integreerbare funksies is wat aan die volgende voldoen:

1. (f_n) konvergeer ν -byna oral na f .
2. As $\epsilon > 0$, dan bestaan daar 'n $\delta > 0$ sodanig dat as $E \in \Sigma$ en $\widehat{\nu}(E) < \delta$, dan is

$$\left\| \int_E f_n d\nu \right\| < \epsilon$$

vir elke n .

Dan is f 'n ν -integreerbare funksie en

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu$$

gelykmatig in $E \in \Sigma$.

Hoofstuk 6

Die Dobrakov integraal

Die Dobrakov integraal is die laaste vektorintegraal wat ons gaan bestudeer. Laat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Laat X, Y en Z Banach ruimtes wees. Bartle het die integraal van vektorwaardige funksies $f : \Omega \rightarrow X$ ten opsigte van 'n vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Z$ gedefinieer waar daar 'n bilineêre afbeelding op $X \times Z$ bestaan. Enige so 'n vektormaat kan as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ beskou word. Dobrakov definieer 'n integraal van X -waardige funksies ten opsigte van 'n σ -additiewe $L(X, Y)$ -waardige operatormaat. Bartle se maat is 'n σ -additiewe vektormaat (ξ is σ -additief in die GOT van $L(X, Y)$) waar Dobrakov se maat 'n σ -additiewe operatormaat is (ξ is σ -additief in die SOT van $L(X, Y)$).

6.1 ξ -Meetbare funksies

Die teorie van die Dobrakov integraal ontwikkel ons soos Dobrakov dit in sy artikel [9] gedoen het. Ons gebruik egter die resultate wat ons in afdeling 3.2 gekry het om die resultate duideliker saam te vat.

Laat (Ω, Σ) 'n meetbare ruimte wees en laat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n σ -additiewe operatormaat wees. Dan is die semivariasie ξ 'n σ -subadditiewe submaat (sien proposisie 2.1.13 op p.62). Ons definieer 'n ξ -trapfunksie as 'n $\hat{\xi}$ -trapfunksie (sien definisie 3.2.5 op p.77).

Definisie 6.1.1. (ξ -Trapfunksie, ξ -integreerbare trapfunksie)(Definisie 1 p.513, [9])

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ operatormaat is, dan word 'n Σ -trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ 'n ξ -trapfunksie of 'n ξ -integreerbare trapfunksie genoem as $x_i \in X$ vir elke i en $\hat{\xi}(E_i) < \infty$ vir elke versameling E_i waarvoor $x_i \neq 0$.

Ons dui die vektorruimte van ξ -trapfunksies deur $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X)$ aan. Enige ξ -trapfunksie is per definisie ook 'n Σ -trapfunksie, dus $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$. As $\hat{\xi}(\Omega) < \infty$, dan is $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X) = \mathcal{S}(\Sigma, X)$.

Ons sal sien dat dit vir die Dobrakov integraal van 'n ξ -trapfunksie geld dat

$$\left\| \int_E f d\xi \right\| \leq \|f\|_E \hat{\xi}(E).$$

Ons wil graag hê die term aan die regterkant moet eindig wees. Gevolglik wil ons versamelings $E \in \Sigma$ beskou waarvoor dit geld dat $\widehat{\xi}(E) < \infty$. Ons sal sien dat hierdie versamelings 'n δ -ring vorm.

'n Versameling $\mathcal{R}$ van deelversamelings van Ω word 'n ring genoem as $\mathcal{R}$ aan die volgende voorwaardes voldoen

1. $E \cup F \in \mathcal{R}$ vir alle $E, F \in \mathcal{R}$;
2. $E \setminus F \in \mathcal{R}$ vir alle $E, F \in \mathcal{R}$.

'n Delta ring $\mathcal{P}$ is dan 'n ring tesame met die volgende bykomende eienskap:

- 3 δ . $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{P}$ vir enige ry $(E_n) \subseteq \mathcal{P}$.

Soortgelyk is 'n sigma ring 'n ring $\mathcal{S}$ tesame met die volgende eienskap:

- 3 σ . $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$ vir enige ry $(E_n) \subseteq \mathcal{S}$.

As voorwaardes 2 en 3 σ vir 'n ring $\mathcal{R}$ geld, dan volg vanuit die reëls van de Morgan dat voorwaarde 3 δ vir $\mathcal{R}$ geld [[As $(E_n) \subseteq \mathcal{R}$, dan is $E_1 \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus (E_1 \setminus E_n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$]]. Enige σ -ring is dus ook 'n δ -ring. As $\mathcal{P}$ 'n δ -ring is, dan is die σ -ring deur $\mathcal{P}$ voortgebring die kleinste σ -ring wat $\mathcal{P}$ bevat. Ons dui dit aan deur $\sigma(\mathcal{P})$. Elke versameling $S \in \sigma(\mathcal{P})$ kan geskryf word as die aftelbare vereniging van disjunkte versamelings $P_n \in \mathcal{P}$. Enige σ -algebra Σ is ook 'n σ -ring. Andersom, as $\mathcal{S}$ 'n σ -ring is sodanig dat $\Omega \in \mathcal{S}$, dan is $\mathcal{S}$ 'n σ -algebra.

Beskou nou al die deelversamelings $E \in \Sigma$ waarvoor $\widehat{\xi}(E) < \infty$. Sê $\Sigma_1 := \{E \in \Sigma : \widehat{\xi}(E) < \infty\}$, $E, F \in \Sigma_1$ en $(E_n) \subseteq \Sigma_1$. Dan volg vanuit die monotoniteit van $\widehat{\xi}$ dat

1. $\widehat{\xi}(E \cup F) \leq \widehat{\xi}(E) + \widehat{\xi}(F) < \infty$ en dus $E \cup F \in \Sigma_1$;
2. $E \setminus F \subseteq E$, dus $\widehat{\xi}(E \setminus F) \leq \widehat{\xi}(E) < \infty$ en dus $E \setminus F \in \Sigma_1$;
- 3 δ . $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E_1$, dus $\widehat{\xi}(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \widehat{\xi}(E_1) < \infty$ en dus $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma_1$.

Ons sien dus dat Σ_1 'n δ -ring is. Ons noem die versamelings in Σ_1 integreerbare versamelings. Ons noem 'n funksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ 'n Σ_1 -trapfunksie as $E_i \in \Sigma_1$ vir elke i . Ons kan nie vereis dat $E_1, E_2, \dots, E_r$ 'n verdeling van Ω vorm nie, want Ω is nie noodwendig in Σ_1 nie. Elke Σ_1 -trapfunksie is ook 'n ξ -trapfunksie, want per definisie is $\widehat{\xi}(E) < \infty$ vir alle $E \in \Sigma_1$. Beskou nou die σ -ring deur Σ_1 voortgebring. Enige versameling $E \in \sigma(\Sigma_1)$ kan as 'n vereniging $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ geskryf word waar $(E_n) \subseteq \Sigma_1$ 'n ry van disjunkte versamelings is. As $\Omega \in \sigma(\Sigma_1)$, dan is $\sigma(\Sigma_1)$ 'n σ -algebra wat σ -eindig in die sin dat daar 'n ry (disjunkte) versamelings $(\Omega_n) \subseteq \Sigma_1$ bestaan sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\widehat{\xi}(\Omega_n) < \infty$ vir elke n .

Definisie 6.1.2. (σ -eindige operatormaatruimte)

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat op die meetbare ruimte (Ω, Σ) is, dan sê ons (Ω, Σ, ξ) is 'n σ -eindige operatormaatruimte as daar 'n ry versamelings $(\Omega_n) \subseteq \Sigma$ bestaan sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\widehat{\xi}(\Omega_n) < \infty$ vir elke n .

In die ontwikkeling wat Dobrakov doen, beskou hy 'n δ -ring $\mathcal{P}_0$ van deelversamelings van Ω en die σ -ring $\sigma(\mathcal{P}_0)$ deur $\mathcal{P}_0$ voortgebring. Hy werk dan met 'n operatormaat $\xi : \mathcal{P}_0 \rightarrow L(X, Y)$ en $\mathcal{P}_0$ -trapfunksies $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ waar $E_i \in \mathcal{P}_0$ vir

elke i . Hy beskou dan die δ -ringe $\mathcal{P}_1 = \{E \in \sigma(\mathcal{P}_0) : \widehat{\xi}(E) < \infty\}$ en $\mathcal{P} := \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1$. Dan is $\mathcal{P}$ die versameling van deelversamelings $E \in \mathcal{P}_0$ waarvoor $\widehat{\xi}(E) < \infty$. Dobrakov beskou dan die σ -ring $\sigma(\mathcal{P})$ en gebruik dit as sy versameling van meetbare versamelings. As $\Omega \in \sigma(\mathcal{P})$, dan is $(\Omega, \sigma(\mathcal{P}), \xi)$ 'n σ -eindige operatormaatruimte.

Ons definieer nou 'n ξ -meetbare funksie as die puntsgewyse limiet van 'n ry ξ -trapfunksies (f_n) . Aangesien (f_n) oral na f konvergeer, konvergeer dit ook $\widehat{\xi}$ -byna oral na f . Enige ξ -meetbare funksie is dus ook 'n $(I)\widehat{\xi}$ -meetbare funksie.

Definisie 6.1.3. (ξ -meetbare funksie)

'n Funksie $f : \Omega \rightarrow X$ word ξ -meetbaar genoem as daar 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies (f_n) bestaan wat oral na f konvergeer.

Ons dui die vektorruimte van ξ -meetbare funksies $f : \Omega \rightarrow X$ deur $\mathcal{M}_\xi(\Sigma, X)$ aan. Ons sien nou dat Σ -meetbaarheid en ξ -meetbaarheid ooreenstem op 'n σ -eindige operatormaatruimte.

Proposisie 6.1.4.

As (Ω, Σ, ξ) 'n σ -eindige operatormaatruimte is, dan is f 'n Σ -meetbare funksie as en slegs as f 'n ξ -meetbare funksie is.

Bewys. Neem aan f is Σ -meetbaar, dan bestaan daar 'n ry Σ -trapfunksies f_n wat oral na f konvergeer. Laat $(\Omega_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry wees sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ en $\widehat{\xi}(\Omega_n) < \infty$ vir alle n . Dan is elke $f_n \mathcal{I}_{\Omega_n}$ 'n ξ -trapfunksie en $f_n \mathcal{I}_{\Omega_n} \rightarrow f \mathcal{I}_{\Omega}$. Gevolglik is f 'n ξ -meetbare funksie.

Andersom, aangesien enige ξ -trapfunksie f_n ook 'n Σ -trapfunksie is en (f_n) oral na f konvergeer, volg dat f ook Σ -meetbaar is as f 'n ξ -meetbare funksie is. $\square$

Vanuit stellings 3.2.14 op p.81 en 3.2.17 op p.83 en proposisie 6.1.4 kry ons nou direk die volgende stellings oor ξ -meetbare funksies.

Stelling 6.1.5.

As (Ω, Σ, ξ) 'n σ -eindige operatormaatruimte is, dan is $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ξ -meetbare funksie as en slegs as

1. *f separabelwaardig is;*
2. *daar 'n normerende ruimte $\Psi \subseteq X^*$ bestaan sodanig dat $x^* f$ 'n ξ -meetbare funksie is vir elke $x^* \in X^*$.*

Volgens stelling 6.1.4 en gevolg 3.2.15 op p.82 is die ruimte $\mathcal{M}_\xi(\Sigma, X)$ geslote onder die neem van puntsgewyse limiete.

Gevolg 6.1.6.

As (Ω, Σ, ξ) 'n σ -eindige operatormaatruimte is en (f_n) 'n ry ξ -meetbare funksies is wat oral na f konvergeer, dan is f 'n ξ -meetbare funksie.

Net soos by proposisie 3.2.10 op p.78 volg dat $x^* f$ en $\|f\|$ ξ -meetbaar is as f ξ -meetbaar is.

Proposisie 6.1.7.

As f 'n ξ -trapfunksie is en $x^* \in X^*$, dan is $\|f\|$ en $x^* f$ beide skalaar ξ -trapfunksies. Gevolglik, as f 'n ξ -meetbare funksie is, dan is $\|f\|$ en $x^* f$ ook ξ -meetbare funksies.

Vanuit proposisies 6.1.4 en 3.2.11 kry ons nou dat Borel-, Σ - en ξ -meetbaarheid ooreenstem vir reëlwaardige funksies.

Proposisie 6.1.8.

As (Ω, Σ, ξ) 'n σ -eindige operatormaatruimte is en $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dan is die volgende ekwivalent:

1. f is Borel-meetbaar;
2. f is Σ -meetbaar;
3. f is ξ -meetbaar.

Hieruit sien ons dat die draerversameling $C_f = \{\omega \in \Omega : \|f(\omega)\| > 0\}$ van enige ξ -meetbare funksie f 'n meetbare versameling is [$\|f\|$ is 'n reëlwaardige ξ -meetbare funksie en dus ook 'n Borel-meetbare funksie en gevolglik is $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \in \Sigma$ vir alle $\alpha \in \mathbb{R}$].

As ν 'n vektormaat is, dan word 'n versameling $N \in \Sigma$ 'n ν -nulversameling genoem as $\|\nu\|(N) = 0$. 'n Ry funksies (f_n) konvergeer ν -byna oral na f as daar 'n ν -nulversameling $N \in \Sigma$ bestaan sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Vanuit Egoroff se stelling (sien byvoorbeeld stelling 3.1.10 op p.73) kan ons die volgende resultaat oor die konvergensie van Σ -meetbare funksies kry.

Stelling 6.1.9 (Egoroff-Lusin). (Stelling p.520, [9])

Beskou 'n σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ en 'n ry meetbare funksies $(f_n) \subseteq \mathcal{M}(\Sigma, X)$ wat ν -byna oral na die meetbare funksie $f \in \mathcal{M}(\Sigma, X)$ konvergeer. Stel

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega)\| > 0\}$$

waar $f = f_0$. Dan bestaan daar 'n ν -nulversameling $N \in \Sigma$ en 'n stygende ry $(F_k) \subseteq \Sigma$ sodanig dat

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = F \setminus N$$

en sodanig dat (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke F_k .

Bewys. Neem aan die ry (f_n) konvergeer ν -byna oral na f . Sê $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus M$, waar $\|\nu\|(M) = 0$. Laat C_n die draerversameling van elke funksie f_n wees. Laat F , soos in die stelling, die vereniging van die draerversamelings C_n wees. Aangesien ν 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra is, bestaan daar volgens die Bartle-Dunford-Schwartz lemma (gevolg 1.3.17 op p.33) 'n eindige maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ sodanig dat $\mu(E) \leq \|\nu\|(E)$ en $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu\|(E) = 0$. Gevolglik is $\mu(M) = 0$ en dit beteken dat (f_n) μ -byna oral na f konvergeer. Aangesien enige μ -nulversameling ook 'n ν -nulversameling is, is dit voldoende om die stelling vir μ te bewys.

Aangesien μ 'n eindige maat is, verseker Egoroff se stelling dat (f_n) ook μ -byna gelykmatig na f konvergeer. Daar bestaan dus vir $\epsilon_1 = 1$ 'n versameling $G_1 \in \Sigma$ sodanig dat $\mu(G_1) < \epsilon_1$ en (f_n) gelykmatig na f konvergeer op $F \setminus G_1 := F_1$. Weer vir $\epsilon_2 = 1/2$ bestaan daar 'n versameling $G_2 \in \Sigma$ sodanig dat sodanig dat $\mu(G_2) < \epsilon_2$ en (f_n) gelykmatig na f konvergeer op $F \setminus G_2$ en dus ook op $F \setminus (G_1 \cap G_2) = (F \setminus G_1) \cup (F \setminus G_2) = F_1 \cup (F \setminus G_2) := F_2$. Let op dat $\mu(F \setminus F_2) = \mu(G_1 \cap G_2) \leq \mu(G_2) < \epsilon_2$. Gaan nou induktief voort op hierdie wyse om vir elke $\epsilon_m = 1/m$ 'n versameling $G_m \in \Sigma$ te kry sodanig dat $\mu(G_m) < \epsilon_m$ en (f_n)

gelykmatig op $F \setminus G_m$ na f konvergeer. Stel $F_m = F \setminus G_1 \cup F \setminus G_2 \cup \dots \cup F \setminus G_m$. Dan is (F_m) 'n stygende ry, (f_n) konvergeer gelykmatig na f op elke F_m en

$$\mu \left(F \setminus \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) \right) = \mu \left(\bigcap_{k=1}^m G_k \right) \leq \mu(G_m) < \frac{1}{m}$$

vir elke m . Stel nou $N = F \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ dan is $\mu(N) = 0$ en $F_k \uparrow F \setminus N$. $\square$

Die volgende lemma sal dikwels later gebruik word.

Lemma 6.1.10.

Laat (Ω, Σ, ξ) 'n σ -eindige operatormaatruimte wees. As f 'n ξ -meetbare funksie en (f_n) 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies is wat oral na f konvergeer, dan kan ons (f_n) só kies dat $\|f_n(\omega)\| \uparrow \|f(\omega)\|$ as $n \rightarrow \infty$ vir alle $\omega \in \Omega$. In die besonder geld dat $\|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ vir alle n en alle $\omega \in \Omega$.

Bewys.

Aangesien $\|f\|$ 'n ξ -meetbare skalaarfunksie en dus ook 'n nie-negatiewe Borel-meetbare funksie is, kan ons 'n ry nie-negatiewe ξ -integreerbare trapfunksies (ϕ_n) kry sodanig dat $\phi_n(\omega) \uparrow \|f(\omega)\|$ vir alle $\omega \in \Omega$. Stel nou

$$g_n(\omega) = \frac{\phi_n(\omega)f_n(\omega)}{\|f_n(\omega)\|}$$

vir elke n . Dan is elke g_n 'n ξ -integreerbare trapfunksie en as $n \rightarrow \infty$, dan

$$g_n(\omega) \rightarrow \frac{\|f(\omega)\|f(\omega)}{\|f(\omega)\|} = f(\omega)$$

vir alle $\omega \in \Omega$. Vir elke n geld dat $\|g_n(\omega)\| = \phi_n(\omega) \leq \|f(\omega)\|$ vir alle $\omega \in \Omega$. Dus $\|g_n(\omega)\| \uparrow \|f(\omega)\|$. $\square$

6.2 Die integraal van 'n meetbare trapfunksie

Laat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees en laat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n σ -additiewe operatormaat wees. Die Dobrakov integraal word gedefinieer vir 'n deelversameling van ξ -meetbare funksies. In hierdie eerste deel oor die Dobrakov integraal kyk ons na die integraal van Σ -trapfunksies $f : \Omega \rightarrow X$. Al die resultate wat ons vir Σ -trapfunksies kry geld dan ook vir ξ -integreerbare trapfunksies ($\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$).

Definisie 6.2.1 (Die integraal van 'n Σ -trapfunksie). (p.512, [9])

Beskou 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ en 'n Σ -trapfunksie $f : \Omega \rightarrow X$ gegee deur $f = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{I}_{E_i}$. Ons definieer die (Dobrakov) integraal van f oor 'n versameling $E \in \Sigma$ deur

$$\int_E f d\xi = \sum_{i=1}^n \xi(E \cap E_i) x_i.$$

Dat die integraal hierbo onafhanklik van die representasie van die trapfunksie f is volg op die gewone manier (die bewys kan byvoorbeeld na analogie van die bewys van lemma 1.2.3 op p.17). Die integraal van f neem sy waardes in Y aan [[vir alle i is $\xi(E \cap E_i) \in L(X, Y)$ en dus is $\xi(E \cap E_i)x_i \in Y$ vir alle i]].

Die volgende proposisie gee die basiese eienskappe van die integraal van 'n Σ -trapfunksie. Onthou dat die draer, C_f , van 'n Σ -trapfunksie 'n meetbare versameling is.

Proposisie 6.2.2. (Lemma 2 p.515, [9])

Beskou 'n Σ -trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ en 'n versameling $E \in \Sigma$.

1. $\int_E f d\xi = \int_{E \cap C_f} f d\xi$.
2. $\int_{E \cap F} f d\xi = \int_E f \mathcal{I}_F d\xi$ vir enige $F \in \Sigma$.
3. $\nu(\cdot) := \int_{(\cdot)} f d\xi : \Sigma \rightarrow Y$ is 'n σ -additiewe vektormaat op Σ .
4. Die Dobrakov integraal van 'n trapfunksie is 'n lineêre afbeelding van $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ na Y .
5. Die vektormaat ν is $\|\xi\|$ -absoluut en $\widehat{\xi}$ -absoluut kontinu.

Bewys.

Laat ξ, f, E en ν gedefinieer wees soos in die stelling.

1. Rangskik die versameling E_i só dat $x_i \neq 0$ vir $i = 1, 2, \dots, s$ en $x_i = 0$ vir $i = s+1, s+2, \dots, r$. Dan is $C_f = \bigcup_{i=1}^s E_i$ en dus

$$\begin{aligned} \int_{E \cap C_f} f d\xi &= \sum_{i=1}^r \xi(E \cap C_f \cap E_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^s \xi \left(E \cap \bigcup_{i=1}^s E_i \cap E_i \right) x_i + \sum_{i=s+1}^r \xi(E \cap C_f \cap E_i) 0 \\ &= \sum_{i=1}^s \xi(E \cap E_i) x_i + \sum_{i=s+1}^r \xi(E \cap E_i) 0 = \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i) x_i = \int_E f d\xi. \end{aligned}$$

2. $f\mathcal{I}_F$ is die trapfunksie $\sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i} \mathcal{I}_F = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i \cap F}$, dus is

$$\int_{E \cap F} f d\xi = \sum_{i=1}^r \xi((E \cap F) \cap E_i) x_i = \sum_{i=1}^r \xi(E \cap (F \cap E_i)) x_i = \int_E (f \mathcal{I}_F) d\xi.$$

3. Beskou 'n ry (F_n) van disjunkte elemente uit Σ . Aangesien elke $\xi((\cdot) \cap E_i) x_i : \Sigma \rightarrow Y$ 'n σ -additiewe vektormaat is, kry ons

$$\begin{aligned} \nu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) &= \sum_{i=1}^r \xi \left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap E_i \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^{\infty} \xi(F_n \cap E_i) x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^r \xi(F_n \cap E_i) x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n). \end{aligned}$$

Waar ons die orde van sommasie mag omruil omdat een van die somme 'n eindige som is.

