

# Die wiskundige bevoegdheid en prestasie van Eerstejaar-ingenieurstudente

**LN Labuschagne**  
12002615

Magistergraad voorgelê vir die  
**Magister Educationis in Wiskunde Onderwys**  
aan die Potchefstroomkampus van die Noordwes-Universiteit

Studieleier: Prof HD Nieuwoudt

Mede-Studieleier: Dr HM Havenga

Oktober 2013

## **DANKBETUIGING**

My opregte dank en waardering aan:

- My studieleier, prof Hercules Nieuwoudt, vir spesiale en bekwame leiding, aanmoediging en geduld. Dit was `n voorreg om onder hom te kon werk. Sy nugtere denke en wysheid was vir my `n groot inspirasie.
- My mede-studieleier, dr. Marietjie Havenga, vir hulp met die ontleding van die programmeringsvraestel, opbouende kritiek en waardevolle insette, harde werk en moeite met die nagaan van die verhandeling.
- Mev. Elza Hattingh, vir die beskikbaarstelling van die eerstejaar-ingenieurstudente se Gr 12 wiskunde-punte.
- Die Noordwes-Universiteit, vir finansiële ondersteuning.
- Dr. Mariette Hitge, vir haar bereidwilligheid om te help, haar tyd, moeite en insig met die ontleding van die Opknappingskursustoets en die Wiskundevraestel, asook die beskikbaarstelling van die betrokke vraestelle, antwoordstelle en punte van studente.
- Dr. Suria Ellis en mnr. Shawn Liebenberg van Statistiese Konsultasie Dienste, vir hulle professionele hulp met die ontleding en verwerking van die data.
- Dr. Marietjie Nelson, vir die taalversorging.
- Mev. Chrissie Reynecke, vir die nasien van die bibliografie.
- Mev. Susan van Biljon, vir haar hulp met die bladuitleg.
- Mnr. Justus Roscher van die Fakulteit Opvoedingswetenskappe, vir sy hulp met die ontleding van die Ingenieursgrafika-vraestel.
- Mnr. Pietman Jordaan van die Fakulteit Ingenieurswese, vir die beskikbaarstelling van die Ingenieursgrafikavraestel, punte van studente en sy hulp met die ontleding van die vraestel.

- Mnr Henry Foulds van die Fakulteit Natuurwetenskappe, vir die beskikbaarstelling van die Programmeringsvraestel, punte van studente, asook sy hulp met die ontleding van die vraestel.
- My sussie Sarita, vir haar deurlopende ondersteuning.
- My wonderlike ouers, vir hulle onvoorwaardelike hulp op verskeie gebiede, hulle aanmoediging, gebede en dat hulle in my geglo het. Hulle versorging en bereidwilligheid om uit te help met die kleinkinders word opreg waardeer.
- My drie kindertjies, vir hul geduld en insiklikheid met `n mamma wat hulle so dikwels met `n berg boeke en die rekenaar moes deel.
- My liefste man, vir die vertaling van die opsomming, vir sy wysheid en perspektiewe, sy aanmoediging en dat hy hare op sy tande het.....

Aan ons Almagtige God en Vader, my innige dank vir Sy onverdiende genade om hierdie taak te kon aanpak en voltooi.

Soli Deo Gloria

# **VERKLARING VAN TAALVERSORGING**

**Dr. ME Nelson,**

Michael Villa 4, Michaellaan 3 , Potchefstroom, 2531

Geakkrediteerde taalpraktisyn van SA Vertalersinstituut Lidno. 1000036

Accredited language practitioner of SA Translators' Institute Member no.1000036

Telefoon en Faks: 018 294 7248

Ek, Maria Elizabeth Nelson (neé Gauché) verklaar hiermee dat ek die taalversorging  
gedoen het van Me. Leonie Labuschagne se verhandeling met titel:

**Die wiskundige bevoegdheid en prestasie van Eerstejaar-ingenieurstudente**

**Dr. ME Nelson**

3707170065087

04-10-2013

## OPSOMMING

Ingenieurstudente beskik oor onvoldoende wiskundige bevoegdheidsvlakke wanneer hulle tot ingenieurstudie toetree. Studente ervaar probleme met die oorgang vanaf die sekondêre tot tersiêre vlak in terme van hul kognitiewe ontwikkeling, wat hul prestasie in ingenieurswese negatief beïnvloed. Die brug wat oorkom moet word tussen formele toepassing van wiskunde in bekende situasies en die toepassing van die wiskundige konsepte in die oplos van werklike en onbekende probleme (redenering), is belangrik vir 'n ingenieurstudent.

Wiskunde vorm die grondslag en essensiële gereedskap vir die ontwikkeling van kognitiewe vaardighede om ingenieursprosesse en -sisteme te analiseer en te beskryf. Dit is dus belangrik om die studente se wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vaardighede te bepaal met toetredes tot die universiteit sodat die leemtes geïdentifiseer en hanteer kan word. Uit hierdie navorsing is dit duidelik dat eerstejaaringenieurstudente tot op spesifieke wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke gevorderd moet wees om wiskunde met sukses te kan gebruik binne die konteks van eerstejaaringenieursmodules.