4. Sê $f = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{I}_{F_i}$ en $g = \sum_{j=1}^m y_j \mathcal{I}_{G_j}$ is Σ -trapfunksies en $\alpha \in \mathbb{K}$. Ons kan f en g met betrekking tot dieselfde eindige ry disjunkte versamelings $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \subseteq \Sigma$ skryf. Sê $f = \sum_{k=1}^r v_k \mathcal{I}_{E_k}$ en $g = \sum_{k=1}^r w_k \mathcal{I}_{E_k}$. Dan is $f + \alpha g = \sum_{k=1}^r (v_k + \alpha w_k) \mathcal{I}_{E_k}$ 'n Σ -trapfunksie. Aangesien elke $\xi(E \cap E_k)$ 'n lineêre operator is, kry ons nou

$$\begin{aligned} \int_E (f + \alpha g) d\xi &= \sum_{k=1}^r \xi(E \cap E_k) (v_k + \alpha w_k) \\ &= \sum_{k=1}^r \xi(E \cap E_k) v_k + \alpha \sum_{k=1}^r \xi(E \cap E_k) w_k \\ &= \int_E f d\xi + \alpha \int_E g d\xi. \end{aligned}$$

5. Laat $\epsilon > 0$. Ons wys eers dat ν 'n $\|\xi\|$ -absoluut kontinue vektormaat is. Dit beteken ons moet 'n $\delta > 0$ kry sodanig dat

$$\sup\{\|\xi\|(F) : F \subseteq E, F \in \Sigma\} = \|\xi\|(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\nu\|(E) < \epsilon$$

vir enige $E \in \Sigma$. Beskou 'n $E \in \Sigma$ en stel $\delta = \epsilon / \|f\|_E$. Neem aan $\|\xi\|(E) < \delta$. Neem nou die supremum oor alle eindige disjunkte verdelings $(F_j) \in D^\Sigma$ en eindige rye skalare (α_j) met $|\alpha_j| \leq 1$. Dan is $\nu(E \cap F_j) = \sum_{i=1}^r \xi((E \cap F_j) \cap E_i) x_i$. Aangesien (E_i) 'n verdeling van Ω is, volg dat

$$\begin{aligned} \|\nu\|(E) &= \sup \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \nu(E \cap F_j) \right\| \\ &= \sup \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n \xi((E \cap F_j) \cap E_i) x_i \right) \right\| \\ &= \|f\|_E \cdot \sup \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n \xi((E \cap F_j) \cap E_i) \frac{x_i}{\|f\|_E} \right) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f\|_E \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n \xi((E \cap F_j) \cap E_i)x \right) \right\| \\
&= \|f\|_E \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \xi(E \cap F_j \cap \Omega)x \right\| \\
&= \|f\|_E \cdot \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j \xi(E \cap F_j) \right\| \\
&\leq \|f\|_E \|\xi\|(E) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Ons kan dit vir enige $E \in \Sigma$ doen. Die vektormaat ν is dus $\|\xi\|$ -absoluut kontinu. Aangesien $\|\xi\|(E) \leq \widehat{\xi}(E)$ vir alle $E \in \Sigma$, volg dat ν ook $\widehat{\xi}$ -absoluut kontinu is. $\square$

Die volgende stelling oor die begrensdeheid van die integraal is belangrik vir die ontwikkeling van die Dobrakov integraal.

Stelling 6.2.3. (*Proposisie 1 p.6, [30]*)

$\int_E (\cdot) d\xi : \mathcal{S}(\Sigma, X) \rightarrow Y$ is 'n begrensde afbeelding as en slegs as $\widehat{\xi}(E) < \infty$.

Bewys.

Neem aan die integraal van 'n Σ -trapfunksie is 'n begrensde lineêre afbeelding, sê $\|\int_E f d\xi\|_Y \leq K_E \|f\|$ vir alle $f \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$, waar $K_E > 0$ een of ander skalaar afhanklik van E is. Beskou dan 'n verdeling $\{E_1, E_2, \dots, E_r\} \in D^\Sigma$ en elemente $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ waar $\|x_i\| \leq 1$ vir alle i . Stel nou $g = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$. Dan is $g \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$ en $\|g\|_E \leq \|g\| = \sup_{1 \leq i \leq r} \|x_i\| \leq 1$. Gevolglik is

$$\left\| \int_E g d\xi \right\| \leq K_E \|g\|_E \leq K_E.$$

Dit geld vir enige so 'n verdeling uit D^Σ en alle sulke elemente uit X , dus kry ons

$$\begin{aligned}
\widehat{\xi}(E) &= \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i)x_i \right\| : (E_i) \in D^\Sigma, \|x_i\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \left\| \int_E f d\xi \right\| : f \in \mathcal{S}(\Sigma, X), \|f\|_E \leq 1 \right\} \leq K_E < \infty.
\end{aligned}$$

Andersom, as $E \in \Sigma$ en $\widehat{\xi}(E) < \infty$ en $\sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i} = g \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$, dan is $(E_i) \in D^\Sigma$ en $\|g\|_E = \sup_{\omega \in E} \|g(\omega)\| = \max_{1 \leq i \leq r, E_i \cap E \neq \emptyset} \|x_i\|$. Dus, as $E \cap E_i = \emptyset$, dan is $\xi(E \cap E_i)x_i = 0$ en as $E \cap E_i \neq \emptyset$, dan is $\|x_i\|/\|g\|_E \leq 1$. Dus kry ons

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E g d\xi \right\| &= \|g\|_E \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i) \frac{x_i}{\|g\|_E} \right\| \\
&\leq \|g\|_E \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^m \xi(E \cap F_j)y_j \right\| : (F_j) \in D^\Sigma, \|y_j\|_E \leq 1 \right\} \\
&= \|g\|_E \widehat{\xi}(E).
\end{aligned}$$

Ons kan dit vir enige $g \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$ doen, dus is die integraal oor E 'n begrensde afbeelding as $\widehat{\xi}(E) < \infty$. $\square$

Gevolg 6.2.4. (*p.513, [9]*)

As f 'n Σ -trapfunksie is en $\widehat{\xi}(E) < \infty$, dan is

$$\left\| \int_E f d\xi \right\| \leq \|f\|_E \widehat{\xi}(E).$$

Onthou dat 'n ξ -integreerbare trapfunksie 'n Σ -trapfunksie $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ is waarvoor $\widehat{\xi}(E_i) < \infty$ vir elke versameling E_i waarop $x_i \neq 0$. Aangesien $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$, geld alles wat ons tot dusver vir Σ -trapfunksies gedoen het ook vir ξ -integreerbare trapfunksies.

Die volgende resultaat volg vanuit die bewys van stelling 6.2.3 en gee vir ons 'n alternatiewe definisie vir die semivariasie van ξ .

Gevolg 6.2.5.

Die semivariasie van ξ word gegee deur die formule

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left\{ \left\| \int_E f d\xi \right\| : f \in \mathcal{S}(\Sigma, X), \|f\|_E \leq 1 \right\}.$$

Bewys. Laat $E \in \Sigma$. Ons het reeds in die bewys van stelling 6.2.3 gesien dat $\widehat{\xi}(E)$ kleiner of gelyk aan die bostaande supremum is. Andersom, as $f \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$, dan het ons gesien dat $\left\| \int_E f d\xi \right\| \leq \|f\|_E \widehat{\xi}(E)$. Dus, as $\|f\|_E \leq 1$ dan is $\left\| \int_E f d\xi \right\| \leq \widehat{\xi}(E)$. Deur die supremum oor alle $f \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$ met $\|f\|_E \leq 1$ te neem, sien ons dat omgekeerde ongelykheid ook geld. $\square$

Trouens, as die operatormaatruimte σ -eindig is, kan die semivariasie van ξ verkry word deur die supremum oor trapfunksies uit $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X)$ te neem.

Gevolg 6.2.6. (*Lemma 1 p.513, [9]*)

As (Ω, Σ, ξ) 'n σ -eindige maatruimte is, dan word die semivariasie van ξ gegee deur die formule

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left\{ \left\| \int_E f d\xi \right\| : f \in \mathcal{S}_\xi(\Sigma, X), \|f\|_E \leq 1 \right\}.$$

Bewys. Laat $(\Omega_n) \subseteq \Sigma$ 'n ry disjunkte versamelings wees sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ en $\widehat{\xi}(\Omega_n) < \infty$ vir elke n . Beskou 'n $E \in \Sigma$. Dan is $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ waar $E_n = E \cap \Omega_n$ en $\widehat{\xi}(E_n) < \infty$ vir elke n .

As $\widehat{\xi}(E) < \infty$, dan is $f \mathcal{I}_E \in \mathcal{S}_\xi(\Sigma, X)$ vir enige $f \in \mathcal{S}(\Sigma, X)$. Volgens proposisie 6.2.2(2) geld dat

$$\int_E f d\xi = \int_E f \mathcal{I}_E d\xi.$$

Dus, vir die geval waar $\widehat{\xi}(E) < \infty$, volg die aanspraak uit die formule in gevolg 6.2.5.

As $\widehat{\xi}(E) = \infty$, dan bestaan daar volgens gevolg 6.2.5 'n ry Σ -trapfunksies (f_n) sodanig dat $\left\| \int_E f_n d\xi \right\| > n$ vir elke n . Aangesien die integraal van 'n Σ -trapfunksie 'n σ -additiewe vektormaat op Σ is en $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, bestaan daar vir elke n 'n k_n

sodanig dat $\|\int_{F_n} f_n d\xi\| = \|\int_E f_n \mathcal{I}_{F_n} d\xi\| > n$ waar $F_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} E_k$. Vir elke n is $\widehat{\xi}(F_n) \leq \sum_{k=1}^{k_n} \widehat{\xi}(E_k) < \infty$. Gevolglik is elke $f \mathcal{I}_{F_n}$ 'n ξ -trapfunksie. Aangesien $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X) \subseteq \mathcal{S}(\Sigma, X)$, volg die formule vanuit gevolg 6.2.5. $\square$

Die volgende proposisie wys waarom ons ξ -trapfunksies ook ξ -integreerbare trapfunksies noem.

Proposisie 6.2.7.

Die integraal van 'n ξ -trapfunksie is 'n begrensde operator van $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X)$ na Y .

Bewys. Laat $f \in \mathcal{S}_\xi(\Sigma, X)$. Sê $f = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i} + 0 \mathcal{I}_F$ waar $x_i \neq 0$ vir $i = 1, 2, \dots, r$. Dan is $\widehat{\xi}(E_i) < \infty$ vir $i = 1, 2, \dots, r$ en $C_f = \bigcup_{i=1}^r E_i$. Aangesien $\int_E f d\xi = \int_{E \cap C_f} f d\xi$, kry ons

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f d\xi \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i) x_i \right\| \leq \|f\|_E \left\| \sum_{i=1}^r \xi(E \cap E_i) \frac{x_i}{\|f\|_E} \right\| \\ &\leq \|f\|_E \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{i=1}^r \|\xi(E \cap E_i) x\| \\ &\leq \|f\|_E \sum_{i=1}^r \widehat{\xi}(E \cap E_i) \leq \|f\|_E \sum_{i=1}^r \widehat{\xi}(E_i) < \infty. \end{aligned}$$

Dit voltooi die bewys. $\square$

6.3 Die integraal van 'n ξ -meetbare funksie

Laat (Ω, Σ, ξ) deurgaans 'n σ -eindige operatormaatruimte wees. Stel $\Sigma_1 = \{E \in \Sigma : \widehat{\xi}(E) < \infty\}$. Dan bestaan daar 'n disjunkte ry $(\Omega_n) \subseteq \Sigma_1$ sodanig dat $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

In die vorige afdeling het ons gekyk na die integraal van 'n ξ -integreerbare trapfunksie. Ons wil nou die integraal van 'n ξ -meetbare funksie $f \in \mathcal{M}_\xi(\Sigma, X)$ definieer. Vir 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies (f_n) wat oral na f konvergeer, beoog ons om die integraal van f te definieer as die limiet van die integrale van die trapfunksies f_n . Ons ondersoek dus onder watter voorwaardes die laasgenoemde limiet sal bestaan.

Die teorie van die Dobrakov integraal berus op die hieropvolgende stelling 6.3.2, maar daarvoor het ons eers die volgende stelling nodig. In die bewys van stelling 6.3.1 is die kernfeite waarvan ons gebruik maak, die feit dat die integraal van 'n ξ -trapfunksie 'n σ -additiewe vektormaat is en die feit dat $\|\int_E f d\xi\| \leq \|f\|_E \widehat{\xi}(E)$ vir enige ξ -integreerbare trapfunksie f . Ons pas die bewys wat Dobrakov gee aan deur die Bartle-Dunford-Schwartz lemma te gebruik. Dit maak dit dan duidelik waarom ons die Egoroff-Lusin stelling kan gebruik om die verlangde resultaat te kry.

Stelling 6.3.1. *(Stelling 1 p. 521 [9])*

Neem aan (f_n) is 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies wat ξ -byna oral op Ω na die ξ -meetbare funksie f konvergeer. Stel

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega)\| > 0\}$$

waar $f_0 = f$. Dan bestaan daar 'n versameling $N \in \Sigma$, $N \subseteq F$ en 'n stygende ry versamelings $(F_k) \subseteq \Sigma_1$ sodanig dat $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = F \setminus N$ en

$$\int_E f_n \cdot \mathcal{I}_N d\xi = \int_{E \cap N} f_n d\xi = 0$$

vir elke $E \in \Sigma$ en elke $n \in \mathbb{N}$, en sodanig dat die ry (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke versameling F_k .

Bewys. Ons gebruik die Egoroff-Lusin stelling (stelling 6.1.9) om die versameling N en die stygende ry versamelings (F_k) in die hande te kry. Ons eerste stap is om 'n maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ te kry sodanig dat (f_n) μ -byna oral na f konvergeer. Vir elke $n \in \mathbb{N}$ en $E \in \Sigma$, stel

$$\nu_n(E) = \int_E f_n d\xi.$$

Aangesien elke ν_n 'n σ -additiewe vektormaat op die σ -algebra Σ is, bestaan daar volgens die Bartle-Dunford-Schwartz lemma (gevolg 1.3.17) eindige mate μ_n sodanig dat

$$\lim_{\mu_n(E) \rightarrow 0} \|\nu_n\|(E) = 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq \mu(E) \leq \|\nu_n\|(E)$$

vir alle $E \in \Sigma$ en elke n . Stel

$$K_n = 2^n(1 + \mu_n(\Omega))$$

vir elke n . Omdat $\mu_n(E) \leq \mu_n(\Omega)$ volg dat $\mu_n(E)/K_n < 1/2^n$ vir alle $E \in \Sigma$ en elke n . Dus is

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(E)}{K_n}$$

'n konvergente reeks vir alle $E \in \Sigma$ en $\mu(\Omega) < \infty$. Die afbeelding $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ is dus goed-gedefinieerd. Aangesien elke μ_n 'n maat is, is μ ook 'n (eindige) maat. Ons wys nou dat die ry meetbare funksies (f_n) μ -byna oral na f konvergeer. Ons weet (f_n) konvergeer ξ -byna oral na f , so daar bestaan 'n versameling $M \in \Sigma$ sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus M$ en $\|\xi\|(M) = 0 = \widehat{\xi}(M)$ ($\|\xi\|(M) = 0$ as en slegs as $\widehat{\xi}(M) = 0$). Maar dan kry ons ook dat

$$\left\| \int_{M \cap E_i} f_n d\xi \right\| \leq \|f_n\|_{M \cap E_i} \widehat{\xi}(M \cap E_i) \leq \|f_n\|_{M \cap E_i} \widehat{\xi}(M) = 0$$

en dit impliseer dat $\int_{M \cap E_i} f_n = 0$ vir alle deelversamelings E_i . Dan is

$$0 \leq \|\nu_n\|(M) = \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \int_{M \cap E_i} f_n d\xi \right\| = 0.$$

Maar dan volg ook dat $\mu_n(M) = 0$ vir alle n en dus $\mu(M) = 0$. Ons sien dus dat (f_n) μ -byna oral na f konvergeer.

Ons het dus 'n ry funksies (f_n) en 'n eindige maat μ sodanig dat (f_n) μ -byna oral na f konvergeer. Die versameling F is ook presies die versameling wat in die Egoroff-Lusin stelling voorkom. Dus, volgens stelling 6.1.9 bestaan daar 'n μ -nul versameling $N \in \Sigma$ en 'n stygende ry versamelings $(F_k) \in \Sigma$ sodanig dat $F_k \uparrow F \setminus N$ en (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke F_k .

Al wat ons nou nog moet wys is dat $\nu_n(N \cap E) = 0$ vir alle n en alle $E \in \Sigma$. Aangesien elke μ_n 'n nie-negatiewe maat is en

$$0 = \mu(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(N)}{K_n},$$

volg dat $\mu_n(N) = 0$ vir elke n . Maar dan volg ook dat $0 \leq \mu_n(E \cap N) \leq \mu_n(N) = 0$ vir alle n . Vanuit die feit dat $\lim_{\mu_n(E) \rightarrow 0} \|\nu_n\|(E) = 0$ kry ons $0 \leq \|\nu_n(N \cap E)\| \leq \|\nu_n\|(N \cap E) = 0$ vir alle n en alle $E \in \Sigma$. $\square$

In die stelling hierbo het ons 'n ry vektormate (ν_n) gekry waar elke vektormaat ν_n die integraal van 'n trapfunksie f_n is. Ons sal voortaan na so 'n ry vektormate verwys as die ry vektormate voortgebring deur die ry trapfunksies (f_n) . Die volgende stelling is die kernstelling vir die Dobrakov integraal. Ons noem 'n versameling $N \in \Sigma$ 'n ξ -nulversameling as $\widehat{\xi}(N) = 0$ (onthou dat $\|\xi\|(N) = 0$ as en slegs as $\widehat{\xi}(N) = 0$). 'n Ry funksies (f_n) konvergeer ξ -byna oral na f as daar 'n ξ -nulversameling $N \in \Sigma$ bestaan sodanig dat $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Ons gee nou die kernstelling vir die Dobrakov integraal.

Stelling 6.3.2. (Stelling 2 p. 521 [9], Stelling 6 [30])

Laat f 'n ξ -meetbare funksie wees en laat (f_n) 'n ry ξ -trapfunksies wees sodanig dat $f_n \rightarrow f$ ξ -byna oral op Ω . Laat (ν_n) die ry vektormate wees wat deur die ry trapfunksies (f_n) voortgebring is. Dan is die volgende aansprake ekwivalent:

1. $\nu(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ bestaan in Y vir elke $E \in \Sigma$.
2. (ν_n) is gelykmatig σ -additief op Σ .
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E)$ bestaan in Y gelykmatig in $E \in \Sigma$.

As enige van die bogenoemde voorwaardes geld, dan is die limiet ν onafhanklik van die ry trapfunksies (f_n) .

Bewys. Volgens proposisie 6.2.2 is elke ν_n 'n σ -additiewe vektormaat op Σ .

1 $\Rightarrow$ 2 Volg direk vanuit die stelling van Vitali-Hahn-Saks-Nikodým (sien gevolg 1.5.13 op p.54).

2 $\Rightarrow$ 3. Neem aan die ry van vektormate (ν_n) is gelykmatig σ -additief op Σ . Laat C_{f_n} die draerversameling van elke funksie f_n wees. Stel nou $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_{f_n}$ waar $f_0 = f$. Dan bestaan daar volgens stelling 6.3.1 'n versameling $N \in \Sigma$ en 'n ry versamelings $(F_k) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $F_k \uparrow F \setminus N$, $\nu_n(N \cap E) = 0$ vir alle n en alle $E \in \Sigma$ en sodanig dat (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke versameling F_k . Deur van die eienskappe in proposisie 6.2.2 gebruik te maak, kry ons

$$\begin{aligned} \|\nu_n(E) - \nu_m(E)\| &= \left\| \int_{E \cap F} (f_n - f_m) d\xi + \int_{E \setminus F} (f_n - f_m) d\xi \right\| \\ &\leq \left\| \int_{E \cap (F \setminus N)} (f_n - f_m) d\xi \right\| + \left\| \int_{(E \cap F) \cap N} (f_n - f_m) d\xi \right\| \\ &\leq \left\| \int_{E \cap (F \setminus N)} (f_n - f_m) d\xi \right\|, \end{aligned}$$

want $E \setminus F \subseteq E \setminus C_{f_n}$, $E \setminus F \subseteq E \setminus C_{f_m}$ en $\nu_n(G \cap N) = 0$ vir enige $G \in \Sigma$ en alle n . Aangesien $F_k \uparrow F \setminus N$, kry ons verder dat

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{E \cap (F \setminus N)} (f_n - f_m) d\xi \right\| \\ &= \left\| \int_{E \cap (F \setminus N) \cap F_k} (f_n - f_m) d\xi + \int_{E \cap ((F \setminus N) \setminus F_k)} (f_n - f_m) d\xi \right\| \\ &\leq \left\| \int_{E \cap F_k} (f_n - f_m) d\xi \right\| + \left\| \int_{E \cap ((F \setminus N) \setminus F_k)} f_n d\xi \right\| + \left\| \int_{E \cap ((F \setminus N) \setminus F_k)} f_m d\xi \right\| \end{aligned}$$

Die ongelijkheid van gevolg 6.2.4 gee nou

$$\begin{aligned} \|\nu_n(E) - \nu_m(E)\| &\leq \|f_n - f_m\|_{E \cap F_k} \cdot \widehat{\xi}(E \cap F_k) + \|\nu_n(E \cap ((F \setminus N) \setminus F_k))\| \\ &\quad + \|\nu_m(E \cap ((F \setminus N) \setminus F_k))\|. \end{aligned}$$

Vir 'n vektormaat ν weet ons dat $\|\nu(A)\| \leq \|\nu\|(A) \leq \|\nu\|(B)$ as $A \subseteq B$. Dit, tesame met die feit dat die semivariasie $\widehat{\xi}$ monotoon is, gee

$$\|\nu_n(E) - \nu_m(E)\| \leq \|f_n - f_m\|_{F_k} \cdot \widehat{\xi}(F_k) + \|\nu_n\|((F \setminus N) \setminus F_k) + \|\nu_m\|((F \setminus N) \setminus F_k)$$

vir alle k . Laat $\epsilon > 0$. Aangesien $F_k \uparrow F \setminus N$, daal $(F \setminus N) \setminus F_k$ na $\emptyset$ en aangesien ons aanneem (ν_n) is gelykmatig σ -additief, is die semivariasies $\|\nu_n\|$ gelykmatig kontinu op Σ volgens lemma 1.3.18. Gevolglik bestaan daar 'n $k_0 \in \mathbb{N}$ sodanig dat $\|\nu_n\|((F \setminus N) \setminus F_k) < \epsilon/3$ vir alle $k \geq k_0$ en alle n . Laat $k = k_0$, dan is

$$\|\nu_n(E) - \nu_m(E)\| < \|f_n - f_m\|_{F_{k_0}} \widehat{\xi}(F_{k_0}) + \frac{2\epsilon}{3}.$$

Maar (f_n) konvergeer gelykmatig na f op elke versameling F_k (onder andere ook op F_{k_0}), en dus bestaan daar 'n n_0 sodanig dat $\|f_n - f_m\|_{F_{k_0}} < \epsilon/3\widehat{\xi}(F_{k_0})$ as $m, n \geq n_0$. Gevolglik, as $n, m \geq n_0$, dan is

$$\|\nu_n(E) - \nu_m(E)\| < \frac{\epsilon \widehat{\xi}(F_{k_0})}{3\widehat{\xi}(F_{k_0})} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Ons kan vir enige $\epsilon > 0$ so 'n n_0 kry en n_0 is onafhanklik van E . Die ry $(\nu_n(E))$ is dus 'n Cauchy-ry in die Banach ruimte Y , en konvergeer dus, gelykmatig met betrekking tot $E \in \Sigma$, na 'n limiet in Y .

3 $\Rightarrow$ 1. Triviaal.

Voorwaardes 1, 2 en 3 is dus ekwivalent. Laastens wys ons dat die limietfunksie ν onafhanklik van die spesifieke ry trapfunksies (f_n) is: Neem aan daar is nog 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies (g_n) wat ξ -byna oral na f konvergeer en stel

$$\nu'_n(E) = \int_E g_n d\xi$$

vir $E \in \Sigma$. Neem aan een van die voorwaardes (en dus al die voorwaardes) geld vir die ry vektormate (ν'_n) . Dan is (ν'_n) gelykmatig σ -additief. Stel nou $h_{2n} = g_n$ en $h_{2n-1} = f_n$ [[dit wil sê (h_n) is die ry $(f_1, g_1, f_2, g_2, \dots)$]]. Dan $h_n \rightarrow f$ ξ -byna oral. [[Daar bestaan versamelings $E, F \in \Sigma$ sodanig dat $f_n \rightarrow f$ op $\Omega \setminus E$, $g_n \rightarrow f$ op $\Omega \setminus F$, $\|\xi\|(E) = 0$ en $\|\xi\|(F) = 0$. Dus $f_n \rightarrow f$ op $\Omega \setminus (E \cup F) \subseteq \Omega \setminus E$ en $g_n \rightarrow f$ op $\Omega \setminus (E \cup F) \subseteq \Omega \setminus F$. $E \cup F$ is dus 'n versamelings waarvoor $h_n \rightarrow f$ op $\Omega \setminus (E \cup F)$ en $\|\nu\|(E \cup F) \leq \|\nu\|(E) + \|\nu\|(F) = 0$.]] Stel

$$\nu''_n(E) = \int_E h_n d\xi$$

vir $E \in \Sigma$. Dan is die ry (ν''_n) ook gelykmatig σ -additief en gevolglik bestaan die limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu''_n(E)$ in Y vir elke $E \in \Sigma$. Maar dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu''_{2n-1}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu''_n(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu''_{2n}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu'_n(E). \quad \square$$

Die voorafgaande stelling stel ons nou in staat om die Dobrakov integraal van 'n ξ -meetbare funksie te definieer.

Definisie 6.3.3. (ξ -Integreerbaar, Dobrakov integraal)(Definisie 2 p.523, [9])

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ξ -meetbare funksie is, dan sê ons f is ξ -integreerbaar as daar 'n ry ξ -trapfunksies (f_n) bestaan wat ξ -byna oral na f konvergeer sodanig dat die ry vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring, gelykmatig σ -additief op Σ is. In hierdie geval definieer ons die (Dobrakov) integraal van f oor 'n versameling $E \in \Sigma$ deur

$$\int_E f d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi.$$

In die bostaande geval sal ons die ry trapfunksies (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die Dobrakov integraal van f noem. Hierdie ry is nie uniek nie. Volgens stelling 6.3.2 is die limiet wat in die definisie van die Dobrakov integraal voorkom onafhanklik van die ry definieërende trapfunksies. Ons kan ook die ξ -byna oral konvergensie deur oral konvergensie vervang [[in hierdie geval sal f automaties meetbaar wees]] sonder om die klas van integreerbare funksies verander. Die Laasgenoemde klas funksies sal ons voortaan deur $\mathcal{I}_D$ aandui [[$\mathcal{I}$ vir integreerbaar en $\mathcal{D}$ vir Dobrakov]].

Vanuit die eienskappe van die integraal van 'n trapfunksie (proposisie 6.2.2) en stelling 6.3.2 kry ons nou die volgende basiese eienskappe van die Dobrakov integraal:

Stelling 6.3.4. (Eienskappe van die Dobrakov integraal) (Stelling 3 p.523 [9])

Beskou 'n vaste ξ -integreerbare funksie $f \in \mathcal{I}_D$ en 'n vaste versameling $E \in \Sigma$.

1. $\mathcal{I}_D$ is 'n vektorruimte.
2. $\int_E (\cdot) d\xi : \mathcal{I}_D \rightarrow Y$ is 'n lineêre afbeelding.
3. $\nu(\cdot) := \int_{(\cdot)} f d\xi : \Sigma \rightarrow Y$ is 'n σ -additiewe vektormaat.
4. Die vektormaat ν is $\|\xi\|$ - en $\widehat{\xi}$ -absoluut kontinu.
5. $\int_{E \cap F} f d\xi = \int_E f \mathcal{I}_F d\xi$ vir alle $F \in \Sigma$.

Bewys. Neem aan (f_n) is 'n ry definieërende trapfunksies vir die integraal van f en laat (ν_n) die ry vektormate deur (f_n) voortbring wees.

1. Al wat nog gewys moet word is dat as $f, g \in \mathcal{I}_D$ en $\alpha \in \mathbb{K}$, dan is $f + \alpha g \in \mathcal{I}_D$. Vir f en g bestaan daar rye definieërende trapfunksies (f_n) en (g_n) wat rye vektormate (ν_n) en (ν'_n) onderskeidelik voortbring. Maar dan is $(f_n + \alpha g_n)$ 'n ry integreerbare trapfunksies wat ξ -byna oral na $f + \alpha g$ konvergeer (sien proposisie 3.1.12) en die ry vektormate $(\nu_n + \alpha \nu'_n)$ is gelykmatig σ -additief op Σ . Dus is $f + \alpha g \in \mathcal{I}_D$.

2. Laat $\alpha, f, g, (f_n)$ en (g_n) weer wees soos in 1. Dan is $\alpha f + g \in \mathcal{I}_D$ en $(\alpha f_n + g_n)$ is 'n ry definieërende trapfunksies vir $\alpha f + g$. Volgens die eienskappe in proposisie 6.2.2 en die feit dat die rye vektormate deur die definieërende trapfunksies voortbring gelykmatig konvergeer (stelling 6.3.2), volg dat die Dobrakov integraal lineêr is:

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha f + g) d\xi &= \lim_n \int_E (\alpha f_n + g_n) d\xi \\ &= \alpha \lim_n \int_E f_n d\xi + \lim_n \int_E g_n d\xi = \alpha \int_E f d\xi + \int_E g d\xi. \end{aligned}$$

3. Die ry σ -additiewe vektormate (ν_n) is gedefinieer op 'n σ -algebra en konvergeer gelykmatig na ν . Volgens gevolg 1.5.14 is ν 'n σ -additiewe vektormaat.

4. Aangesien ν 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra is, bestaan daar volgens die Bartle-Dunford-Schwartz lemma (gevolg 1.3.17), 'n eindige maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ sodanig dat

$$\mu(E) \leq \|\nu\|(E) \quad \text{en} \quad \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu\|(E) = 0$$

vir alle $E \in \Sigma$. Maar nou is die $\|\xi\|$ -absoluut kontinuïteit van ν ekwivalent met die $\|\xi\|$ -absoluut kontinuïteit van μ [[As ν $\|\xi\|$ -absoluut kontinu is, dan bestaan daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $\delta > 0$ sodanig dat as $\|\xi\|(E) < \delta$, dan $\|\nu\|(E) < \epsilon$. Maar $\mu(E) \leq \|\nu\|(E)$, dus volg $\mu(E) < \epsilon$ ook in hierdie geval. Andersom, as μ $\|\xi\|$ -absoluut kontinu is, dan bestaan daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n $\delta > 0$ sodanig dat as $\|\xi\|(E) < \delta$, dan $\mu(E) < \epsilon$. Maar $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \|\nu\|(E) = 0$, so daar bestaan 'n $\delta_0 > 0$ sodanig dat as $\mu(E) < \delta_0$, dan $\|\nu\|(E) < \epsilon$. Dus, vir δ_0 bestaan daar 'n $\delta_1 > 0$ sodanig dat as $\|\xi\|(E) < \delta_1$, dan $\mu(E) < \delta_0$ en dus $\|\nu\|(E) < \epsilon$]].

Neem nou aan $N \in \Sigma$ is 'n versameling waarvoor $\|\xi\|(N) = 0$. Volgens proposisie 6.2.2 is elke vektormaat ν_n $\|\xi\|$ -absoluut kontinu, dus is $\|\nu_n\|(N) = 0$ vir alle n . [[Vir elke $\epsilon > 0$ bestaan daar 'n $\delta > 0$ sodanig dat as $\|\xi\|(E) < \delta$, dan $\|\nu_n\|(E) < \epsilon$ vir alle $E \in \Sigma$. Maar $\|\xi\|(N) = 0 < \delta$ vir enige $\delta > 0$, so $\|\nu_n\|(N) < \epsilon$ vir enige $\epsilon > 0$, dus $\nu_n(N) = 0$.]] Dus volg ook dat $\|\nu\|(N) = 0$. [[Neem die supremum oor alle eindige rye skalare (α_i) met $|\alpha_i| \leq 1$ en alle rye $(E_i) \in D^\Sigma$, dan kry ons

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\nu\|(N) &= \sup \left\| \sum_{i=1}^r \alpha_i \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(N \cap E_i) \right\| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r |\alpha_i| \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n(N \cap E_i)\| \\ &\leq \sup \sum_{i=1}^r |\alpha_i| \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n\|(N) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maar dan, omdat $\mu(N) \leq \|\nu\|(N)$, volg dat $\mu(N) = 0$. Neem aan μ (en dus ook ν) is nie $\|\xi\|$ -absoluut kontinu nie. Ons verkry nou 'n teësprak: Laat $\epsilon > 0$. Dan kan ons 'n ry $(E_n) \subseteq \Sigma$ kry sodanig dat $\|\xi\|(E_n) < 1/2^n$, maar waarvoor $\mu(E_n) > \epsilon$ vir alle n . Stel nou $F = \limsup_n E_n$. Aangesien die skalar-semivariasie $\|\xi\|$ monotoon en σ -subadditief is, volg, net soos in die bewys van die Borel-Cantelli lemma dat $\|\xi\|(F) = 0$. Maar aan die ander kant, aangesien μ σ -additief is, kan ons Fatou se lemma toepas en kry ons

$$\mu(F) = \mu \left(\limsup_n E_n \right) \geq \limsup_n \mu(E_n) > \epsilon.$$

Maar ons het in die voorafgaande gedeelte gewys dat as $\|\xi\|(N) = 0$, dan is $\mu(N) = 0$. Die feit dat $\mu(F) > \epsilon$ is dus 'n teësprak. Die aanname dat ν nie $\|\xi\|$ -absoluut kontinu is nie is dus vals.

Laastens, aangesien $\|\xi\|(E) \leq \hat{\xi}(E)$ vir alle $E \in \Sigma$, volg dat ν ook $\hat{\xi}$ -absoluut kontinu is.

5. Vir elke n , stel $g_n = f_n \cdot \mathcal{I}_F$. Dan is (g_n) 'n ry integreerbare trapfunksies wat ξ -byna oral na $f \cdot \mathcal{I}_F$ konvergeer. Laat (ν'_n) die ry vektormate deur (g_n) voortgebring wees. Dan is $\nu'_n(G) = \nu_n(G \cap F)$ vir alle $G \in \Sigma$ (proposisie 6.2.2 (2)). Aangesien die ry (ν_n) gelykmatig σ -additief op Σ is, volg dat die vektormate (ν'_n) ook gelykmatig σ -additief op Σ is. Dus is $f \cdot \mathcal{I}_F$ integreerbaar en

$$\int_{E \cap F} f d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E \cap F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu'_n(E) = \int_E f \cdot \mathcal{I}_F d\xi. \quad \square$$

As 'n gevolg kry ons nou dat stelling 6.3.1 vir algemene rye integreerbare funksies $(f_n) \subseteq \mathcal{I}_D$ geld.

Stelling 6.3.5. (Stelling 1 p.521 [9])

Laat $(f_n) \subseteq \mathcal{I}_D$ 'n ry funksies wees wat ξ -byna oral na 'n meetbare funksie f konvergeer. Stel

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega)\| > 0\}$$

waar $f = f_0$. Dan bestaan daar 'n versameling $N \in \Sigma$, $N \subseteq F$ en 'n stygende ry versamelings $(F_k) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $F_k \uparrow F \setminus N$, $\nu_n(E \cap N) = 0$ vir alle $E \in \Sigma$ en sodanig dat (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke F_k .

Bewys. Volgens die vorige stelling is $\nu_n(E) := \int_E f_n d\xi$ 'n σ -additiewe vektormaat vir elke n . Die bewys van stelling 6.3.1 kan nou woordeliks herhaal word. $\square$

Ons ondersoek nou watter funksies almal Dobrakov integreerbaar is. Ons eerste stelling bekijk die produk van 'n begrensde skalaar ξ -meetbare funksie en 'n ξ -integreerbare funksie.

Stelling 6.3.6. (Stelling 4 p.524 [9])

Laat f 'n ξ -integreerbare funksie wees en laat ϕ 'n begrensde skalaar ξ -meetbare funksie wees. Dan is ϕf 'n ξ -integreerbare funksie.

Bewys.

Neem sonder verlies in algemeenheid aan dat $|\phi(\omega)| \leq 1$ vir alle $\omega \in \Omega$ [[anders neem $\phi(\omega)/\sup_{\omega} |\phi(\omega)|$]]. Aangesien ϕ ξ -meetbaar is, kan ons 'n ry ξ -integreerbare skalaar trapfunksies (ϕ_n) kry sodanig dat $\phi_n(\omega) \rightarrow \phi(\omega)$ en $|\phi_n(\omega)| \leq 1$ vir alle n en alle $\omega \in \Omega$ (lemma 6.1.10). Verder, aangesien f ξ -integreerbaar is, is daar 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies (f_n) wat ξ -byna oral na f konvergeer sodanig dat die ry vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring, gelykmatig σ -additief op Σ is. Stel $g_n = \phi_n f_n$ en laat ν'_n die vektormaat deur g_n voortgebring wees. Dan is (g_n) 'n ry integreerbare trapfunksies wat ξ -byna oral na ϕf konvergeer. [[Laat N 'n versameling wees waarvoor $f_n \rightarrow f$ op $\Omega \setminus N$ en $\|\xi\|(N) = 0$. Dan is $\|g_n(\omega) - \phi(\omega)f(\omega)\| \leq |\phi_n(\omega)|\|f_n(\omega) - f(\omega)\| + |\phi_n(\omega) - \phi(\omega)|\|f(\omega)\| \rightarrow |\phi(\omega)| \cdot 0 + 0 \cdot \|f(\omega)\| = 0$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$.]] In die definisie van die semivariasie van 'n vektormaat word die supremum oor alle skalare $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ met $|\beta_i| \leq 1$ en alle eindige verdelings $(F_i) \in D^\Sigma$ geneem, dus as ons aanneem die trapfunksies f_n en ϕ_n met betrekking tot dieselfde verdeling skryf, sê $f_n = \sum_{j=1}^{r(n)} x_j^{(n)} \mathcal{I}_{E_j^{(n)}}$ en $\phi_n = \sum_{j=1}^{r(n)} \alpha_j^{(n)} \mathcal{I}_{E_j^{(n)}}$, dan is $|\alpha_j^{(n)}| \leq 1$, $g_n = \sum_{j=1}^{r(n)} \alpha_j x_j^{(n)} \mathcal{I}_{E_j^{(n)}}$ en ons kry

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i \nu_n(E \cap F_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r(n)} \beta_i \xi(E \cap F_i \cap E_j^{(n)}) x_j^{(n)} \right\| \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r(n)} (\beta_i \alpha_j^{(n)}) \xi(E \cap F_i \cap E_j^{(n)}) x_j^{(n)} \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i \sum_{j=1}^{r(n)} \xi(E \cap F_i \cap E_j^{(n)}) \alpha_j^{(n)} x_j^{(n)} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m \beta_i \nu'_n(E \cap F_i) \right\| \end{aligned}$$

vir alle $E \in \Sigma$ en alle n . Deur die supremum regdeur te neem volg dat $\|\nu'_n\|(E) \leq \|\nu_n\|(E)$ vir alle $E \in \Sigma$ en elke n . Aangesien (ν_n) gelykmatig σ -additief op Σ is, is $(\|\nu_n\|)$ gelykmatig kontinu op Σ (lemma 1.3.18). Gevolglik is die ry (ν'_n) gelykmatig σ -additief op Σ . [[As $(F_m) \subseteq \Sigma$ 'n ry disjunkte versamelings is, stel $G_k = \bigcup_{m=k+1}^{\infty} F_m$, dan is

$$\begin{aligned} \left\| \nu'_n \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \right) - \sum_{m=1}^k \nu'_n(F_m) \right\| &= \|\nu'_n(G_k)\| \\ &\leq \|\nu'_n\|(G_k) \leq \|\nu_n\|(G_k) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

soos $k \rightarrow \infty$ vir alle n , want $(\|\nu_n\|)$ is gelykmatig kontinu op Σ en $G_k \downarrow \emptyset$.]] Dus, per definisie is ϕf integreerbaar. $\square$

As die semivariasie van ξ kontinu is (sien byvoorbeeld stelling 2.1.14 op p.64), dan is enige begrensde ξ -meetbare funksie ook ξ -integreerbaar.

Stelling 6.3.7. (Stelling 5 p.524 [9])

As die semivariasie $\widehat{\xi}$ kontinu op Σ is en f 'n begrensde ξ -meetbare funksie is, dan is f ξ -integreerbaar.

Bewys.

Aangesien f meetbaar is, kan ons 'n ry integreerbare trapfunksies (f_n) kry wat oral op Ω na f konvergeer met $\|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ vir alle n en alle $\omega \in \Omega$ (lemma 6.1.10). As (ν_n) die ry vektormate deur (f_n) voortgebring is, dan geld vir elke n en elke $E \in \Sigma$ dat

$$\left\| \int_E f_n d\xi \right\| \leq \|f_n\|_E \cdot \widehat{\xi}(E) \leq \|f\|_E \cdot \widehat{\xi}(E).$$

As $(E_k) \subseteq \Sigma$ nou 'n ry disjunkte versamelings is, stel $G_m = \bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k$ dan kry ons

$$\left\| \nu_n \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) - \sum_{k=1}^m \nu_n(E_k) \right\| = \left\| \int_{G_m} f_n d\xi \right\| \leq \|f\| \widehat{\xi}(G_m)$$

vir alle n . As $m \rightarrow \infty$, dan daal G_m na $\emptyset$. Dus, vanuit die kontinuïteit van $\widehat{\xi}$ op Σ , volg dat die vektormate (ν_n) gelykmatig σ -additief op Σ is. Gevolglik is f ξ -integreerbaar. $\square$

In die vorige stelling kan ons nie die aanname dat $\widehat{\xi}$ kontinu is, weglaat nie.

Voorbeeld 6.3.8. (Voorbeeld 7' p.524, [9])

Laat Ω die versameling natuurlike getalle, $\mathbb{N}$, wees en laat Σ die σ -algebra van alle deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees. Laat e_n die n^{de} basis element in ℓ_1 wees [[i.e. $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ waardie 1 in die n^{de} posisie voorkom]]. Vir elke n , laat a_n en b_n die getalle

$$a_n = (1 + 2 + \dots + n) - (n - 1) \quad \text{en} \quad b_n = 1 + 2 + \dots + n$$

wees. Ons definieer nou 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\ell_1, c_0)$ deur

$$\xi(E)x = \sum_{k \in E} x_k \cdot y_k$$

vir $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_1$ en $E \in \Sigma$ en waar

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \dots) \in c_0 \\ y_2 = y_3 &= (0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots) \in c_0 \\ y_4 = y_5 = y_6 &= (0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots) \in c_0 \\ &\vdots \\ y_{a_n} = y_{a_n+1} = \dots = y_{b_n} &= (0, 0, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in c_0. \end{aligned}$$

Definieer die ry versamelings $(E_n) \subseteq \Sigma$ deur

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1\} \\ E_2 &= \{2, 3\} \\ E_3 &= \{4, 5, 6\} \\ &\vdots \\ E_n &= \{a_n, a_n + 1, a_n + 2, \dots, b_n\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dan is elke versameling E_n van eindige semivariasie $[\hat{\xi}(E_n) = \sup \|\sum_{i=1}^r \xi(E_n \cap E_i)x_i\| = \sup \|\sum_{i=1}^r \sum_{k \in E_n \cap E_i} (x_i)_k \cdot y_k\| = \|\sum_{k \in E_n} y_k\| = \|y_{a_n} + y_{a_n+1} + \dots + y_{b_n}\| = \|e_n\| = 1.]$ Definieer 'n funksie $f: \mathbb{N} \rightarrow \ell_1$ deur

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{I}_{E_n}$$

en definieer die ry trapfunksies (f_k) deur

$$f_k = \sum_{n=1}^k e_n \mathcal{I}_{E_n}.$$

Dan is elke f_k 'n ξ -integreerbare trapfunksie en $f_k \rightarrow f$ op $\mathbb{N}$. Die funksie f is dus meetbaar. Verder is f begrens $[\|f\|_{\mathbb{N}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f(n)\|_{\ell_1} = \sup\{0, 1\} = 1]$. Nou, vir enige eindige deelversameling $E \in \Sigma$, is

$$f \cdot \mathcal{I}_E = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{I}_{E_n} \mathcal{I}_E = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \mathcal{I}_{E_n \cap E}$$

'n ξ -integreerbare trapfunksie $[[E \text{ is eindig, dus kan } E_n \cap E \text{ slegs vir eindig veel } n \text{ nie-leeg wees en vir elke } n \text{ geld } \hat{\xi}(E_n \cap E) \leq \hat{\xi}(E_n) = 1 < \infty]]$. In die besonder is elke trapfunksie $f \mathcal{I}_{E_n}$ ξ -integreerbaar. Dus, vanuit die manier waarop ξ gedefinieer is, sien ons dat

$$\int_{\Omega} f \mathcal{I}_{E_m} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(E_n \cap E_m) e_n = \xi(E_m) e_m = e_m \in c_0$$

vir alle m . Die ry versamelings (E_n) is 'n disjunkte ry uit Σ en $\int_{\Omega} f \mathcal{I}_{E_n} d\xi \in c_0$ vir alle n , maar $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f \mathcal{I}_{E_n} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e_n = (1, 1, 1, \dots) \notin c_0$. Dus, volgens stelling

6.3.4 (3 en 5), is f nie integreerbaar nie. Let op dat $\widehat{\xi}$ nie kontinu op Σ is nie. [[As ons die ry versamelings (F_n) deur $F_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ definieer, dan daal F_n na $\emptyset$, maar $\widehat{\xi}(F_n) = 1$ vir alle n .]] $\square$

Die hieropvolgende stelling 6.3.9 gee vir ons 'n klas van ξ -meetbare funksies wat ξ -integreerbaar is. Inderdaad, vanuit stelling 6.3.9 volg dat enige funksie wat Lebesgue integreerbaar is, ook integreerbaar is in die sin van Dobrakov. Hier dui $|\xi|$ en $|\nu|$ die variasie van die operatormaat ξ en vektormaat ν aan. Ons onthou dat $|\xi|$ 'n nie-negatiewe σ -additiewe maat op Σ is (want ξ is σ -additief).