In hierdie navorsing is gepoog om die wiskundige bevoegdheidsvlakke van eerstejaaringenieurstudente en die invloed van die studente se wiskundige bevoegdheidsvlakke op hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis, te bepaal. Om die navorsingsvraag te beantwoord is eerstens vanuit die literatuur die vlakke van wiskundige bevoegdheid geïdentifiseer en operasioneel gespesifiseer.

Tweedens is verskillende ontwikkelingsteorieë en taksonomieë bestudeer om insig te kry oor die ontwikkelingsprosesse van leer, kognitiewe ontwikkeling en die gaping in die kognitiewe vaardighede van studente wat tot die universiteit toetree vanaf die skoolomgewing. Kognitiewe vaardighede wat nodig is om hulle eerstejaaringenieursmodules suksesvol te voltooi, is bepaal vanuit die bestudering van die verskillende ontwikkelingsteorieë en taksonomieë. Deur sintese van die verskillende teorieë en taksonomieë is 'n raamwerk geïdentifiseer, wat gebruik is om sekondêre data te ontleed in terme van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke.

Derdens is die teoretiese ondersoek gevolg deur 'n empiriese ondersoek in drie fases. 'n Gemengde kwantitatiewe-kwalitatiewe (QUAN-qual) benadering is gevolg.

Fase 1 behels die gebruik van die assesseringsraamwerk om die eerstejaaringenieurstudente se wiskundige bevoegdheid met aanvang van hulle studie te bepaal asook aan die einde van hulle eerste semester. Die wiskundige bevoegdheid by toetrede tot die studie is bepaal deur die Gr 12-wiskundepunt en deur die opknappingskursustoets per vraag te ontleed. Verder is die eerstesemestereksamenvraestelle ook per vraag ontleed. Fase 2 behels die bepaling van die verband tussen die eerstejaaringenieurstudente se wiskundige bevoegdheid by toetrede en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis het. Fase 3 sluit die riglyne in wat afgelei is uit die leemtes wat geïdentifiseer is met die oog op geskikte studie-ondersteuningsadvies aan eerstejaaringenieurstudente en die betrokke akademiese personeel en op geldige en betroubare keuringsitems vir ingenieurstudie.

Die ontleding van wiskundige bevoegdheid skep kwaliteit data wat 'n duideliker prentjie gee as die blote vergelyking van die onderskeie punte van die toetree-inligting en eerstesemestereksamenpunte. Die empiriese ondersoek het bygedra tot 'n begrip van die problematiese oorgang van 'n sekondêre na 'n tersiêre leeromgewing. Vanuit die ondersoek is afgelei dat die toetree-inligting van die studente slegs korreleer met hulle prestasie ten opsigte van die toepassingsvlak in wiskunde en programmering, maar nie 'n voorspellingswaarde is vir die prestasie op die laagste en hoogste wiskundige bevoegdheidsvlakke nie. Verdere studie word benodig om raamwerke te skep ten einde beide lae- en hoë wiskundige bevoegdheidsvlakke betroubaar te meet.

### **Sleutelwoorde vir indeksering:**

Oorgang tussen sekondêre en tersiêre onderrig, Eerstejaaringenieurstudente, Wiskundige bevoegdheid, Wiskunde in ingenieurswese, Assesseringsraamwerke vir kennis en redenering, Voorspelling van akademiese sukses.

## **ABSTRACT**

Basic mathematical competency seems to be lacking for engineering students starting their studies in this field. Students generally find the cognitive transition from secondary to tertiary mathematics challenging which in turn negatively influences their academic achievement in mathematics. The cognitive challenge is the transition from the application of mathematics to familiar questions to applying mathematical principles to varying practical application and problem solving.

Mathematics provides the foundation for the cognitive toolset required for the development of skills required for analysing engineering systems and processes. It is therefore important to assess mathematical and cognitive competency and ability at the time of admission to a tertiary institution in order to identify and address gaps. This research demonstrates that first-year engineering students need to have a specific level of mathematical competency and cognitive ability to use mathematics within the context of engineering studies.

This research attempts to connect the mathematic competency of first year engineering students to their academic results for subjects in the first year curriculum that rely heavily on mathematical competency. To satisfy the research question, the study firstly looks at relevant literature to identify the mathematical competency levels as well as the operational specification.

Secondly, development theories and taxonomies were analysed to gain insight into the development processes associated with learning, cognitive development and the gap between cognitive competencies in transition from secondary to tertiary education. Further, cognitive competencies were identified that are essential for successful completion of first year engineering modules. Through synthesis of the different theories and taxonomies a framework was identified. This framework was used to analyse secondary data in order to measure mathematical and cognitive levels.

Thirdly, the theoretical investigation was followed by a three-phase empirical study. A mixed quantitative-qualitative (QUAN-qual) approach was followed.