Stelling 6.3.9. (Stelling 6 p. 525 [9])

As f 'n ξ -meetbare funksie is en $\int_{\Omega} \|f\| d|\xi| < \infty$, dan is f ξ -integreerbaar en vir alle $E \in \Sigma$ geld

$$|\nu|(E) \leq \int_E \|f\| d|\xi|$$

waar ν die vektormaat deur f voortgebring is.

Bewys. Aangesien f ξ -meetbaar is, kan ons 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies (f_n) kry wat oral na f konvergeer met $\|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ vir alle n en alle $\omega \in \Omega$. Neem aan die trapfunksie f_n is van die vorm

$$f_n = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}},$$

dan is

$$\|f_n\| = \sum_{i=1}^{r(n)} \|x_i^{(n)}\| \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$$

'n skalaarwaardige integreerbare trapfunksie. Ons kry dus dat vir alle $E \in \Sigma$ dat

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_n d\xi \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{r(n)} \xi(E_i^{(n)} \cap E) x_i^{(n)} \right\| \leq \sum_{i=1}^{r(n)} \left\| \xi(E_i^{(n)} \cap E) \right\| \|x_i^{(n)}\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{r(n)} |\xi|(E_i^{(n)} \cap E) \|x_i^{(n)}\| = \int_E \|f_n\| d|\xi| \leq \int_E \|f\| d|\xi| \end{aligned}$$

want $\|f_n\| \leq \|f\|$ op E . As $E_n \downarrow \emptyset$, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \|f\| d|\xi| = 0.$$

Gevolgtlik is die ry vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring, gelykmatig σ -additief op Σ . [[As (F_k) 'n ry van disjunkte versamelings is dan daal $G_m := \bigcup_{k=m+1}^{\infty} F_k$ na $\emptyset$ soos $m \rightarrow \infty$, dus $\|\nu_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k - \sum_{k=1}^m \nu_n(F_k))\| \leq \int_{G_m} \|f\| d|\xi| \rightarrow 0$ soos $m \rightarrow \infty$.]] Per definisie is f dus 'n integreerbare funksie.

Om die ongelykheid in die stelling te bewys, beskou 'n eindige disjunkte verde-

ling $\{F_1, F_2, \dots, F_r\} \in D^\Sigma$. Dan is

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^r \|\nu_n(E \cap F_j)\| &= \sum_{j=1}^r \left\| \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \xi(E_i^{(n)} \cap E \cap F_j) x_i^{(n)} \right\| \\
 &\leq \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \|\xi(E_i^{(n)} \cap E \cap F_j)\| \|x_i^{(n)}\| \\
 &\leq \sum_{i=1}^{r^{(n)}} \sum_{j=1}^r |\xi(E_i^{(n)} \cap E \cap F_j)| \|x_i^{(n)}\| \\
 &= \sum_{i=1}^{r^{(n)}} |\xi(E_i^{(n)} \cap E \cap \bigcup_{j=1}^r F_j)| \|x_i^{(n)}\| \\
 &= \sum_{i=1}^{r^{(n)}} |\xi(E_i^{(n)} \cap E)| \|x_i^{(n)}\|
 \end{aligned}$$

want die variasie van ξ is additief. Dus deur die supremum oor alle sulke eindige disjunkte verdelings te neem, sien ons dat

$$|\nu_n|(E) = \sup_{(F_j) \in D^\Sigma} \sum_{j=1}^r \|\nu_n(E \cap F_j)\| \leq \sum_{i=1}^{r^{(n)}} |\xi(E_i^{(n)} \cap E)| \|x_i^{(n)}\| = \int_E \|f_n\| d|\xi|. \quad \square$$

Ons onthou dat volgens gevolg 6.2.5 is $\widehat{\xi}(E) = \sup\{\|\int_E f d\xi\| : f \in \mathcal{I}_S, \|f\|_E \leq 1\}$. Die volgende stelling wys dat die supremum nie vergroot as ons die versameling integreerbare trapfunksies, $\mathcal{I}_S$, met algemene integreerbare funksies, $\mathcal{I}_D$, vervang nie.

Stelling 6.3.10. (Stelling 14 p.531 [9])

Vir elke $E \in \Sigma$ geld

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left\{ \left\| \int_E f d\xi \right\| : f \in \mathcal{I}_D, \|f\|_E \leq 1 \right\}.$$

Bewys. Aangesien $\mathcal{I}_S \subseteq \mathcal{I}_D$, is

$$\widehat{\xi}(E) \leq \sup \left\{ \left\| \int_E f d\xi \right\| : f \in \mathcal{I}_D, \|f\|_E \leq 1 \right\}.$$

Andersom, neem $E \in \Sigma$ en $f \in \mathcal{I}_D$ met $\|f\|_E \leq 1$. Laat (f_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f wees en kies (f_n) boonop só dat $\|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ vir alle $\omega \in \Omega$ en alle n (lemma 6.1.10). Dan is $\|f_n\|_E \leq 1$ vir alle n . Laat (ν_n) die ry vektormate deur (f_n) voortgebring wees en laat $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n$ die vektormaat deur f voortgebring wees. Stel nou $F = \bigcup_{n=0}^\infty C_n$ waar $f_0 = f$ en C_n die draerversameling van f_n is. Dan bestaan daar volgens stelling 6.3.1 'n versameling $N \in \Sigma$ en 'n ry $(F_k) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $F_k \uparrow F \setminus N$, $\nu_n(N \cap E) = 0$ vir alle n en alle $E \in \Sigma$ (en dus ook $\nu(E \cap N) = 0$) en sodanig dat (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke F_k . Dan is

$$\int_E f d\xi = \int_{E \cap F} f d\xi + \int_{E \setminus F} f d\xi = \int_{E \cap F} f d\xi,$$

want $C_0 \subseteq F$, dus $f = 0$ op $E \setminus F$. Verder is $\nu(E \cap F \cap N) = 0$, gevolglik,

$$\begin{aligned} \int_{E \cap F} f d\xi &= \int_{F \setminus N} f \mathcal{I}_E d\xi + \int_{F \cap N} f \mathcal{I}_E d\xi = \int_{F \setminus N} f \mathcal{I}_E d\xi + 0 \\ &= \int_{(F \setminus N) \setminus F_k} f \mathcal{I}_E d\xi + \int_{F_k} (f - f_n) \mathcal{I}_E d\xi + \int_{F_k} f_n \mathcal{I}_E d\xi, \end{aligned}$$

vir enige $E \in \Sigma$, want $(F \setminus N) \cap F_k = F_k$ en die integraal is lineêr. Laat $\epsilon > 0$. Aangesien die vektormaat ν deur f voortgebring 'n σ -additiewe vektormaat is, is die semivariasie $\|\nu\|$ volgens lemma 1.3.18 kontinu op Σ . Dus, aangesien $E \cap (F \setminus N) \setminus F_k \downarrow \emptyset$, kan ons 'n k_0 kry sodanig dat

$$\left\| \int_{E \cap (F \setminus N) \setminus F_k} f d\xi \right\| = \|\nu(E \cap (F \setminus N) \setminus F_k)\| \leq \|\nu\|(E \cap (F \setminus N) \setminus F_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

as $k \geq k_0$. Verder konvergeer (f_n) gelykmatig na f op elke F_k [[en dus ook op F_{k_0}]], dus bestaan daar 'n n_0 sodanig dat

$$\left\| \int_{E \cap F_{k_0}} (f - f_n) d\xi \right\| \leq \|f - f_n\|_{F_{k_0}} \widehat{\xi}(E \cap F_{k_0}) < \frac{\epsilon}{2 \widehat{\xi}(E \cap F_{k_0})} \widehat{\xi}(E \cap F_{k_0}) = \frac{\epsilon}{2}$$

as $n \geq n_0$. So as ons $n = n_0$ en $k = k_0$ kies, dan is

$$\left\| \int_E f d\xi \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \left\| \int_{E \cap F_{k_0}} f_{n_0} d\xi \right\| = \epsilon + \left\| \int_E f_{n_0} \mathcal{I}_{F_{k_0}} d\xi \right\|$$

en $f_{n_0} \mathcal{I}_{F_{k_0}}$ is 'n ξ -integreerbare trapfunksie waarvoor $\|f_{n_0} \mathcal{I}_{F_{k_0}}\|_E = \|f_{n_0}\|_{E \cap F_{k_0}} \leq \|f_{n_0}\|_E \leq 1$. Ons kan vir enige $\epsilon > 0$ so 'n trapfunksie kry. Dus is

$$\left\| \int_E f d\xi \right\| \leq \sup \left\{ \left\| \int_E g d\xi \right\| : g \in \mathcal{I}_S, \|g\|_E \leq 1 \right\}.$$

Dit geld vir enige $f \in \mathcal{I}_D$ met $\|f\|_E \leq 1$ en dus ook vir die supremum geneem oor alle sulke funksies. $\square$

Gevolg 6.3.11. (Stelling 14 p.531 [9])

Vir elke ξ -integreerbare funksie f en elke $E \in \Sigma$ geld dat

$$\left\| \int_E f d\xi \right\| \leq \|f\|_E \widehat{\xi}(E).$$

Bewys.

Die funksie $f/\|f\|_E$ is een van die funksies in die versameling $\{g \in \mathcal{I}_D : \|g\|_E \leq 1\}$. Aangesien

$$\widehat{\xi}(E) = \sup \left\{ \left\| \int_E g d\xi \right\| : g \in \mathcal{I}_D, \|g\|_E \leq 1 \right\},$$

volg dat

$$\left\| \int_E \frac{f}{\|f\|_E} d\xi \right\| \leq \widehat{\xi}(E).$$

Die resultaat volg nou uit die lineariteit van die integraal. $\square$

Gevolg 6.3.12.

As (f_n) 'n ry ξ -integreerbare funksies is wat ξ -byna oral na 'n meetbare funksie f konvergeer sodanig dat die vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring gelykmatig σ -additief op Σ is, dan bestaan die limiet

$$\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi$$

vir elke $E \in \Sigma$. Hierdie limiet is onafhanklik van die ry integreerbare funksies (f_n) en die limiet is gelykmatig met betrekking tot $E \in \Sigma$.

Bewys.

Volgens stelling 6.3.4(3) is die integraal van elke funksie f_n 'n σ -additiewe vektormaat. Tesame met die ongelykheid in gevolg 6.3.11, kan ons nou die bewys van stelling 6.3.2 woordeliks herhaal vir algemene ξ -integreerbare funksies in stede van ξ -integreerbare trapfunksies. $\square$

In stelling 6.3.13 sien ons nou dat die limiet wat in gevolg 6.3.12 hierbo voorkom inderdaad die integraal van f is. Die stelling wys ook vir ons dat die klas van integreerbare funksies nie vergroot as ons weer die uitbreidingsprosedure toepas wat ons gebruik het om die integraal van trapfunksies tot meetbare funksies uit te brei nie.

Stelling 6.3.13. (Stelling 15 p.532 [9])

Laat $(f_n) \subseteq \mathcal{I}_D$ 'n ry funksies wees wat ξ -byna oral na 'n ξ -meetbare funksie f konvergeer. As die vektormate (ν_n) deur die funksies f_n voortgebring gelykmatig σ -additief op Σ is, dan is die funksie f ξ -integreerbaar en

$$\int_E f d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi$$

vir elke $E \in \Sigma$.

Bewys. Volgens gevolg 6.3.12 bestaan die limiet $\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi$ in Y vir elke $E \in \Sigma$ en die limiet is gelykmatig met betrekking tot $E \in \Sigma$. Aangesien f meetbaar is, bestaan daar 'n ry integreerbare trapfunksies (g_n) wat op Ω na f konvergeer. Definieer nou die ry integreerbare funksies (h_n) deur

$$h_{2n-1} = f_n \quad \text{en} \quad h_{2n} = g_n.$$

Die ry (h_n) konvergeer ξ -byna oral na f . Laat (ν_n) , (ν'_n) en (ν''_n) die vektormate deur (f_n) , (g_n) en (h_n) onderskeidelik voortgebring voorstel. Stel $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|h_n(\omega)\| > 0\}$. Dan, volgens stelling 6.3.5 bestaan daar 'n versameling $N \subseteq F$ in Σ sodanig dat $\nu''_n(E \cap N) = 0$ (en dus ook $\nu_n(E \cap N) = 0$ en $\nu'_n(E \cap N) = 0$) vir alle n en alle $E \in \Sigma$ en 'n ry $(F_k) \subseteq \Sigma$ sodanig dat $F_k \uparrow F \setminus N$ en sodanig dat (h_n) gelykmatig na f konvergeer op elke F_k . Vir enige $E \in \Sigma$ geld nou dat

$$\begin{aligned} \int_E f_n d\xi &= \int_{E \cap F} f_n d\xi = \int_{E \cap (F \setminus N)} f_n d\xi \\ &= \int_{E \cap (F \setminus N) \setminus F_k} f_n d\xi + \int_{E \cap F_k} f_n d\xi \end{aligned}$$

want $f_n = 0$ op $E \setminus F$, $\nu_n((E \cap F) \cap N) = 0$ en $F_k \cap (F \setminus N) = F_k$.

Aangesien (h_n) dus 'n gelykmatige Cauchy-ry op elke versameling F_k is, bestaan daar vir elke k 'n $n_k \in \mathbb{N}$ sodanig dat $\|h_m(\omega) - h_n(\omega)\|_{F_k} < 1/k\widehat{\xi}(F_k)$ as $m, n \geq n_k$ vir alle $\omega \in F_k$. In die besonder is $\|h_{2n_k-1}(\omega) - h_{2n_k}(\omega)\|_{F_k} = \|f_{n_k}(\omega) - g_{n_k}(\omega)\|_{F_k} < 1/k\widehat{\xi}(F_k)$ vir alle $\omega \in F_k$. Ons het dus 'n ry $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ sodanig dat $\|f_{n_k}(\omega) - g_{n_k}(\omega)\|_{F_k} \cdot \widehat{\xi}(F_k) < 1/k$ vir alle $\omega \in F_k$. Definieer nou vir elke k 'n ξ -integreerbare trapfunksie ϕ_k deur

$$\phi_k = g_{n_k} \cdot \mathcal{I}_N + g_{n_k} \cdot \mathcal{I}_{F_k}.$$

Dan is (ϕ_k) 'n ry ξ -integreerbare trapfunksies wat op Ω na f konvergeer $[[F_k \uparrow F \setminus N$ en $g_{n_k} \rightarrow f$ as $k \rightarrow \infty$, dus $\phi_k \rightarrow f \cdot \mathcal{I}_N + f \cdot \mathcal{I}_{F \setminus N} = f]]$ en

$$\begin{aligned} \int_E \phi_k d\xi &= \int_{E \cap F_k} g_{n_k} d\xi + \int_{E \cap N} g_{n_k} d\xi = \int_{E \cap F_k} g_{n_k} d\xi \\ &= \int_{E \cap F_k \cap F_k} g_{n_k} d\xi + \int_{E \cap F_k \cap N} g_{n_k} d\xi = \int_{E \cap F_k} \phi_k d\xi, \end{aligned}$$

want $\nu'_{n_k}(G \cap N) = 0$ vir enige $G \in \Sigma$. Vanuit die lineariteit en additiwiteit van die integraal volg dat

$$\left\| \nu(E) - \int_E \phi_k d\xi \right\| \leq \left\| \nu(E) - \int_E f_{n_k} d\xi \right\| + \left\| \int_{F_k} (f_{n_k} - \phi_k) \mathcal{I}_E d\xi \right\| + \left\| \int_{F \setminus N \setminus F_k} f_{n_k} \mathcal{I}_E d\xi \right\|.$$

Gevolg 6.3.11 en die eienskappe van die semivariasies $\widehat{\xi}$ en $\|\nu_{n_k}\|$ gee nou

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \nu(E) - \int_E f_{n_k} d\xi \right\| + \|f_{n_k} - \phi_k\|_{E \cap F_k} \cdot \widehat{\xi}(E \cap F_k) + \|\nu_{n_k}(E \cap (F \setminus N \setminus F_k))\| \\ &\leq \left\| \nu(E) - \int_E f_{n_k} d\xi \right\| + \|f_{n_k} - g_{n_k}\|_{F_k} \cdot \widehat{\xi}(F_k) + \|\nu_{n_k}\|(E \cap (F \setminus N \setminus F_k)) \\ &< \left\| \nu(E) - \int_E f_{n_k} d\xi \right\| + \frac{1}{k} + \|\nu_{n_k}\|(F \setminus N \setminus F_k). \end{aligned}$$

Per aanname is die ry vektormate (ν_n) en dus ook (ν_{n_k}) gelykmatig σ -additief. Dus, vanuit lemma 1.3.18 is die semivariasies $(\|\nu_{n_k}\|)$ gelykmatig kontinu. Aangesien $F_k \uparrow F \setminus N$, volg dat $\|\nu_{n_k}\|(F \setminus N \setminus F_k) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Laastens is $\nu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(E)$. Tesame kry ons dat

$$\|\nu(E) - \nu''_k(E)\| = \left\| \nu(E) - \int_E \phi_k d\xi \right\| \rightarrow 0$$

as $k \rightarrow \infty$. Die limiet $\lim_k \nu''_k(E) = \nu(E)$ bestaan dus vir enige $E \in \Sigma$. Volgens stelling 6.3.2 is f integreerbaar en

$$\int_E f d\xi = \lim_k \nu''_k(E) = \nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi. \quad \square$$

Vanuit die Vitali-Hahn-Saks-Nikodým stelling en stelling 6.3.13 kry ons nou die volgende stelling oor die omruil van limiete. Dit is een van die mooiste resultate oor die Dobrakov integraal.

Stelling 6.3.14. (*Stelling 16, p.532 [9]*)

As (f_n) 'n ry ξ -integreerbare funksies is wat ξ -byna oral na die ξ -meetbare funksie f konvergeer en waarvoor die limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi = \nu(E)$$

bestaan vir elke $E \in \Sigma$, dan is f ξ -integreerbaar en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\xi$$

vir elke $E \in \Sigma$ en die limiet is gelykmatig met betrekking tot $E \in \Sigma$.

Bewys. Laat (ν_n) die ry vektormate deur (f_n) voortgebring wees. Dan is elke ν_n 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra. Per aanname bestaan die limiet $\lim_n \nu_n(E) = \nu(E)$ vir elke $E \in \Sigma$, so volgens 1.5.13 is (ν_n) gelykmatig σ -additief op Σ . Maar dan gee stelling 6.3.13 dat

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\xi = \int_E f d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\xi. \quad \square$$

Hoofstuk 7

Vergelyking van vektorintegrale

7.1 Eienskappe van die Lebesgue integraal

Beskou 'n meetbare ruimte (Ω, Σ) en 'n betekende maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Laat $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 'n Borel meetbare funksie wees. Dit is bekend dat f Lebesgue integreerbaar is met betrekking tot μ as en slegs as $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ (sien byvoorbeeld Gevolg 1.6.4(b) p.48, [2]). Met ander woorde as en slegs as $|f|$ $|\mu|$ -integreerbaar is. Ons volg die gebruik van Panchapagesan (sien [30] p.1) en noem hierdie eienskap die *absoluut integreerbaarheid* van die integraal.

Verder is die funksie $\lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieer deur $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ 'n σ -additiewe afbeelding (sien byvoorbeeld Stelling 1.6.1 in [2]). Dus is λ 'n σ -additiewe (vektor)maat op 'n σ -algebra en is dus ook sterk additief. Dit impliseer dat die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$ onvoorwaardelik in norm konvergeer vir enige ry (E_n) van disjunkte meetbare versamelings. Noem hierdie eienskap die *onvoorwaardelike konvergensie* van die integraal.

Die Bochner, Bartle en Dobrakov integrale is almal veralgemenings van die abstrakte Lebesgue integraal. Ons kyk onder andere watter van die twee bogenoemde eienskappe bewaar word deur hierdie drie vektorintegrale.

7.2 Dobrakov vs. ander integrale

Laat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Laat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n σ -additiewe operatormaat wees. As ons sê 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ is ξ -integreerbaar, dan bedoel ons f is Dobrakov integreerbaar met betrekking tot ξ . As f Dobrakov integreerbaar is, dan is die integraal van f oor Ω gelyk aan die integraal van f oor C_f , die draer van f , (sien proposisie 6.2.2(1) en stelling 6.3.2).

7.2.1 Dobrakov vs. Lebesgue

Met die (abstrakte) Lebesgue integraal bedoel ons die klassieke integraal van 'n reëel- of komplekswaardige Borel meetbare funksie gedefinieer op 'n maatruimte (Ω, Σ, μ) . Hier is $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ 'n σ -additiewe betekende maat, waar $\mathbb{K}$ die komplekse of reële getalle is. Aangesien dit maklik is om die komplekse geval uit die reële

geval af te lei, neem ons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Hierdie maat μ kan as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beskou word (sien voorbeeld 2.1.3 op p.58). Dit is dus moontlik om die Lebesgue integraal met die Dobrakov integraal te vergelyk. Hier is $\mu = \xi$ dieselfde versamelingsfunksie, dit is naamlik 'n betekende maat. Ons sal egter ξ skryf wanneer ons in die konteks van operatormate of die Dobrakov integraal werk; en ons sal μ skryf wanneer ons in die konteks van die Lebesgue integraal werk. In voorbeelde 2.1.6 op p.59, 2.1.9 op p.60 en 2.1.12 op p.62 het ons gesien dat $\hat{\xi} = \|\xi\| = |\xi| = |\mu|$ waar $|\mu|$ die totale variasie van die betekende maat μ is.

Laat $\mu = \xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ nou die betekende maat wees waarna ons in die voorafgaande deel gekyk het. In hierdie afdeling sê ons $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is μ -integreerbaar as f Lebesgue integreerbaar met betrekking tot μ is. Soos reeds genoem sê ons f is ξ -integreerbaar as f Dobrakov integreerbaar is met betrekking tot ξ .

Die Lebesgue integraal word vir Borel meetbare funksies gedefinieer. As die funksie f 'n μ -integreerbare funksie is, dan is die draer $C_f = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > 0\}$ 'n σ -eindige versameling. [[Definieer byvoorbeeld $C_n := \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > 1/n\}$ vir elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is (C_n) 'n stygende ry meetbare versamelings, want f is Borel meetbaar. Vir elke n is $|\mu(C_n)| < \infty$, want $\int_{C_f} |f| d|\mu| < \infty$; en $C_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$]].

Stelling 7.2.1.

As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n σ -additiewe betekende maat is, dan is $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integreerbaar as en slegs as f Dobrakov integreerbaar is en die integrale stem ooreen.

Bewys. Neem aan $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is Lebesgue integreerbaar. Dan is f Borel meetbaar en C_f is 'n σ -eindige versameling met betrekking tot die betekende maat μ . Gevolglik is $\mu : \Sigma_f \rightarrow \mathbb{R}$ 'n σ -eindige betekende maat waar Σ_f die beperking van Σ tot C_f is. Verder is die Lebesgue integraal van f oor Ω gelyk aan die integraal van f oor C_f [[$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{C_f} f d\mu + \int_{\Omega \setminus C_f} 0 d\mu = \int_{C_f} f d\mu$]]. Beskou μ as die operatormaat ξ soos tevore. In die geval stem die Borel meetbare funksies en die ξ -meetbare funksies ooreen (sien proposisie 6.1.8 op p.125). Aangesien f 'n μ -integreerbare funksie is, is

$$\int_{\Omega} |f| d|\mu| = \int_{C_f} |f| d|\xi| < \infty.$$

Dus is die ξ -meetbare funksie f 'n ξ -integreerbare funksie oor C_f volgens stelling 6.3.9 op p.141. Maar die Dobrakov integraal is additief en $f = 0$ op $\Omega \setminus C_f$ dus is f ook ξ -integreerbaar oor die hele Ω .

Andersom, as f 'n ξ -integreerbare funksie is, dan bestaan daar 'n ry definiërende funksies (f_n) vir die Dobrakov integraal van f . Dan geld per definisie dat die ry (f_n) ξ -byna oral na f konvergeer en dat as (μ_n) die ry mate deur (f_n) voortgebring is, dan is (μ_n) gelykmatig σ -additief op Σ . Vir elke n is

$$\int_E |f_n| d|\mu| = \int_E |f_n| d|\xi| = |\mu_n|(E_n)$$

vir alle $E \in \Sigma$. Volgens gevolg 1.3.18 op p.33 is die ry variasies $(|\mu_n|)$ gelykmatig kontinu op Σ , want elke μ_n is 'n σ -additiewe betekende maat (stelling 6.2.2 op p.127). Dus, as (E_k) 'n ry van disjunkte meetbare versamelings is, dan is

$$|\mu_n| \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) - \sum_{k=1}^m |\mu_n|(E_k) = |\mu_n| \left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k \right) \rightarrow 0$$

as $m \rightarrow \infty$, want $\bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k \rightarrow \emptyset$ as $m \rightarrow \infty$. Dit wys dat die ry variasies ($|\mu_n|$) gelykmatig σ -additief is. Laat C_n die draerversameling van elke trapfunksie f_n wees en stel $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Dan bestaan daar volgens stelling 6.3.1 op p.132 'n meetbare versameling $N \subseteq F$ en 'n stygende ry meetbare versamelings (F_k) sodanig dat

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = F \setminus N \quad \text{en} \quad \mu_n(E \cap N) = 0$$

vir elke $E \in \Sigma_f$ en sodanig dat (f_n) gelykmatig na f konvergeer op elke F_k . Die Dobrakov integraal van f oor $E \in \Sigma$ is gelyk aan die limiet van die ry $(\mu_n(E))$. Dus is die Dobrakov integraal van f nul oor $N \cap E$ vir enige $E \in \Sigma$. Aangesien die integraal ook additief is, volg dat

$$\begin{aligned} \int_F |f| d|\xi| &= \int_{F \setminus N} |f| d|\xi| = \int_{F \setminus N \setminus F_k} |f| d|\xi| + \int_{F_k} |f| d|\xi| \\ &\leq \int_{F \setminus N \setminus F_k} |f| d|\xi| + \int_{F_k} |f - f_n| d|\xi| + |\mu_n|(F_k). \end{aligned}$$

Volgens Fatou se lemma is

$$\int_{F \setminus N \setminus F_k} |f| d|\xi| \leq \liminf_n \int_{F \setminus N \setminus F_k} |f_n| d|\xi| = \liminf_n |\mu_n|(F \setminus N \setminus F_k).$$

Kies 'n $\epsilon > 0$. Uit die gelykmatige σ -additiwiteit van die ry variasies ($|\mu_n|$) en die feit dat $F_k \uparrow F \setminus N$, kan ons 'n k_ϵ kry sodanig dat $\liminf_n |\mu_n|(F \setminus N \setminus F_k) < \epsilon/2$ as $k = k_\epsilon$. Verder konvergeer (f_n) gelykmatig na f op elke F_k en in die besonder ook op F_{k_ϵ} . Ons kan dus 'n n_ϵ kry sodanig dat

$$|f_n - f|_{F_{k_\epsilon}} < \frac{\epsilon}{|\xi|(F_{k_\epsilon})}$$

as $n \geq n_\epsilon$. As $k = k_\epsilon$ en $n \geq n_\epsilon$, dan is

$$\begin{aligned} \int_F |f| d|\xi| &\leq \liminf_n |\mu_n|(F \setminus N \setminus F_k) + \int_{F_k} |f - f_n| d|\xi| + |\mu_n|(F_k) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{|\xi|(F_k)} |\xi|(F_k) + |\mu_n|(F_k) = \epsilon + |\mu_n|(F_k) < \infty. \end{aligned}$$

Dus is $\int_{C_f} |f| d|\mu| = \int_\Omega |f| d|\mu| = \int_F |f| d|\xi| < \infty$. Soos tevore volg dat C_f 'n σ -eindige versameling is en dat $\xi : \Sigma_f \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 'n σ -eindige operatormaat is. Per aanname is die ξ -integreerbare funksie ook ξ -meetbaar. Volgens proposisie 6.1.8 op p.125 is $f : C_f \rightarrow \mathbb{R}$ ook Borel meetbaar. Aangesien C_f 'n meetbare versameling is, volg dat $f = f\mathcal{I}_{C_f} + 0\mathcal{I}_{\Omega \setminus C_f}$ self ook Borel meetbaar is. Dit tesame met die feit dat $\int_\Omega |f| d|\mu| < \infty$ verseker dat f Lebesgue integreerbaar is met betrekking tot μ .

Ons wys nou dat die waardes van die Lebesgue en Dobrakov integrale ooreenstem. As f Lebesgue integreerbaar is, dan is die integraal van f oor Ω dieselfde as die integraal oor C_f en die integrale van die positiewe funksies f^+ en f^- oor C_f is nie altwee oneindig nie. Verder bestaan daar stygende rye Borel meetbare trapfunksies (g_n) en (h_n) wat op C_f na f^+ en f^- onderskeidelik styg. Aangesien $\xi = \mu : \Sigma_f \rightarrow \mathbb{R}$ 'n σ -eindige betekende maat is, bestaan daar 'n ry ξ -trapfunksies wat oral na f konvergeer. [[Laat (C_n) 'n ry meetbare versamelings wees sodanig

dat $\xi(C_n) < \infty$ vir elke n en $C_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Dan is elke $f_n := g_n \mathcal{I}_{C_n} - h_n \mathcal{I}_{C_n}$ 'n ξ -trapfunksie en $f_n(\omega) \rightarrow f^+(\omega) - f^-(\omega) = f(\omega)$ as $n \rightarrow \infty$ vir alle $\omega \in C_f$]. Laat (μ_n) die ry mate deur (f_n) voortgebring wees. Vir elke $E \in \Sigma$ geld

$$\mu_n(E) = \int_{E \cap C_n} g_n d\mu - \int_{E \cap C_n} h_n d\mu \rightarrow \int_{E \cap C_f} f^+ d\mu - \int_{E \cap C_f} f^- d\mu = \int_E f d\mu$$

waar die integraal aan die regterkant die Lebesgue integraal van f is. Die ry mate (μ_n) konvergeer dus in elke versameling $E \in \Sigma$. Dus is (f_n) 'n definiërende ry vir die Dobrakov integraal van f (sien stelling 6.3.2 op p.6.3.2). Per definisie is die Dobrakov integraal van f oor E gelyk aan die limiet van die ry $(\mu_n(E))$, maar hierdie limiet is presies die Lebesgue integraal van f oor E . Die waardes van die Dobrakov en Lebesgue integrale stem dus ooreen. $\square$

Stelling 7.2.1 het vir ons gewys dat die Dobrakov integraal presies ooreenstem met die Lebesgue integraal as ons met skalaarwaardige funksies en skalaarwaardige mate werk. Natuurlik het die Dobrakov integraal dan ook al die eienskappe wat die Lebesgue integraal het in hierdie geval. Ons sien egter dat die Dobrakov integraal ook in die algemeen baie van die eienskappe van die Lebesgue integraal bewaar. Stelling 6.3.9 op p.141 wys dat die Dobrakov integraal die absoluut integreerbaarheid van die Lebesgue integraal bewaar. Volgens stelling 6.3.4(3) is die Dobrakov integraal 'n σ -additiewe vektormaat op die σ -algebra Σ (dit is dus sterk additief). Gevolglik bewaar die Dobrakov integraal ook die onvoorwaardelike konvergensie van die Lebesgue integraal.

7.2.2 Dobrakov vs. Bochner

Laat (Ω, Σ, μ) 'n volledige σ -eindige maatruimte wees en laat X 'n Banachruimte wees. Laat $I : X \rightarrow X$ die identiteitsoperator op X wees en beskou μ as die operatormaat $\xi(E) = \mu(E)I$ vir $E \in \Sigma$. Dan is $\hat{\xi} = \|\xi\| = |\xi| = \mu$. Dit is dus moontlik om die Bochner integraal met die Dobrakov integraal te vergelyk.

Proposisie 7.2.2.

As μ 'n volledige maat is en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n μ -Bochner integreerbare funksie is dan is f ook Dobrakov integreerbaar en die twee integrale stem ooreen.

Bewys. Beskou μ as 'n operatormaat ξ soos hierbo. Neem aan $f : \Omega \rightarrow X$ is μ -Bochner integreerbaar. Dan is f 'n μ -meetbare funksie en per definisie bestaan daar 'n ry μ -trapfunksies (f_n) sodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0.$$

Dit beteken die ry (f_n) konvergeer in $L^1(\mu)$ en dus ook in μ -maat na f (sien byvoorbeeld Stelling 2.5.1 in [2]). Maar dan bestaan daar 'n deelry (f_{n_k}) wat μ -byna oral na f konvergeer (Stelling 3.1.8 op p.71). Sê $f_{n_k}(\omega) \rightarrow f(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega \setminus N$ waar $\mu(N) = 0$. Stel $g_k = f_{n_k} \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ vir elke k . Dan is (g_k) 'n ry ξ -trapfunksies wat oral na $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ konvergeer. Dus is $f \mathcal{I}_{\Omega \setminus N}$ 'n ξ -meetbare funksie en aangesien ons aanneem dat f 'n μ -integreerbare funksie is, gee stelling 4.2.5 op

p.94 dat

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \|f\| d\mu &= \int_{\Omega \setminus N} \|f\| d\mu + \int_N \|f\| d\mu \\ &= \int_{\Omega \setminus N} \|f\| d|\xi| + 0 < \infty.\end{aligned}$$

Volgens stelling 6.3.9 op p.141 is f 'n ξ -integreerbare funksie oor $\Omega \setminus N$. Maar N is 'n ξ -nulversameling, dus f ook ξ -integreerbaar oor die hele Ω .

Laastens sien ons ook dat die Dobrakov integraal van f ooreenstem van die Bochner integraal van f . Beskou weer die rye (f_n) en (g_k) hierbo. Volgens lemma 4.2.3 op p.93 bestaan die limiet

$$\nu(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

vir elke $E \in \Sigma$ en per definisie is $\nu(E)$ die Bochner integraal van f . Maar dan geld dieselfde vir die deelry (f_{n_k}) . Dus is (g_k) 'n ry ξ -trapfunksies wat ξ -byna oral na f konvergeer en as (ν_k) die ry vektormate deur (g_k) voortgebring is, dan konvergeer $(g_k(E))$ vir elke E na $\nu(E)$. Volgens stelling 6.3.2 op p.133 is (g_k) 'n ry definiërende trapfunksies vir die Dobrakov integraal van f en

$$\int_E f d\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_{n_k} d\mu = \nu(E) = \int_E f d\mu,$$

waar die integraal aan die linkerkant die Dobrakov integraal en die integraal aan die regterkant die Bochner integraal van f is. $\square$

Stelling 7.2.2 wys dus dat enige μ -Bochner integreerbare funksie ook Dobrakov integreerbaar is as μ volledig is. Die volgende voorbeeld wys dat 'n Dobrakov integreerbare funksie nie noodwendig Bochner integreerbaar is nie.

Voorbeeld 7.2.3. (voorbeeld 2 p.16,[30])

Laat $\Omega = \mathbb{N}$ en laat Σ die magsversameling van $\mathbb{N}$ wees. Laat X 'n oneindig dimensionele Banachruimte wees. Definieer 'n maat $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ deur $\mu(E) = |E|$ waar $|E|$ die kardinaliteit van die versameling E is. Dan is $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$ 'n volledige σ -eindige maatruimte. Beskou μ as die operatormaat ξ soos tevore. Dan is $\widehat{\xi} = |\xi| = \xi$. Volgens die Dvoretzky-Rogers stelling (sien p.16 van [28]) kan ons 'n ry $(x_n) \subseteq X$ kry sodanig dat die reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ onvoorwaardelik konvergeer, maar dat $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty$. Laat $\mathcal{F}$ die algebra van eindige deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees (dan is $\xi(E) < \infty$ vir alle $E \in \mathcal{F}$). Definieer 'n funksie $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ deur $f(n) = x_n$. Vir elke k , definieer 'n trapfunksie

$$f_k = \sum_{i=1}^k x_i \mathcal{I}_{\{i\}}.$$

Dan is elke f_k 'n $\mathcal{F}$ -trapfunksie (en dus ook 'n ξ -trapfunksie) wat oral na f konvergeer. Vir elke k , laat

$$\mu_k(E) = \int_E f_k d\xi = \sum_{i=1}^k \xi(\{i\} \cap E) x_i$$

waar $E \in \Sigma$. Dan is $\mu_k(E)$ 'n deelreeks van $\sum_{i=1}^k x_i$ vir elke $E \in \Sigma$. Maar $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergeer onvoorwaardelik, dus bestaan die limiet van die ry $\mu_k(E)$ in $\mathbb{R}$ vir elke $E \in \Sigma$. Volgens stelling 6.3.2 op p.133 is (f_k) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f . Die funksie is dus Dobrakov integreerbaar met betrekking tot ξ .

Maar aan die ander kant is

$$\int_{\mathbb{N}} \|f\| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \infty.$$

Volgens stelling 4.2.5 kan f nie μ -Bochner integreerbaar wees nie.

Dus, as μ 'n volledige maat is, dan is die klas van μ -Bochner integreerbare funksies streng bevat in die klas van Dobrakov integreerbare funksies.

7.2.3 Dobrakov vs. Bartle

Laat X, Z en Y Banachruimtes wees sodanig dat daar 'n bilineêre afbeelding, $B : X \times Z \rightarrow Y$ bestaan sodanig dat $\|xz\|_Y \leq K\|x\|_X\|z\|_Z$ vir een of ander $K > 0$. Laat $\nu : \Sigma \rightarrow Z$ 'n σ -additiewe vektormaat wees. Dan kan ons ν as 'n operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ beskou deur ξ te definieer deur $\xi(E)x = B(x, \nu(E))$ vir $E \in \Sigma$ en $x \in X$. Hierdie operatormaat ξ is dan σ -additief in die GOT (en dus ook in die SOT) van $L(X, Y)$ en $\hat{\nu} = \hat{\xi}$ (sien afdeling 2.2). Dit is dus moontlik om die Bartle integraal (die σ -additiewe geval) met die Dobrakov integraal te vergelyk. In hierdie afdeling sê ons f is ν -integreerbaar as f Bartle integreerbaar is (met betrekking tot ν) en ons sê f is ξ -integreerbaar as f Dobrakov integreerbaar is (met betrekking tot ξ).

Proposisie 7.2.4.

As $\nu : \Sigma \rightarrow Z$ 'n σ -additiewe vektormaat is en $f : \Omega \rightarrow X$ 'n ν -Bartle integreerbare funksie is, dan is f Dobrakov integreerbaar.

Bewys. Beskou ν as die operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ soos hierbo. Dan is enige ν -trapfunksie ook 'n ξ -trapfunksie. Neem aan f is ν -integreerbaar. Dan bestaan daar 'n ry definiërende ν -trapfunksies (f_n) vir die Bartle integraal van f . Hierdie ry konvergeer in ν -maat na f . Volgens stelling 3.1.8 bestaan daar 'n deelry (f_{n_k}) wat ν -byna oral na f konvergeer. Dus is (f_{n_k}) 'n ry ξ -trapfunksies wat ξ -byna oral na f konvergeer. Laat (ν_k) nou die ry vektormate deur die ry (f_{n_k}) voortgebring wees. Aangesien (f_n) 'n definiërende ry trapfunksies vir die Bartle integraal van f is, bestaan die limiet van die ry (ν_k) gelykmatig in $E \in \Sigma$ (stelling 5.2.4 op p.107). Dus, volgens stelling 6.3.2 op p.133 is (ν_k) gelykmatig σ -additief. Dit beteken (f_{n_k}) is 'n ry definiërende funksies vir die Dobrakov integraal van f . Die funksie is dus ξ -integreerbaar. $\square$

Die versameling van Bartle-integreerbare funksies is dus bevat in die versameling van Dobrakov integreerbare funksies. In die volgende voorbeeld konstrueer ons 'n funksie wat ξ -integreerbaar is, maar nie eers ν -meetbaar is nie. Dit wys dat die Bartle integreerbare funksies streng bevat is in die Dobrakov integreerbare funksies.

Voorbeeld 7.2.5. (ξ -integreerbare funksie wat nie ν -meetbaar is nie)
(Voorbeeld 7" p.529, [9])

Laat $\Omega = \mathbb{N}$ en Σ die σ -algebra van alle deelversamelings van $\mathbb{N}$ wees. Laat $X = \ell_1$ en $Y = c_0$. Laat $(y_n) \subseteq c_0$ dieselfde ry as in voorbeeld 6.3.8 op p.139 wees. Dit is,

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \dots) \in c_0 \\ y_2 = y_3 &= (0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots) \in c_0 \\ y_4 = y_5 = y_6 &= (0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots) \in c_0 \\ &\vdots \\ y_{a_n} = y_{a_n+1} = \dots = y_{b_n} &= (0, 0, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \in c_0. \end{aligned}$$

waar a_n en b_n die getalle

$$a_n = (1 + 2 + \dots + n) - (n - 1) \quad \text{en} \quad b_n = 1 + 2 + \dots + n$$

is. Definieer die ry versamelings $(E_n) \subseteq \Sigma$ deur

$$\begin{aligned} E_1 &= \{1\} \\ E_2 &= \{2, 3\} \\ E_3 &= \{4, 5, 6\} \\ &\vdots \\ E_n &= \{a_n, a_n + 1, a_n + 2, \dots, b_n\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Laat $x = \{x_1, x_2, \dots\} \in \ell_1$ 'n willekeurige ry wees. Definieer nou

$$\begin{aligned} \xi(\{1\})x &= \{x_1, 0, 0, \dots\} \\ \xi(\{2\})x &= \left\{0, \frac{1}{2}x_2 + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\right)x_3, 0, \dots\right\} \\ \xi(\{3\})x &= \left\{0, \frac{1}{2}x_4 + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\right)x_5, 0, \dots\right\} \\ \xi(\{4\})x &= \left\{0, 0, \frac{1}{3}x_6 + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3}\right)x_7, \dots\right\} \\ \xi(\{5\})x &= \left\{0, 0, \frac{1}{3}x_8 + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3}\right)x_9, \dots\right\} \\ \xi(\{6\})x &= \left\{0, 0, \frac{1}{3}x_{10} + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3}\right)x_{11}, \dots\right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Met ander woorde as $k \in E_n$, dan is die n^{de} inskrywing van die ry $\xi(\{k\})$ die getal

$$\frac{1}{n}x_{2k-2} + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n}\right)x_{2k-1}$$

waar $x_0 := 0$; met nul by al die ander inskrywings. Definieer dan die operatormaat $\xi : \Sigma \rightarrow L(\ell_1, c_0)$ deur $\xi(E) = \sum_{k \in E} \xi(\{k\})$. Net soos in voorbeeld 6.3.8 op p.139

volg dat $\widehat{\xi}(E) = |\sum_{k \in E} y_k|$. Gevolglik is $\widehat{\xi}$ nie kontinuu nie (sien voorbeeld 6.3.8). Verder is $\|\xi(E)\| = \sup_{k \in E} \|y_k\|$. Dus is ξ wel σ -additief in die GOT van $L(\ell_1, c_0)$ [[As (E_i) 'n ry disjunkte meetbare versamelings is, dan is

$$\left\| \xi \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) - \sum_{i=1}^j \xi(E_i) \right\| = \left\| \xi \left(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} E_i \right) \right\| = \sup_{k \in \bigcup_{i=j+1}^{\infty} E_i} \|y_k\| = \sup_{k \in \bigcup_{i=j+1}^{\infty} E_i} \frac{1}{k}.$$

Vir enige $\epsilon > 0$ kan ons 'n j_0 en 'n k_0 kry sodanig dat $1, 2, \dots, k_0 - 1 \notin \bigcup_{i=j_0+1}^{\infty} E_i$ waar $1/k_0 < \epsilon$. Dit wys dat die reeks $\sum_{i=1}^{\infty} \xi(E_i)$ in die GOT na $\xi(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ konvergeer.]] Definieer nou 'n funksie $f : \mathbb{N} \rightarrow \ell_1$ deur

$$\begin{aligned} f(1) &= \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\} := z_1 \\ f(2) &= \{0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\} := z_2 \\ f(3) &= \{0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots\} := z_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dan is $f = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \mathcal{I}_{\{k\}}$ en $\|f(n)\| \leq 2$ vir alle $n \in \mathbb{N}$. Neem nou 'n $m \in \mathbb{N}$, sê $m \in E_n$, dan is

$$\begin{aligned} \int_{\{m\}} f d\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\{k\} \cap \{m\}) z_k = \xi(\{m\}) z_m = \left\{ 0, 0, \dots, \frac{1}{n} 1 + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} \right) 1, \dots \right\} \\ &= \left\{ 0, 0, \dots, \frac{1}{n^3}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

En dus is $\|\int_{\{m\}} f d\xi\| = 1/n^3$. Die som van die ry integrale $(\int_{\{m\}} f d\xi)$ is dus absoluut konvergent. Stel nou vir elke j die funksie $f_j = \sum_{k=1}^j z_k \mathcal{I}_{\{k\}}$. Dan is (f_j) 'n ry ξ -trapfunksies wat oral na f konvergeer en

$$\nu_j(E) := \int_E f_j d\xi = \sum_{k=1}^j \xi(\{k\} \cap E) z_k.$$

Aangesien die reeks $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\{m\}} f d\xi = \sum_{m=1}^{\infty} \xi(\{m\}) z_m$ absoluut en dus ook onvoorwaardelik konvergent is, is enige deelreeks van $\sum_{m=1}^{\infty} \xi(\{m\}) z_m$ ook konvergent. Gevolglik bestaan die limiet $\lim_{j \rightarrow \infty} \nu_j(E)$ vir alle $E \in \Sigma$. Volgens stelling 6.3.2 op p.133 is (ν_j) nou gelykmatig σ -additief. Die ry ξ -trapfunksies (f_k) is dus 'n ry definiërende funksies vir die Dobrakov integraal van f .

Beskou nou $\xi = \nu : \Sigma \rightarrow L(\ell_1, c_0)$ as 'n σ -additiewe vektormaat wat in die Banachruimte $L(\ell_1, c_0)$ afbeeld (ξ is σ -additief in die GOT van $L(\ell_1, c_0)$). Ons wys dat daar geen ry ν -trapfunksies kan bestaan wat in ν -maat na f konvergeer nie.

Neem aan $g = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}$ is 'n ν -trapfunksie waar $x_i \in \ell_1$ vir elke i . Stel die versameling $N = \{n \in \mathbb{N} : \|f(n) - g(n)\| > 1/3\}$. Neem aan dat $\widehat{\xi}(N) < 1/3$. Dan volg per definisie van N en f dat $\mathbb{N} \setminus N \subseteq \bigcup_{i=1}^r E_i$. As daar 'n versameling E_i was sodanig dat $E_i \setminus N$ twee disjunkte punte n_1 en n_2 bevat, dan is

$$1 = \|f(n_1) - f(n_2)\| \leq \|f(n_1) - x_i\| + \|x_i - f(n_2)\| \leq 2/3$$

'n teëspraak. Dus is $\mathbb{N} \setminus N \subseteq \{n_1, n_1, \dots, n_s\}$ vir een of ander $s \leq r$. Stel $n_0 = \max_{1 \leq j \leq s} n_j$. Dan is $\{n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\} \subseteq N$. Maar dan is $\widehat{\xi}(N) = 1$, 'n teëspraak

met $\widehat{\xi}(N) < 1/3$. Daar kan dus geen ry ν -trapfunksies wees wat in ν -maat na f konvergeer nie. $\square$

Stelling 7.2.6.

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n operatormaat is sodanig dat die semivariasie $\widehat{\xi}$ kontinu is en $\widehat{\xi}(\Omega) < \infty$, dan is enige funksie $f : \Omega \rightarrow X$ wat Dobrakov integreerbaar is ook Bartle integreerbaar en die twee integrale stem ooreen.

Bewys. Neem aan $\widehat{\xi}$ is kontinu en $\widehat{\xi}(\Omega) < \infty$. Volgens stelling 2.1.14 op p.64 bestaan daar 'n eindige maat μ sodanig dat $\mu(E) \rightarrow 0$ as en slegs as $\widehat{\xi}(E) \rightarrow 0$. Verder kry ons met die hulp van gevolg 2.1.15 op p.65 dat $\nu = \xi$ 'n σ -additiewe vektormaat is wat die $*$ -eienskap met betrekking tot X het (sien definisie 5.3.2 op p.119).

Neem nou aan f is ξ -integreerbaar. Dan bestaan daar 'n ry ξ -trapfunksies wat ξ -byna oral na f konvergeer sodanig dat die vektormate (ν_n) deur (f_n) voortgebring gelykmatig σ -additief is. Volgens stelling 6.3.2 op p.133 bestaan die limiet van die ry $(\nu_n(E))$ vir elke E . Maar dan is (f_n) ook 'n ry ν -trapfunksies wat aan die voorwaardes van stelling 5.3.6 op p.120 voldoen. Die funksie f is dus volgens hierdie stelling 'n ν -Bartle integreerbare funksie. Laastens, vanuit stelling 5.3.6 en per definisie van die Dobrakov integraal is

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = \int_E f d\xi$$

vir elke $E \in \Sigma$, waar die integraal aan die linkerkant die Bartle- en die integraal aan die regterkant die Dobrakov integraal is. $\square$

Proposisie 7.2.4 en stelling 7.2.6 gee nou vir ons die volgende resultaat.

Gevolg 7.2.7.

As $\xi : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$ 'n σ -additiewe operatormaat is sodanig dat $\widehat{\xi}$ kontinu is en $\widehat{\xi}(\Omega) < \infty$, dan is ξ ook 'n σ -additiewe vektormaat wat die $*$ -eienskap het en 'n funksie $f : \Omega \rightarrow X$ is ξ -Dobrakov integreerbaar as en slegs as f ξ -Bartle integreerbaar is. As f integreerbaar is, dan is die waarde van die Dobrakov integraal van f gelyk aan die waarde van die Bartle integraal van f .

7.3 Bartle vs. ander integrale

Laat $\mathcal{F}$ 'n algebra en Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Die meeste integrale brei die abstrakte Lebesgue integraal op so 'n manier uit dat die integraal van funksies $f : \Omega \rightarrow X$ (waar X 'n meer algemene ruimte as die skalare is) gedefinieer kan word ten opsigte van een of ander tipe maat wat σ -additief is. Dieselfde geld ook vir die Bartle integraal, maar die Bartle integraal brei ook die abstrakte Lebesgue integraal op so 'n manier uit dat die integraal ten opsigte van eindig additiewe (vektor)mate $\nu : \mathcal{F} \rightarrow L(X, Y)$ gedefinieer kan word. Aangesien die ander integrale wat ons bestudeer met σ -additiewe mate werk, beskou ons 'n σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow L(X, Y)$. As ons in hierdie afdeling sê ν -integreerbaar, dan bedoel ons Bartle integreerbaar ten opsigte van ν . Die Bartle integraal is reeds in die vorige afdeling met die Dobrakov integraal vergelyk. Ons kyk dus nog na hoe die Bartle integraal met die abstrakte Lebesgue integraal en die Bochner integraal vergelyk.

7.3.1 Bartle vs. Lebesgue

As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n σ -additiewe betekende maat is, dan is $\nu = \mu$ 'n σ -additiewe vektormaat wat op 'n σ -algebra gedefinieer is en $|\nu| = \|\nu\| = \hat{\nu}$. Dus het ν die $*$ -eienskap volgens die Bartle-Dunford-Schwartz lemma (gevolg 1.3.17 op p.33) en $\hat{\nu}(\Omega) = \|\nu\|(\Omega) < \infty$ volgens gevolg 1.3.9 op p.27. Dit is dus moontlik om die abstrakte Lebesgue integraal met die Bartle integraal te vergelyk.

Proposisie 7.3.1. *As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n σ -eindige σ -additiewe betekende maat is en $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integreerbaar is, dan is f ook Bartle integreerbaar. As μ boonop volledig is, dan is enige funksie f Bartle integreerbaar is ook Lebesgue integreerbaar. In albei gevalle stem die waardes van die twee integrale ooreen.*

Bewys. Neem aan $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is Lebesgue integreerbaar met betrekking tot μ . Dan bestaan daar ry Σ -trapfunksies (g_n) en (h_n) sodanig dat $g_n(\omega) \uparrow f^+(\omega)$ en $h_n(\omega) \uparrow f^-(\omega)$ vir alle $\omega \in \Omega$. Die Lebesgue integraal van f oor 'n versameling $E \in \Sigma$ word gegee deur

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E g_n d\mu - \int_E h_n d\mu \right)$$

en die som is nie van die vorm $\infty - \infty$ nie. Stel $f_n = g_n - h_n$ en $\nu_n(E) = \int_E f_n d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$. Dan konvergeer die ry Σ -trapfunksies (f_n) oral na f en die ry $(\nu_n(E))$ konvergeer na $\int_E f d\mu$ vir alle $E \in \Sigma$. Aangesien μ 'n σ -eindige maat is, is (f_n) ook 'n ry ν -trapfunksies wat ν -byna oral na f konvergeer (sien proposisie 3.2.11 op p.79). Maar dan bevredig (f_n) die voorwaardes van stelling 5.3.6 op p.120. Dus is f Bartle integreerbaar en die Bartle integraal van f is die limiet van die ry $(\nu_n(E))$. Maar die limiet van hierdie ry is presies gelyk aan $\int_E f d\mu$, die Lebesgue integraal van f .

Omgekeerd, aangesien ν die $*$ -eienskap het, is f Bartle integreerbaar as en slegs as daar 'n ry ν -trapfunksies (f_n) is wat ν -byna oral na f konvergeer sodanig dat die ry mate (ν_n) deur (f_n) voortgebring in elke versameling $E \in \Sigma$ konvergeer (stelling 5.3.6 op p.120). Aangesien μ σ -eindig en volledig is, is (f_n) ook 'n ry Borel meetbare trapfunksies wat oral na 'n funksie g konvergeer waar $f = g$ μ -byna

oral (sien proposisie 3.2.11 op p.79). Die volledigheid van μ verseker dat f Borel meetbaar is. Die rye Borel-meetbare trapfunksies (f_n^+) en f_n^- konvergeer oral na g^+ en g^- onderskeidelik. Aangesien die ry $(\nu_n(\Omega))$ konvergeer, is

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n^+ d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n^- d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n^+ - f_n^-) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\Omega),\end{aligned}$$

en die verskil is nie van die vorm $\infty - \infty$ nie. Dus is f Lebesgue integreerbaar en, soos reeds gewys, is die Lebesgue integraal gelyk aan die limiet van die ry $(\nu_n(\Omega))$. Dus stem die waardes van die Lebesgue en Bartle integrale ooreen. $\square$

Volgens stelling 5.3.1 op p.118 is die Bartle integraal met betrekking tot 'n σ -additiewe vektormaat $\nu : \Sigma \rightarrow Y$ weer self 'n σ -additiewe vektormaat op Σ . Dit is dus ook 'n sterk additiewe vektormaat. Die Bartle integraal bewaar dus die onvoorwaardelik konvergensie van die Lebesgue integraal. Die Bartle integraal bewaar nie die absoluut integreerbaarheid van die integraal nie.

7.3.2 Bartle vs. Bochner

Laat $\mu = \nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n volledige σ -eindige σ -additiewe betekende maat wees. Net soos in die vorige afdeling het ν die $*$ -eienskap.

Proposisie 7.3.2. *As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n volledige σ -eindige σ -additiewe betekende maat is, dan is enige Bochner integreerbare funksie ook Bartle integreerbaar.*

Bewys. Neem aan die funksie $f : \Omega \rightarrow X$ is Bochner integreerbaar. Dan bestaan daar 'n ry μ -trapfunksies sodanig dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - f_n\| d\mu = 0. \quad (7.3.1)$$

Volgens lemma 4.2.3 bestaan die limiet van die ry $(\nu_n(E)) = (\int_E f_n d\mu)$ vir elke $E \in \Sigma$. Aangesien 7.3.1 geld, volg dat (f_n) in $L^1(\mu)$ is en dus ook in μ -maat na f konvergeer as $n \rightarrow \infty$. Dus bestaan daar 'n deelry (f_{n_k}) wat vir μ -byna alle $\omega \in \Omega$ na f konvergeer. Die ry (f_{n_k}) is dus 'n ry ν -trapfunksies wat ν -byna oral na f konvergeer sodanig dat die ry $(\nu_{n_k}(E))$ vir elke $E \in \Sigma$ konvergeer. Volgens stelling 5.3.6 op p.120 is f ν -integreerbaar. $\square$

7.4 Bochner vs. ander integrale

Laat Σ 'n σ -algebra van deelversamelings van Ω wees. Laat μ 'n volledige maat op Σ wees. Die Bochner integraal is reeds in afdelings 7.2.2 en 7.3.2 met die Dobrakov en Bartle integrale vergelyk. Ons kyk dus nog na hoe die Bochner integraal met die abstrakte Lebesgue integraal vergelyk.

7.4.1 Bochner vs. Lebesgue

In hierdie afdeling sê ons $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is μ -Bochner integreerbaar as f Bochner integreerbaar met betrekking tot μ is. As f Lebesgue integreerbaar met betrekking tot μ is, dan is sal ons net sê f is Lebesgue integreerbaar.

Proposisie 7.4.1.

As $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 'n volledige maat is, dan is $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integreerbaar as en slegs as f μ -Bochner integreerbaar is.

Bewys. As f Lebesgue integreerbaar is, dan is f Borel-meetbaar en

$$\int_{C_f} |f| d\mu = \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty. \quad (7.4.1)$$

Verder is $C_f = \{\omega \in \Omega : |f|(\omega) > 0\}$ 'n σ -eindige versameling en dus is $f : C_f \rightarrow \mathbb{R}$ ook μ -meetbaar volgens proposisie 3.2.11 op p.79. Maar dan is $f = f\mathcal{I}_{C_f} + 0\mathcal{I}_{\Omega \setminus C_f}$ ook μ -meetbaar en volgens 7.4.1 en stelling 4.2.5 op.94 is f μ -Bochner integreerbaar.

Omgekeerd, as f μ -Bochner integreerbaar is, dan is f per definisie ook μ -meetbaar en

$$\int_{C_f} |f| d\mu = \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

Die funksie $f\mathcal{I}_{C_f}$ is net soos tevore Borel-meetbaar en dus is f ook Lebesgue integreerbaar. $\square$

Hoofstuk 8

Toepassing: die stogastiese integraal in 'n Riesz ruimte

8.1 Definisies en agtergrond

In klassieke waarskynlikheidsleer is die Itô integraal $I(X) = \int_J x_t dm_t$ die integraal wat gedefinieer is vir 'n stogastiese proses (x_t) met betrekking tot 'n martingaal (m_t) op 'n interval $J \subset \mathbb{R}$ (sien [27]). Beide $x_t(\omega)$ en $m_t(\omega)$ is vir elke vaste t reëelwaardige meetbare funksies (genoem stogastiese veranderlikes) gedefinieer op een of ander waarskynlikheidsruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dit is onmoontlik om die integraal as 'n gewone Stieltjes-Lebesgue integraal te definieer vir elke vaste $\omega \in \Omega$, omdat die martingaal m_t gewoonlik nie 'n funksie van begrensde variasie is nie (as m_t byvoorbeeld die Brownse beweging is, dan bestaan die Stieltjes-Lebesgue integraal nie). Om die integraal te definieer, word gebruik gemaak van die feit dat 'n martingaal (m_t) 'n ontbinding het, (die sogenaamde Doob-Meyer ontbinding, sien [18]) wat die vorm

$$(m_t^2) = (n_t) + (a_t)$$

het, waar (n_t) 'n martingaal is en (a_t) 'n stygende regskontinue funksie is. Natuurlik kan die integraal wel direk met behulp van Riemann somme vir 'n trapfunksie x_t gedefinieer word en in die geval geld dat

$$I(X)^2 = \int_J x_t^2 dA_t.$$

Laasgenoemde integraal bestaan as 'n Stieltjes-Lebesgue integraal vir meer algemene funksies as net die trapfunksies. Hierdie formule (bekend as Itô se formule) bied dus die moontlikheid om die integraal $I(X)$ vir meer algemene funksies te definieer.

In [18], [19], [20] en [21] en word stogastiese prosesse bestudeer waarby die funksie x_t waardes in 'n Riesz ruimte aanneem. Beide die veranderlikes x_t en m_t in die Itô integraal is dan vektorwaardige funksies. Daar is bewys dat die Doob-Meyer ontbinding steeds geldig is. Met die (vektorwaardige) stygende proses (a_t) kan 'n vektormaat ν_A gedefinieer word op intervalle deur te stel $\nu_A([a, b]) = a_b - a_a$ en dit kan uitgebrei word tot 'n vektormaat op die Borel versamelings. Die essensiële stap

in die definisie van die Itô integraal, naamlik dat die integraal $\int_J x_t^2 dA_t = \int_J x_t^2 d\nu_A$ bestaan, word nou 'n probleem.

Dit is dus noodsaaklik dat 'n tipe vektorintegraal gedefinieer moet word in die konteks van Riesz ruimtes (wat nie noodwendig Banach ruimtes is nie). Ons doelwit in hierdie hoofstuk is om hierdie noodsaaklike element in die ontwikkeling van Itô integrasie in Riesz ruimtes te bestudeer.

8.1.1 Riesz ruimte agtergrond

Laat $\mathfrak{E}$ 'n Riesz ruimte wees.

Definisie 8.1.1. (Universele vervollediging Die Riesz ruimte $\mathfrak{E}^u$)([37])

$\mathfrak{E}$ word *lateraal volledig* genoem as elke deelversameling van $\mathfrak{E}$ wat uit onderling disjunkte elemente bestaan 'n supremum in $\mathfrak{E}$ het.

$\mathfrak{E}$ word *universeel volledig* genoem as $\mathfrak{E}$ Dedekind en lateraal volledig is.

'n Ruimte $\mathfrak{E}^u$ word 'n universele vervollediging van $\mathfrak{E}$ genoem as $\mathfrak{E}^u$ universeel volledig is en $\mathfrak{E}^u$ die Riesz ruimte $\mathfrak{E}$ as 'n orde digte ideaal bevat.

Stelling 8.1.2. ([37])

As $\mathfrak{E}$ 'n Archimedese Riesz ruimte is, dan het $\mathfrak{E}$ 'n unieke universele vervollediging $\mathfrak{E}^u$ en as e 'n swak orde eenheid vir $\mathfrak{E}$ is, dan is e ook 'n swak orde eenheid vir $\mathfrak{E}^u$.

Laat $\mathfrak{E}$ 'n Archimedese Riesz ruimte met swak orde eenheid e wees. Die hoof-ideaal $\mathfrak{E}_e = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-ne, ne]$ kan met 'n vermenigvuldiging toegerus word. Tesame met hierdie vermenigvuldiging is $\mathfrak{E}_e$ 'n f -algebra (sien [37]). Hierdie vermenigvuldiging kan tot die unieke universele vervollediging $\mathfrak{E}^u$ uitgebrei word. Dan is $\mathfrak{E}^u$ 'n f -algebra en e is beide die multiplikatiewe identiteit en die swak orde eenheid van $\mathfrak{E}^u$. Meer nog, hierdie vermenigvuldiging op $\mathfrak{E}^u$ is orde kontinu. Die versameling van alle orde kontinue lineêre funksionale op $\mathfrak{E}$ word deur $\mathfrak{E}_{00}^{\sim}$ aangedui.

Definisie 8.1.3. (Perfekte Riesz ruimte)([1])

'n Riesz ruimte $\mathfrak{E}$ word perfek genoem as $(\mathfrak{E}_{00}^{\sim})_{00}^{\sim} = \mathfrak{E}$.

Vir elke $\phi \in \mathfrak{E}_{00}^{\sim}$ is $p_{\phi}(\cdot) = |\phi|(|\cdot|)$ 'n Riesz seminorm. Hierdie seminorme p_{ϕ} bring die swak topologie $|\sigma|(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_{00}^{\sim})$ voort.

Stelling 8.1.4. (Stelling 2.2 p.2, [20])

'n Dedekind volledige Riesz ruimte $\mathfrak{E}$ is perfek as en slegs as $\mathfrak{E}$ volledig is in die topologie $|\sigma|(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_{00}^{\sim})$.

Definisie 8.1.5. (Sup-vervollediging)(p.277, [19])

As $\mathfrak{E}$ 'n Dedekind volledige Riesz ruimte is, dan word die sup-vervollediging $\mathfrak{E}_s$ van $\mathfrak{E}$ gedefinieer as die unieke Dedekind volledige geordende keël wat 'n grootste element bevat en $\mathfrak{E}$ as 'n subkeël, wat gelyk is aan die groep van alle omkeerbare elemente, bevat.

8.1.2 Agtergrond oor stogastiese prosesse in Riesz ruimtes

Laat $\mathfrak{E}$ 'n Riesz ruimte wees. Ons gee hier net die nodige begrippe om die motivering van die hoofstuk te verstaan en om die vektorintegraal te definieer. Die volgende opsomming is uit [20] geneem.

Definisie 8.1.6. (Voorwaardelike verwagting)

'n Streng positiewe lineêre orde kontinue projeksie $\mathbb{F} : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$ word 'n voorwaardelike verwagting genoem as

1. die beeld $\mathfrak{F} = \mathbb{F}(\mathfrak{E})$ 'n Dedekind volledige Riesz deelruimte van $\mathfrak{E}$ is;
2. die band deur $\mathfrak{F}$ voortgebring gelyk aan $\mathfrak{E}$ is.

Definisie 8.1.7. (Filtrasie)

Laat $J = [a, b]$ 'n interval in $\mathbb{R}^+$ wees. 'n Familie $(\mathbb{F}_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in J}$ word 'n filtrasie op $\mathfrak{E}$ genoem as elke $\mathbb{F}_t$ 'n voorwaardelike verwagting op $\mathfrak{E}$ is en $\mathfrak{F}_t$ die beeld van $\mathbb{F}_t$ is, sodanig dat $\mathbb{F}_s \mathbb{F}_t = \mathbb{F}_t \mathbb{F}_s = \mathbb{F}_t$ as $t \leq s$.

Definisie 8.1.8. (Stogastiese proses)

Laat $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$. 'n Net $(x_t)_{t \in J}$ word 'n stogastiese proses genoem as $x_t \in \mathfrak{E}$ vir elke t .

'n Stogastiese proses $(x_t)_{t \in J}$ is versoenbaar met die filtrasie $(\mathbb{F}_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in J}$ as $x_t \in \mathfrak{F}_t$ vir elke $t \in J$.

Definisie 8.1.9. (Martingaal)

'n Stogastiese proses $(x_t)_{t \in J}$ wat versoenbaar met die filtrasie $(\mathbb{F}_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in J}$ is, word 'n *submartingaal* (*supermartingaal*) genoem as $\mathbb{F}_t(x_s) \geq x_t$ ($\mathbb{F}_t(x_s) \leq x_t$) vir alle $t \leq s$. 'n Stogastiese proses wat beide 'n sub- en supermartingaal is, word 'n martingaal genoem.

Proposisie 8.1.10. (Proposisie 2.6, [20])

As $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$ 'n Riesz deelruimte is en $e \in \mathfrak{F}$, dan is die f -algebra $\mathfrak{F}^u$ 'n deelalgebra van die f -algebra $\mathfrak{E}^u$. Dus, as $x \in \mathfrak{F}$, dan is $x^2 \in \mathfrak{F}^u$.

8.1.3 Die ruimtes $\mathcal{L}^1$ en $\mathcal{L}^2$

Beskou 'n Dedekind volledige Riesz ruimte $\mathfrak{E}$ met swak orde eenheid e . Neem aan dat $\mathfrak{E}$ 'n perfekte ruimte is ($(\mathfrak{E}_{00}^\sim)_{00}^\sim = \mathfrak{E}$). Dan is $(\mathfrak{E}, |\sigma|(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_{00}^\sim))$ 'n volledige topologiese ruimte.

Proposisie 8.1.11. (Proposisie 3.1 p.4, [20])

As elke $0 \leq \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ tot die sup-vervollediging $\mathfrak{E}_s$ uitgebrei word, dan is

$$\mathfrak{E} = \{x \in \mathfrak{E}_s : |\phi|(|x|) < \infty \text{ vir alle } \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim\}.$$

Laat $\mathbb{F} : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$ nou 'n voorwaardelike verwagting wees sodanig dat $\mathbb{F}(e) = e$. Ons neem aan dat $\text{dom } \mathbb{F} = \mathfrak{E}$. Definieer vir elke $\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ met $|\phi| = 1$, 'n seminorm p_ϕ deur

$$p_\phi(x) = |\phi|(\mathbb{F}(|x|)).$$

Laat $\mathcal{P} := \{p_\phi : \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim \text{ en } |\phi| = 1\}$. Elke seminorm p_ϕ kan nou tot die sup-vervollediging $\mathfrak{E}_s$ uitgebrei word met die toegewing dat $p_\phi(x) = \infty$ nou dalk mag voorkom. Laat $\sigma(\mathcal{P})$ die swak topologie op $\mathfrak{E}$ wees wat deur die seminorme in $\mathcal{P}$ voortgebring word. Definieer

$$\mathcal{L}^1 := (\mathfrak{E}, \sigma(\mathcal{P})).$$

Volgens proposisie 8.1.11 is

$$\mathfrak{E} = \{x \in \mathfrak{E}_s : |\phi|(|x|) < \infty \text{ vir alle } \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim\} = \{x \in \mathfrak{E}_s : \mathbb{F}(|x|) \in \mathfrak{E}\} \subseteq \text{dom } \mathbb{F} = \mathfrak{E}.$$

Dus is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= \{x \in \mathfrak{E}_s : |\phi|(\mathbb{F}(|x|)) < \infty \text{ vir alle } \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim\} \\ &= \{x \in \mathfrak{E}_s : p_\phi(x) < \infty \text{ vir alle } p_\phi \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

toegerus met die lokaal soliede topologie $\sigma(\mathcal{L}^1, \mathcal{P})$.

Aangesien die universele vervollediging $\mathfrak{E}^u$ 'n f -algebra is, kan ons die vermenigvuldiging van positiewe elemente na $\mathfrak{E}_s$ uitbrei deur

$$xy := \sup_i x_i y_i$$

vir enige nette $(x_i), (y_i) \subseteq \mathfrak{E}$ sodanig dat $x_i \uparrow x \in \mathfrak{E}_s$ en $y_i \uparrow y \in \mathfrak{E}_s$. Definieer vir elke $\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ met $|\phi| = 1$ 'n seminorm q_ϕ deur

$$q_\phi(x) = (|\phi|(\mathbb{F}(|x|^2)))^{\frac{1}{2}}.$$

Laat $\mathcal{Q} = \{q_\phi : \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim \text{ en } |\phi| = 1\}$. Definieer

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &:= \{x \in \mathfrak{E}_s : |\phi|(\mathbb{F}(|x|^2)) < \infty \text{ vir alle } \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim\} \\ &= \{x \in \mathfrak{E}_s : q_\phi(x) < \infty \text{ vir alle } \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim\} \end{aligned}$$

toegerus met die swak topologie $\sigma(\mathcal{Q})$. Volgens proposisie 3.2 van [20] is $\mathcal{L}^2 = \{x \in \mathfrak{E}_s : |x|^2 \in \mathfrak{E}\}$.

Definieer 'n bilineêre vorm $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ op $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$ vir elke $\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ deur $\langle x, y \rangle = \phi \mathbb{F}(xy)$.

Proposisie 8.1.12. (Cauchy-Schwartz ongelykheid)

As $x, y \in \mathcal{L}^2$, dan geld vir vir alle $\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ met $|\phi| = 1$ dat

$$p_\phi(xy) \leq q_\phi(x)q_\phi(y).$$

Gevolgtik is $xy \in \mathcal{L}^1$ as $x, y \in \mathcal{L}^2$.

As ons 'n integraal wil definieer, is dit belangrik dat ons dit op 'n volledige ruimte doen.

Stelling 8.1.13. (Stelling 3.3 p.5, [20])

Die ruimtes $\mathcal{L}^1$ en $\mathcal{L}^2$ is volledige topologiese vektorruimtes.

8.1.4 Die vektormaat deur 'n stygende stelsel voortbring

Laat $\mathfrak{E}$ 'n Dedekind volledige Riesz ruimte met swak orde eenheid e wees. Neem aan die orde dual $\mathfrak{E}_{00}^\sim$ skei die punte van $\mathfrak{E}$. Laat J deurgaans 'n interval in $\mathbb{R}^+$ wees. Die eerste deel van hierdie afdeling word uit [19] (p.279) geneem. Vir 'n meer volledige beskrywing sien [22].

Definisie 8.1.14. (Versoembare stygende proses)

'n Stogastiese proses $(a_t)_{t \in J}$ word 'n stygende versoembare proses genoem as

1. $(a_t)_{t \in J}$ versoenbaar is met een of ander filtrasie $(\mathbb{F}_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in J}$
2. $a_0 = 0$ en $a_s \leq a_t$ as $s \leq t$;
3. $(a_t)_{t \in J}$ regs kontinu is $(a_t \downarrow a_s \text{ as } t \downarrow s)$.

'n Versoenbare stygende proses $(a_t)_{t \in J}$ word integreerbaar genoem as $a_\infty = \sup_{t \in J} a_t \in \mathfrak{E}$. Laat $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ die algebra in $\mathbb{R}^+$ wees wat deur links-ope regs-geslote intervale $(a, b]$ voortgebring word. Enige element $E \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ is die vereniging van eindige veel links-ope, regs-geslote intervale I_n . Gegee 'n stygende proses $A := (a_t) \subseteq \mathfrak{E}$ definieer ons nou 'n Stieltjes-Lebesgue maat ν_A op die algebra $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$. Ons definieer ν_A eers vir 'n links-ope, regs-geslote interval $(a, b]$ en dan vir 'n alegemene versamelings $E = \bigcup_{k=1}^n I_k$.

1. $\nu_A(a, b] := a_b - a_a$;
2. vir 'n versameling $\bigcup_{k=1}^n I_k = E \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ definieer ons

$$\nu_A(E) := \sum_{k=1}^n \nu_A(I_k).$$

Per definisie is $\nu_A(\emptyset) = \nu_A((a, a]) = a_a - a_a = 0$.

Lemma 8.1.15. (*Lemma 3.7. p.279, [19]*)

Die vektormaat $\nu_A : \mathcal{F}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathfrak{E}$ is orde σ -additief op $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$.

Die vektormaat ν_A word nou tot die Borel σ -algebra deur die algebra $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ voortgebring, uitgebrei. Ons volg dieselfde pad as die klassieke uitbreiding van 'n maat. Beskou dus eers die bo-omhullende van $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ gedefinieer deur

$$\mathcal{F}^\uparrow(\mathbb{R}^+) := \{S \subseteq \mathbb{R}^+ : S_n \uparrow S \text{ vir een of ander } (S_n) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)\}$$

Brei ν_A uit tot $\mathcal{F}^\uparrow(\mathbb{R}^+)$ deur vir 'n $S \in \mathcal{F}^\uparrow(\mathbb{R}^+)$ met $S_n \uparrow S$ te definieer

$$\nu_A(S) := \sup_n \nu_A(S_n).$$

Hierdie supremum bestaan altyd in die sup-vervollediging $\mathfrak{E}_s$ van $\mathfrak{E}$. As die stygende proses $A = (a_t)$ integreerbaar is, dan is $\nu_A(S) \leq a_\infty \in \mathfrak{E}$. Dus is $\nu_A(S) \in \mathfrak{E}$ volgens die Dedekind volledigheid van $\mathfrak{E}$. As ons net op 'n interval $[a, b]$ werk, dan is A integreerbaar, want $a_t \leq a_b$ vir alle $t \in [a, b]$.

Proposisie 8.1.16.

Die uitgebreide vektormaat $\nu_A : \mathcal{F}^\uparrow(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathfrak{E}$ is monotoon en σ -additief.

Definisie 8.1.17. (Uitwendige vektormaat ν_A^*)

Vir 'n willekeurige deelversameling $S \subseteq \mathbb{R}^+$ definieer ons

$$\nu_A^*(S) := \inf\{\nu_A(E) : E \in \mathcal{F}^\uparrow(\mathbb{R}^+), S \subseteq E\}.$$

Definisie 8.1.18. (ν_A -Meetbare versameling)

'n Deelversameling $E \subseteq \mathbb{R}^+$ word ν_A -meetbaar genoem as dit vir elke $S \subseteq \mathbb{R}^+$ geld dat

$$\nu_A^*(S) = \nu_A^*(S \cap E) + \nu_A^*(S \cap \mathbb{R}^+ \setminus E).$$

Proposisie 8.1.19.

Laat $\mathcal{M}$ die versameling van alle ν_A -meetbare deelversamelings van $\mathbb{R}^+$ wees. Dan het $\mathcal{M}$ die volgende eienskappe:

1. As $E \in \mathcal{M}$, dan is $(\mathbb{R}^+ \setminus E) \in \mathcal{M}$.
2. As $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{M}$, dan is $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{M}$.
3. ν_A^* is additief op $\mathcal{M}$.
4. As $\mathfrak{E}_{00}^\sim$ die punte van $\mathfrak{E}$ skei, dan is $\mathcal{M}$ 'n σ -algebra en ν_A^* is 'n σ -additiewe vektormaat op $\mathcal{M}$.

Aangesien ons aanneem dat $\mathfrak{E}_{00}^\sim$ die punte van $\mathfrak{E}$ skei, is $\mathcal{M}$ volgens proposisie 8.1.19 'n σ -algebra wat die links-ope, regs-geslote intervalle in $\mathbb{R}^+$ bevat. Maar die Borel σ -algebra op $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, word deur hierdie intervalle voortgebring. Dus bevat $\mathcal{M}$ vir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Dit beteken $\nu_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathfrak{E}$ is 'n vektormaat wat σ -additief in orde is.

8.2 Die vektorintegraal in 'n Riesz ruimte

Laat $(m_t, \mathfrak{F}_t)$ 'n regs kontinue martingaal versoenbaar met die filtrasie $(\mathbb{F}_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in J}$ wees. Dan is (m_t^2) 'n submartingaal en (m_t^2) het 'n unieke Doob-Meyer ontbinding $(m_t^2) = (x_t) + (a_t)$ waar $X = (x_t)$ 'n martingaal en $A = (a_t)$ 'n regs-kontinue stygende voorspelbare proses is, en $a_t = 0$ in die linker eindpunt van die interval J , sien [18]. Soos ons in die inleiding beskryf het, is 'n noodsaaklike stap wat benodig word om die Itô integraal te definieer, dat ons 'n integraal van vektorwaardige funksies definieer met betrekking tot die vektormaat voortgebring deur die proses (a_t) .

8.2.1 Die maat ν_A en verbonde konsepte

Laat $\mathfrak{E}$ 'n Dedekind volledige Riesz ruimte met swak orde eenheid e en orde kontinue dual $\mathfrak{E}_{00}^\sim$ wees. Laat $\mathbb{F}$ 'n voorwaardelike verwagting op $\mathfrak{E}$ wees. Stel $\Phi = \{\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim : |\phi|(e) = 1\}$ en laat $\mathcal{L}^1$ en $\mathcal{L}^2$ die topologies volledige ruimtes van afdeling 8.1.3 wees. Laat $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ die versamelings van seminorme p_ϕ en q_ϕ soos in afdeling 8.1.3 wees. Vir $\phi \in \Phi$, laat C_ϕ die draerband van ϕ wees. Dan is p_ϕ en q_ϕ norms op C_ϕ . Trouens (C_ϕ, p_ϕ) is 'n Banach rooster en (C_ϕ, q_ϕ) is 'n Hilbert rooster.

Laat $A := (a_t)_{t \in J}$ 'n integreerbare stygende stogastiese proses in $\mathfrak{E}$ wees waar $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$. Laat $\nu_A : \mathcal{B}(J) \rightarrow \mathfrak{E}$ die σ -additiewe vektormaat wees wat ons in afdeling 8.1.4 ontwikkel het. **Ons neem aan dat ν_A sy waardes in $\mathcal{L}^2$ aanneem.** Ons wil die integraal van 'n stogastiese proses (x_t) ten opsigte van ν_A definieer. **Ons neem ook aan dat (x_t) sy waardes in $\mathcal{L}^2$ aanneem.** As $E \in \mathcal{B}(J)$, dan kan ons die produk van x_t en $\nu_A(E)$ in die f -algebra $\mathfrak{E}^u$ neem. Dan is $x_t \nu_A(E) \in \mathcal{L}^1$ en volgens die Cauchy-Schwartz ongelykheid (CS-ongelykheid, sien proposisie 8.1.12) geld vir elke $\phi \in \Phi$ dat

$$p_\phi(x_t \nu_A(E)) \leq q_\phi(x_t) q_\phi(\nu_A(E)).$$

Beskou 'n vaste $0 \leq \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ waar ϕ streng positief is. Dan is $C_1^\phi := (C_\phi, p_\phi) = (\mathcal{L}^1, p_\phi) = \mathcal{L}^1$ 'n Banach ruimte en $C_2^\phi := (C_\phi, q_\phi) = (\mathcal{L}^2, q_\phi) = \mathcal{L}^2$ is 'n Hilbert ruimte. Beskou die vektormaat $\nu_A : \mathcal{B}(J) \rightarrow \mathcal{L}^2$. Dan kan ν_A as 'n operatormaat $\xi_A : \mathcal{B}(J) \rightarrow L(\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^1)$ beskou word waar

$$\xi_A(E)x := x \nu_A(E)$$

vir alle $x \in \mathcal{L}^2$. Weer eens word die bostaande produk in die f -algebra $\mathfrak{E}^u$ geneem en $x \nu_A(E) \in \mathcal{L}^1$ vir alle $x \in \mathcal{L}^2$ en $E \in \mathcal{B}(J)$. As $E \in \mathcal{B}(J)$, dan kry ons weer volgens die CS-ongelykheid dat

$$\sup_{q_\phi(x) \leq 1} p_\phi(\xi_A(E)x) = \sup_{q_\phi(x) \leq 1} p_\phi(x \nu_A(E)) \leq \sup_{q_\phi(x) \leq 1} q_\phi(x) q_\phi(\nu_A(E)) = q_\phi(\nu_A(E)).$$

Die norm van die operator $\xi_A(E)$ is dus $\|\xi_A(E)\| = q_\phi(\nu_A(E))$. Maar die vektormaat ν_A is σ -additief in orde en q_ϕ is 'n orde kontinue norm op $C_\phi = \mathcal{L}^2$ (want beide ϕ en $\mathbb{F}$ is orde kontinu). Dus is ξ_A 'n operatornorm wat σ -additief in die GOT van $L(\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^1)$ is. Die vektormaat ν_A is dus σ -additief (in die norm q_ϕ van die Banach ruimte $\mathcal{L}^2$).

Ons definieer nou bekende konsepte in vektormaatteorie. In die geval is p_ϕ die norm op $\mathcal{L}^1$ en q_ϕ is die norm op $\mathcal{L}^2$. In die algemeen het ons 'n versameling $\mathcal{P}$ of

$\mathcal{Q}$ van seminorme p_ϕ of q_ϕ . In daardie geval is p_ϕ 'n norm op C_ϕ , die draerband van ϕ . Vir elke $\phi \in \Phi$, laat $P_\phi : \mathfrak{E}_s \rightarrow C_\phi$ die projeksie op die draerband van ϕ wees. Dan geld dat $\phi(x) = \phi(P_\phi x)$ vir alle $x \in \mathfrak{E}$ en dus ook $p_\phi(x) = p_\phi(P_\phi(x))$. Dieselfde is ook waar vir q_ϕ .

Die volgende definisie stem nou presies ooreen met definisie 2.2.2 op p.67, want ons werk met norme op die Banach ruimtes C_1^ϕ en C_2^ϕ . Onthou dat ons die eindige disjunkte verdelings van J in elemente van $\mathcal{B}(J)$ deur $D^{\mathcal{B}(J)}$ aandui.

Definisie 8.2.1. (ϕ -Semivariasie)

Die ϕ -semivariasie van die vektormaat ν_A oor 'n versameling $E \in \mathcal{B}(J)$ word gedefinieer deur

$$\widehat{\nu}_A^\phi(E) = \sup p_\phi \left(\sum_{i=1}^r x_i \nu_A(E \cap E_i) \right)$$

waar $(E_i) \in D^{\mathcal{B}(J)}$ en $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathcal{L}^2$ en $q_\phi(x_i) \leq 1$ vir elke i .

Net so stem die ϕ -skalaarsemivariasie ooreen met definisie 2.1.8 op p.60.

Definisie 8.2.2. (ϕ -Skalaarsemivariasie)

Die ϕ -skalaarsemivariasie van die vektormaat ν_A oor 'n versameling $E \in \mathcal{B}(J)$ word gedefinieer deur

$$\|\nu_A\|^\phi(E) = \sup q_\phi \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \nu_A(E \cap E_i) \right)$$

waar $(E_i) \in D^{\mathcal{B}(J)}$ en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}^+$ en $\alpha_i \leq 1$ vir elke i .

Hierbo is die produkte $x_i \nu_A(E \cap E_i)$ in $\mathcal{L}^1 \subseteq \mathfrak{E}_s$ en $\alpha_i \nu_A(E \cap E_i) \in \mathcal{L}^2 \subseteq \mathfrak{E}_s$. Dus is $P_\phi(x_i \nu_A(E \cap E_i))$ in C_1^ϕ en $P_\phi(\alpha_i \nu_A(E \cap E_i))$ in C_2^ϕ .

Die ϕ -semivariasie is monotoon en σ -subadditief en $q_\phi(\nu_A(E)) \leq \|\nu_A\|^\phi(E) \leq \widehat{\nu}_A^\phi(E)$ vir alle $E \in \mathcal{B}(J)$ (sien proposisie 2.1.13 op p.62). Aangesien ν_A 'n σ -additiewe vektormaat op 'n σ -algebra is, is ν_A 'n begrensde vektormaat, dit beteken dat $\|\nu_A\|^\phi(J) < \infty$ vir alle $\phi \in \Phi$ (sien gevolg 1.3.9 op p.27).

8.2.2 Die Dobrakov integraal van (x_t) ten opsigte van ν_A

Ons gebruik nou die benadering van Dobrakov om 'n integraal van (x_t) ten opsigte van ν_A te definieer. Onthou dat ν_A 'n operatormaat is wat σ -additief in die GOT is van $L(C_2^\phi, C_1^\phi)$ is vir elke $\phi \in \Phi$. In die vorige afdeling het ons 'n vaste $0 < \phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim$ beskou. Ons werk nou met die hele versameling $\Phi = \{\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\sim : |\phi|(e) = 1\}$ waar e die swak orde eenheid van $\mathfrak{E}$ is.

Die familie meetbare versamelings waarmee ons werk is die Borel-versamelings $\mathcal{B}(J)$. Meetbare trapfunksies $X : J \rightarrow \mathcal{L}^2$ word nou op die gewone manier gedefinieer (sien definisie 3.2.2 op p.76).

Definisie 8.2.3. ($\mathcal{B}(J)$ -Trapfunksie)

'n Funksie $X : J \rightarrow \mathcal{L}^2$ word 'n $\mathcal{B}(J)$ -trapfunksie genoem as X die vorm

$$X(t) = \sum_{i=1}^r x_i \mathcal{I}_{E_i}(t)$$

het, waar $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathcal{L}^2$ en $(E_i) \in D^{\mathcal{B}(J)}$.

Aangesien die versamelings E_i in die definisie van 'n $\mathcal{B}(J)$ -trapfunksie disjunk is, volg op die gewone manier dat

$$q_\phi(X(t)) = \sum_{i=1}^r q_\phi(x_i)\mathcal{I}_{E_i}(t) \quad \text{en} \quad |X(t)| = \sum_{i=1}^r |x_i|\mathcal{I}_{E_i}(t).$$

Die funksie $q_\phi(X(t))$ is dus 'n skalaarwaardige $\mathcal{B}(J)$ -trapfunksie vir elke $\phi \in \Phi$.

Ons gebruik definisie 6.2.1 op p.127 om die integraal van 'n $\mathcal{B}(J)$ -trapfunksie te definieer. As $X = \sum_{i=1}^r x_i\mathcal{I}_{E_i}$ 'n $\mathcal{B}(J)$ -trapfunksie is, dan definieer ons die integraal van X deur

$$\int_E X d\nu_A = \sum_{i=1}^r x_i\nu_A(E \cap E_i)$$

waar die produk $x_i\nu_A(E \cap E_i)$ in die f -algebra $\mathfrak{E}^u$ geneem word. Meer nog x_i en $\nu_A(E \cap E_i)$ is vir elke i elemente van $\mathcal{L}^2$. Dus is $x_i\nu_A(E \cap E_i) \in \mathcal{L}^1$ vir elke i en $p_\phi(x_i\nu_A(E \cap E_i)) \leq q_\phi(x_i)q_\phi(\nu_A(E \cap E_i))$ vir alle $\phi \in \Phi$.

Soos ons reeds in vorige hoofstukke gesien het, word 'n vektorintegraal vir meetbare funksies gedefinieer wat aan sekere voorwaardes voldoen. Meetbare funksies is die limiete van ry meetbare trapfunksies. Ons het reeds trapfunksies gedefinieer. Ons kyk dus nog na die konvergensie van 'n ry funksies.

Definisie 8.2.4. (ϕ -nulversameling, ν_A -nulversameling)

'n Versameling $N_\phi \subseteq J$ word 'n ϕ -nulversameling genoem as daar vir elke $\epsilon > 0$ 'n meetbare versameling $M_\epsilon \in \mathcal{B}(J)$ bestaan sodanig dat $N \subseteq M_\epsilon$ en $\|\nu_A\|^\phi(M_\epsilon) < \epsilon$. Ons noem $N \subseteq J$ 'n ν_A -nulversameling as N vir elke $\phi \in \Phi$ 'n ϕ -nulversameling is.

Vir elke $\phi \in \Phi$ is die semivariasies $\widehat{\nu}_A^\phi$ en $\|\nu_A\|^\phi$ submate. Ons wil na konvergensie van ry in die topologie $\sigma(\mathcal{Q})$ op $\mathcal{L}^2$ kyk. Beskou dus die versameling $\Phi = \{\phi \in \mathfrak{E}_{00}^\infty : |\phi|(e) = 1\}$. Die volgende definisie word na analogie van die definisies in afdeling 3.1 gemaak. Beskou 'n ry van funksies $X_n : J \rightarrow \mathcal{L}^2$. Ons sê (X_n) konvergeer ν_A -byna oral na X as daar 'n ν_A -nulversameling bestaan sodanig dat $q_\phi(X_n(t) - X(t)) \rightarrow 0$ vir alle $t \in J \setminus N$ vir alle $\phi \in \Phi$.

Vir elke $\phi \in \Phi$ weet ons $C_2^\phi = (C_\phi, q_\phi)$ en $C_1^\phi = (C_\phi, p_\phi)$ is Banach ruimtes (waar C_ϕ die draerband van ϕ is). Die volgende definisies word na aanleiding van definisie 6.3.3 op p.135 en stelling 6.3.2 op p.133 gemaak.

Definisie 8.2.5. (ν_A -Trapfunksie)

'n $\mathcal{B}(J)$ -trapfunksie $X = \sum_{i=1}^r x_i\mathcal{I}_{E_i}$ word 'n ν_A -trapfunksie genoem as dit vir elke $\phi \in \Phi$ geld dat $\widehat{\nu}_A^\phi(E_i) < \infty$ vir elke E_i waarvoor $x_i \neq 0$.

Definisie 8.2.6. (ν_A -Meetbaar)

'n Funksie $X : J \rightarrow \mathcal{L}^2$ word ν_A meetbaar genoem as daar 'n ry ν_A -trapfunksies (X_n) bestaan wat ν_A -byna oral na X konvergeer.

As X_n 'n ν_A -trapfunksie is, dan noem ons die vektormaat

$$\nu_n^A(E) := \int_E X_n d\nu_A$$

die vektormaat deur X_n voortgebring.

Definisie 8.2.7. (ν_A -Integreerbaar)

As 'n funksie $X : J \rightarrow \mathcal{L}^2$ 'n ν_A -meetbare funksie is en as (X_n) 'n ry ν_A -trapfunksies is wat ν_A -byna oral na X konvergeer, dan word X ν_A -integreerbaar genoem as die ry $(\nu_n(E))$ 'n Cauchyry in $\mathcal{L}^1$ is, waar (ν_n^A) die vektormate is wat deur (X_n) voortgebring is.

Lemma 8.2.8. (Bestaan van die integraal)

As $X : J \rightarrow \mathcal{L}^2$ 'n ν_A -integreerbare funksie is en (X_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van f is, dan bestaan die limiet van die ry $(\nu_n(E))$ in $\mathcal{L}^1$ en die limiet is onafhanklik van die ry trapfunksies (X_n) .

Bewys. Neem aan X is ν_A -integreerbaar en laat (X_n) 'n ry definiërende trapfunksies vir die integraal van X wees. Sê

$$X_n = \sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}.$$

Beskou 'n willekeurige $\phi \in \Phi$ en 'n vaste $E \in \mathcal{B}(J)$. In die besonder geld dan dat $\widehat{\nu}_A^\phi(E_i) < \infty$ vir elke versameling $E_i^{(n)}$ waarvoor $x_i^{(n)} \neq 0$. Verder bestaan daar 'n ν_A -nulversameling N sodanig dat $X_n(t) \rightarrow X(t)$ in $\mathcal{L}^2$ vir alle $t \in J \setminus N$. Maar dan geld ook dat $q_\phi(X_n(t) - X(t)) \rightarrow 0$ vir alle $t \in J \setminus N$.

Per aanname geld dat $(\nu_n^A(E))$ 'n Cauchyry in $\mathcal{L}^1$ is. Aangesien $\mathcal{L}^1$ 'n topologies volledige ruimte is (stelling 8.1.13), bestaan daar 'n unieke limiet $I_{(X_n)}(E)$ vir die ry $(\nu_n^A(E))$. Ons wys dat hierdie limiet inderdaad onafhanklik van die ry definiërende trapfunksies (X_n) is.

Laat $P_\phi : \mathfrak{E}_s \rightarrow C_\phi$ die projeksie op die draerband van ϕ wees. Dan is

$$P_\phi(X_n) = \sum_{i=1}^{r(n)} P_\phi(x_i^{(n)}) \mathcal{I}_{E_i^{(n)}}$$

en

$$\begin{aligned} P_\phi \left(\int_E X_n d\nu_A \right) &= P_\phi \left(\sum_{i=1}^{r(n)} x_i^{(n)} \nu_A(E_i^{(n)}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r(n)} P_\phi(x_i^{(n)}) P_\phi(\nu_A(E_i^{(n)})) = \int_E P_\phi(X_n) dP_\phi(\nu_A). \end{aligned}$$

Beskou die vektormaat $P_\phi \nu_A : \mathcal{B}(J) \rightarrow C_2^\phi$. Aangesien ons net op die draer C_ϕ werk, is

$$\begin{aligned} \widehat{P_\phi(\nu_A)}^\phi(E) &= \sup p_\phi \left(P_\phi \left(\sum_{i=1}^r P_\phi(x_i) \nu_A(E \cap E_i) \right) \right) \\ &= \sup p_\phi \left(P_\phi \left(\sum_{i=1}^r x_i \nu_A(E \cap E_i) \right) \right) = \widehat{\nu}_A^\phi(E) \end{aligned}$$

vir enige $E \in \mathcal{B}(J)$.

Tweedens geld dat $q_\phi(P_\phi(X_n(t)) - P_\phi(X(t))) = q_\phi(P_\phi(X_n(t)) - P_\phi(X(t))) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ vir alle $t \in J \setminus N$ en $\widehat{\nu}_A^\phi(N) = 0$. Verder is $\widehat{\nu}_A^\phi(E_i) < \infty$ vir elke

versameling $E_i^{(n)}$ waarvoor $x_i^{(n)} \neq 0$. Met ander woorde die ry $\widehat{\nu}_A^\phi$ -trapfunksies $(P_\phi(X_n))$ konvergeer $\widehat{\nu}_A^\phi$ -byna oral na $P_\phi(X)$.

Laastens weet ons dat $(\nu_n^A(E))$ in die topologie $\sigma(\mathcal{P})$ na $I_{(X_n)}(E)$ konvergeer. In die besonder konvergeer $(P_\phi(\nu_n^A(E)))$ in die norm p_ϕ van C_1^ϕ na $P_\phi I_X(E)$.

Dit impliseer dat $(P_\phi(X_n))$ aan die voorwaardes van stelling 6.3.2 op p.133 voldoen. Die funksie $P_\phi(X) : J \rightarrow C_2^\phi$ is dus Dobrakov integreerbaar met betrekking tot $P_\phi(\nu_A)$ en $(P_\phi(X_n))$ is 'n ry definiërende trapfunksies vir die Dobrakov integraal van $P_\phi(X)$. Vanuit stelling 6.3.2 kan ons dus aflei dat die limiet

$$P_\phi(I_{(X_n)})(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E P_\phi(X_n) dP_\phi(\nu_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\phi \left(\int_E X_n d\nu_A \right)$$

onafhanklik van die ry trapfunksies $P_\phi(X_n)$ is. Dus, as (Y_n) nog 'n ry is wat aan die voorwaarde van die huidige stelling voldoen, dan is $(P_\phi(Y_n))$ weer 'n ry definiërende trapfunksies vir die Bartle integraal van $P_\phi(X)$ en dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E P_\phi(X_n) dP_\phi(\nu_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E P_\phi(Y_n) dP_\phi(\nu_A)$$

waar konvergensie in die norm p_ϕ op C_ϕ plaasvind. Dit beteken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\phi \left(\int_E X_n d\nu_A \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\phi \left(\int_E Y_n d\nu_A \right).$$

Die voorafgaande afleidings geld vir enige $\phi \in \Phi$. Dus is die limiet

$$I_X(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E X_n d\nu_A$$

onafhanklik van die ry trapfunksies (X_n) waar konvergensie in die topologie $\sigma(\mathcal{P})$ plaasvind. Vir elke $E \in \mathcal{B}(J)$ is $I_X(E)$ dus uniek gedefinieer. $\square$

Ons definieer nou die integraal van X oor $E \in \mathcal{B}(J)$ as die limiet

$$\int_E X d\nu_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E X_n d\nu_A$$

waar die konvergensie in die topologie $\sigma(\mathcal{P})$ plaasvind. Op hierdie wyse is dus 'n integraal gevind wat gebruik kan word om die Itô integraal te definieer.

Bibliografie

- [1] C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces*, Academic Press, New York-San-Francisco-London, 1978.
- [2] R.B. Ash, C.A. Doléans-Dade, *Probability & Measure Theory*, Harcourt Academic Press, San Diego, 2000.
- [3] R.G. Bartle, A general bilinear vector integral, *Studia Math.* **15** (1956), 337-352.
- [4] R.G. Bartle, N. Dunford, J. Schwartz, Weak compactness and vector measures, *Canadian J. Math.* **7** (1955), 289-305.
- [5] G. Bessaga, A. Pełczyński, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.* **XVII** (1958), 151-164.
- [6] G. Birkhoff, Integration of functions with values in a Banach space, *Trans. Amer. Soc.* **38** (1935), 357-378.
- [7] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, New York, 2007.
- [8] J. Diestel, J.J. Uhl, *Vector Measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.
- [9] I. Dobrakov, On integration in Banach Spaces I, *Czech. Math. J.* **20** (1970), 511-536.
- [10] I. Dobrakov, On representation of linear operators on $C_0(T, X)$, *Czech. Math J.* **21**(1) (1971), 13-30.
- [11] N. Dunford, Integration of abstract functions, (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936), 178.
- [12] N. Dunford, Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Soc.* **44** (1938), 305-356.
- [13] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators, Part I*, Interscience, New York, 1958.
- [14] G. Fichtenholz, L. Kantorovitch, Sur les opérations dans l'espace des fonctions bornées, *Studia Math.* **5** (1934), 69-98.
- [15] I. Gelfand, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Mat. Sbornik* **4**(46) (1938), 235-284.

- [16] M. Gowurin, Über die Stieltjesche Integration abstrakter Funktionen, *Fundamenta Math.* **27** (1936), 254-268.
- [17] L.M. Graves, Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis, *Trans. Amer. Soc.* **29** (1927), 163-177.
- [18] J.J. Grobler, Continuous stochastic processes in Riesz spaces: the Doob-Meyer decomposition, *Positivity* **14** (2010), 731-751.
- [19] J.J. Grobler, Jensen's and martingale inequalities in Riesz spaces, *Indagationes Mathematicae* **25** (2014), 275-295.
- [20] J.J. Grobler, C.C.A. Labuschagne, The Itô integral for Brownian motion in vector lattices: Part 1, *J. Math. Anal. Appl.* **423** (2015), 797-819.
- [21] J.J. Grobler, C.C.A. Labuschagne, The Itô integral for Brownian motion in vector lattices: Part 2, *J. Math. Anal. Appl.* **423** (2015), 820-833.
- [22] J.J. Grobler, C.C.A. Labuschagne, The Itô integral for martingales in vector lattices, Preprint 2015.
- [23] P.R. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand, New York, 1950.
- [24] T.H. Hildebrandt, Bounded linear functional operations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), 868-875.
- [25] Integration in Banach spaces. Beskikbaar by <<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/NMMA574/lib/IntegrInBanachSpaces.pdf>>. [2 Desember 2015].
- [26] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York-Santa Barbara-London-Sydney-Toronto, 1989.
- [27] H.-H. Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2006.
- [28] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I, sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [29] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North Holland, Amsterdam-New York, 1971.
- [30] T.V. Panchapagesan, On the distinguishing features of the Dobrakov integral, *Divulgaciones Matemáticas* **3**(1) (1995), 79-114.
- [31] B.J. Pettis, On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Soc.* **44** (1938), 277-304.
- [32] R.S. Phillips, Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Soc.* **47** (1940), 114-145.
- [33] G.B. Price, The theory of integration, *Trans. Amer. Soc.* **47** (1940), 1-50.

- [34] C.E. Rickart, Integration in a convex linear topological space, *Trans. Amer. Soc.* **52** (1942), 498-521.
- [35] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [36] A. Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.
- [37] A.C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North Holland, Amsterdam-New York, 1983.

Indeks

- $(\mathbb{F}_t, \mathfrak{F}_t)_{t \in J}$, 161
- *-eienskap, 119
- C_1^ϕ , 165
- C_2^ϕ , 165
- $C_{\phi^\ast}$, 165
- D^Σ , 6
- $D^\mathcal{F}$, 6
- $L(X, Y)$, 20
- $L^p(\mu)$, 93
- P_ϕ , 166
- $\mathcal{M}_\nu(\Sigma, X)$, 105
- $\mathcal{S}_\nu(\mathcal{F}, X)$, 105
- Φ , 165
- Ψ -konvergent, 51
- Σ -meetbare funksie, 77
- Σ -trapfunksie, 76
- $\|f\|_E$, 76
- $\mathcal{F}^\uparrow(\mathbb{R}^+)$, 163
- $\overline{\mathcal{B}}_{X^\ast}$, 9
- ℓ_∞ , 41
- $\mathbb{F}$, 161
- $\mathcal{L}^1$, 161
- $\mathcal{L}^2$, 162
- $\mathcal{B}(X)$, 76
- $\mathcal{F}$ -trapfunksie, 16
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, 163
- $\mathcal{I}_B$, 107
- $\mathcal{I}_D$, 136
- $\mathcal{M}(\Sigma, X)$, 77
- $\mathcal{M}_\rho^1(\Sigma, X)$, 77
- $\mathcal{M}_\rho^2(\Sigma, X)$, 77
- $\mathcal{M}_\rho^3(\Sigma, X)$, 77
- $\mathcal{M}_\infty(\Sigma, \mathbb{K})$, 18
- $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, 18
- $\mathcal{M}_\mu(\Sigma, X)$, 88
- $\mathcal{M}_\xi(\Sigma, X)$, 124
- $\mathcal{P}$, 161
- $\mathcal{P}(\Omega)$, 67
- $\mathcal{Q}$, 162
- $\mathcal{S}(\mathcal{F}, \mathbb{K})$, 16
- $\mathcal{S}_\mu(\Sigma, X)$, 88
- $\mathcal{S}_\rho(\Sigma, X)$, 77
- $\mathcal{S}_\xi(\Sigma, X)$, 122
- $\mathfrak{E}$, 160
- μ -absoluut kontinu, 27
- μ -trapfunksie, 88
- $\nu_A^\ast$, 163
- ν -integreerbaar, 107
- ν -integreerbare funksie, 107
- ν -nulversameling, 125
- ν_A , 163
- $\overline{\mathbb{R}}$, 20
- $\overline{\text{co}}(Z)$, 101
- ϕ -semivariasie, 166
- ϕ -skalaarsemivariasie, 166
- ρ -trapfunksie, 77
- $\mathfrak{E}^u$, 160
- $\mathfrak{E}_{00}^\sim$, 160
- $\mathfrak{E}_e$, 160
- $\mathfrak{E}_s$, 160
- σ -additief, 3, 4
- σ -additief
 - gelykmatig, 22
- σ -algebra, 3
- σ -eindig, 79, 88
- σ -eindige operatoromaatruimte, 123
- σ -subadditief, 7
- σ -supadditief, 7
- $\sigma(\mathcal{P})$, 123
- $\mathcal{S}(\Sigma, X)$, 76
- $\widehat{\nu}$, 67, 104
- $\widehat{\xi}$, 62
- ξ -meetbare funksie, 124
- ξ -nulversameling, 133
- ξ -trapfunksie, 122
- c_0 , 41
- f -algebra, 160
- p_ϕ , 161

- q_ϕ , 162
- absoluut integreerbaarheid, 147
- absoluut kontinu, 27
- additief, 4
- aftelbaar additief, 3
- algebra, 3
- Bartle
 - integreerbaar, 107
- Bartle *-eienskap, 119
- Bartle integraal, 109
- Bartle-Dunford-Schwartz lemma, 33
- begrensde konvergenSIestelling, 116
- Bessaga-Pelczyński stelling, 50, 51
- bilineêre afbeelding, 67, 104
- Bochner
 - integraal, 93
 - integraal eienskappe, 95
 - integreerbaar, 93
- Borel meetbare funksie, 76
- Borel-Cantelli lemma, 71
- Borel-meetbaar, 16
- Cauchy-Schwartz ongelykheid, 162
- deelruimte
 - normerende, 80
- definiërende ry funksies, 94, 107, 136
- Diestel-Faires stelling, 44
- Dobrakov
 - integraal, 135
 - integreerbaar, 135
- Doob-Meyer ontbinding, 159
- draer, 16, 76
- Egoroff se stelling, 73
- Egoroff-Lusin Stelling, 125
- ekwikontinu, 55
- ekwikontinu
 - met betrekking tot $\widehat{\nu}$, 107
- esensiële supremum, 111
- essensieel begrens, 111
- filtrasie, 161
- fundamentele stelling van calculus, 102
- gedomineerde konvergenSIestelling, 95, 115
- gelykmatig
 - sterk additief - ekwivalente stellings, 23
- gelykmatig
 - σ -additief, 22
 - $\widehat{\nu}$ -absoluut kontinu, 107
 - absoluut kontinu, 27
 - begrens, 30
 - begrensde versameling operatore, 35
 - kontinu, 33
 - konvergeer, 70
 - sterk additief, 22
- gelykmatige operator topologie, 56
- geslote konvekse omhullende, 101
- GOT, 56
- Hille se stelling, 99
- indikatorfunksie, 3
- integraal
 - (Dobrakov) van 'n Σ -trapfunksie, 127
 - van 'n Σ -trapfunksie - eienskappe, 127
 - van skalaar trapfunksie, 17
- integraal
 - abstrakte Lebesgue, 147
 - Bartle, 109
 - Bartle- eienskappe van, 109
 - Bochner, 93
 - Bochner integraal - eienskappe, 95
 - Dobrakov, 135
 - Dobrakov - eienskappe, 136
 - Itô, 159
 - van 'n μ -trapfunksie, 92
 - van 'n μ -trapfunksie-eienskappe, 92
 - van 'n ν -trapfunksie, 106
 - van 'n ν -trapfunksie - eienskappe, 106
 - van 'n skalaar meetbare funksie, 19
- integreerbaar
 - μ -integreerbaar, 94
 - ν_A , 168
 - ξ -integreerbaar, 135
 - Bochner-, 93
 - proses, 163
 - trapfunksie, 77
 - versameling, 123
- Itô integraal, 159
- Itô se formule, 159
- kanoniese vorm, 16
- kontinu, 33, 70
- konvergeer

- ν -byna oral, 125
- ρ -byna gelykmatig, 71
- ρ -byna oral, 70
- ξ -byna oral, 133
- gelykmatig, 70
- in ρ -maat, 71
- oral, 70
- puntsgewys, 70
- konvergensie
 - in ν -maat, 105
- lateraal volledig, 160
- M-afkapping, 111
- magsversameling, 67
- martingaal, 161
- meetbaar
 - versameling, 3
- meetbaar
 - Ψ -meetbaar, 84
 - Σ -meetbaar, 77
 - μ -meetbaar, 88
 - ν -meetbaar, 105
 - ν_A -meetbaar, 167
 - ν_A -meetbare versameling, 163
 - ρ -meetbaar, 77
 - ξ -meetbaar, 124
 - (I) ρ -meetbaar, 77
 - (II) ρ -meetbaar, 77
 - (III) ρ -meetbaar, 77
 - ρ -byna oral Σ -, 83
 - Borel-, 16, 76
 - skalaarfunksie, 18
 - skalaartrapfunksie, 16
 - sterk, 88
 - swak ρ -meetbaar, 84
 - swak*-meetbaar, 84
- meetbare funksie, 77
- meetbare trafunksie, 76
- middelwaardestelling, 102
- monotoon, 7
- Nikodým begrensddheid stelling, 35
- normerend, 80
- nulversameling, 70, 167
- onvoorwaardelike konvergensie, 147
- operatormaat, 56
- operatormaat
 - σ -eindige, 123
- operatornorm, 56
- Orlicz-Pettis stelling, 48
- perfekte Riesz ruimte, 160
- Pettis meetbaarheidstelling
 - vir 'n σ -eindige maat, 89
- Pettis meetbaarheidstelling
 - vir 'n eindige maat, 89
 - vir 'n submaat, 84
- representasie, 16
- ring
 - δ -ring, 123
 - σ -ring, 123
 - van versamelings, 123
- Rosenthal se lemma, 41
- semivariasie
 - ϕ -semivariasie, 166
 - eienskappe van, 14
 - van 'n operatormaat, 62
 - van 'n skaarmaat, 11
 - van 'n vektormaat, 11, 67, 104
- separabelwaardig, 81
 - byna, 84
- skalaarsemivariasie
 - van skaarmaat, 60
 - van vektormaat, 60
- skalaarsemivariasie
 - ϕ -skalaarsemivariasie, 166
 - eienskappe van, 61
 - van 'n operatormaat, 60
- SOT, 56
- sterk additief, 22
 - gelykmatig - ekwivalente stellings, 23
- sterk additief
 - ekwivalente stellings, 26
 - gelykmatig, 22
- sterk begrens, 26
- sterk operator topologie, 56
- stogastiese
 - veranderlike, 159
- stogastiese proses, 161
- subadditief, 69
- submaat, 69
- submaat
 - σ -eindig, 79
 - eienskappe van 'n kontinue, 70
 - kontinue, 70
 - nulversameling, 70

- submartingaal, 161
- sup-vervollediging, 160
- supermartingaal, 161
- supremum norm, 17, 76
- swak operator topologie, 56
- WOT, 56
- totale
 - versameling, 38
- totale variasie, 6
- trapfunksie
 - Σ -trapfunksie, 76
 - $\mathbb{B}(J)$ -trapfunksie, 166
 - μ -integreerbare, 88
 - ν -integreerbare, 105
 - ν -trapfunksie, 105
 - ν_A -trapfunksie, 167
 - ξ -integreerbare, 122
 - ρ -integreerbare, 77
 - skalaar meetbare, 16
- trapfunksie Σ_1 -trapfunksie, 123
- uitwendige vektormaat, 163
- universeel volledig, 160
- universele vervollediging, 160
- variasie
 - eienskappe van, 7
 - van 'n operatormaat, 58
 - van 'n vektormaat, 6
- vektor integraal
 - elementêre, 16, 19
- vektormaat, 3
 - begrensde, 15
- vektormaat
 - σ -additiewe, 4
 - eienskappe van, 4
 - sterk additiewe, 22
 - van begrensde semivariasie, 13
 - van begrensde variasie, 6
 - van onbegrensde semivariasie, 13
 - van onbegrensde variasie, 6
- vektormate
 - deur 'n ry trapfunksies voortgebring, 107, 133
- versamelingsfunksie, 3
- versoenbare stygende proses, 162
- Vitali konvergenSIestelling, 113
- Vitali-Hahn-Saks-Nikodým stelling, 52
- volledig, 79
- voorwaardelike verwagting, 161