Phase 1 uses the assessment framework to measure first year students' mathematical competency at the inception of their studies as well as at the completion of their first semester. The mathematical competency at inception was measured with their Grade 12 mathematics marks and with relevant analysis of their initial bridging assessments, on a question by question basis. In addition, their first semester exams questions were analysed using the same approach as above. Phase 2 comprises the measurement of the relationship between the mathematical competency of first year engineering students at admission and their achievement levels in selected first year subjects that required mathematical competency. Phase 3 includes the guidelines derived from the gaps and shortcomings identified. These gaps were identified in order to inform appropriate study support to first year students and to assist academic personnel with setting appropriate and dependable admission standards.

The analysis of mathematical competency creates quality data that gives a clearer picture than a simple comparison of admission scores and first semester marks. The empirical study contributes to a better understanding of the problems associated with the transition from secondary to tertiary learning environments. From the study it was derived that study inception information of the students correlated only with their academic results on questions that tested mathematical and programming application. The inception information was not a predictor of mathematical achievement and results for both the lowest and highest mathematical competency levels. Further study in this field is required to create frameworks for the measurements of both low and high levels of mathematical competency.

**Key phrases for indexing:**

Transition from secondary to tertiary education, First-year engineering students, Mathematical competency, Mathematics in engineering studies, Assessment frameworks for cognition and reasoning, Prediction of academic success.

# **INHOUDSOPGAW**

<b><u>DANKBETUIGING</u></b> .....	<b>ii</b>
<b><u>VERKLARING VAN TAALVERSORGING</u></b> .....	<b>iv</b>
<b><u>OPSOMMING</u></b> .....	<b>v</b>
<b><u>ABSTRACT</u></b> .....	<b>vii</b>
<b><u>INHOUDSOPGAW</u></b> .....	<b>ix</b>
<b><u>HOOFSTUK 1</u></b> <b>PROBLEEMSTELLING EN MOTIVERING VIR STUDIE</b> .....	<b>1</b>
1.1 PROBLEEMSTELLING EN MOTIVERING .....	1
1.2 LITERATUUROORSIG .....	1
1.2.2 Wiskundige bevoegdheidsvlakke van studente .....	5
1.3 DIE NAVORSINGSPROBLEEM .....	6
1.4 DOELSTELLINGS.....	7
1.5 NAVORSINGSONTWERP EN -METODES .....	8
1.5.1 Navorsingsontwerp .....	8
1.5.2 Literatuurstudie .....	8
1.5.3 Metodologie .....	8
1.6 STRUKTUUR VAN DIE STUDIE .....	11
1.7 BYDRAE VAN STUDIE .....	12
<b><u>HOOFSTUK 2</u></b> <b>ASSESSERINGSRAAMWERKE VIR DIE METING VAN</b> <b>WISKUNDEPRESTASIE IN TERME VAN WISKUNDIGE</b> <b>BEVOEGDHEDE</b> .....	<b>13</b>
2.1 INLEIDING .....	13
2.2 WISKUNDIGE BEVOEGDHEID.....	14
2.2.1 Die ontwikkeling van wiskundige bevoegdheid .....	20

2.2.2	Meting van wiskundige bevoegdheid .....	21
2.3	RAAMWERKE OPGESTEL VIR INTERNASIONALE WISKUNDIGE STUDIES .....	26
2.3.1	Trends in International Mathematics Study (TIMMS) .....	26
2.3.2	Programme for International Student Assessment (PISA) .....	32
2.4	TEORETIESE PERSPEKTIEWE OP DIE ONTWIKKELING VAN STUDENTE SE VLAK VAN KOGNITIEWE ONTWIKKELING .....	39
2.4.1	Anderson se ACT-model .....	40
2.4.2	Van Hiele-Teorie .....	41
2.4.3	Bloom se Taksonomie.....	48
2.4.4	Die SOLO-taksonomie.....	52
2.4.5	Die APOS-teorie .....	57
2.5	TALL SE DRIE WÊRELDE VAN WISKUNDE .....	61
2.5.1	Die Ontwikkeling van die Drie Wêrelde van Wiskunde .....	61
2.5.2	Tall se teorie in verband met ander teorieë .....	68
2.6	SINTESE.....	71
<b><u>HOOFTUK 3</u> NAVORSINGSONTWERP EN METODOLOGIE .....</b>		<b>77</b>
3.1	INLEIDING .....	77
3.2	FILOSOFIESE BENADERING .....	78
3.3	NAVORSINGSMETODOLOGIE.....	78
3.3.1	Etiese aspekte.....	79
3.3.2	Populasie en Steekproefneming .....	80
3.3.3	Navorsingsontwerp .....	81
3.3.4	Data-insameling .....	82
3.3.5	Die ontledings van die onderskeie vraestelle.....	87

3.3.5.1	Wiskunde-Opknappingskursustoets vir eerstejaarstudente vir 2011 (Datastel 2).....	87
3.4	SAMEVATTING .....	103
<b><u>HOOFSTUK 4</u> DATA-ONTLEDING EN INTERPRETASIE .....</b>		<b>105</b>
4.1	INLEIDING .....	105
4.2	AFLEIDINGS WAT GEMAAK IS UIT DIE BETROUBAARHEIDSTOETSE .....	107
4.3	BEVOEGDHEID VAN DIE EERSTEJAAR-INGENIEURSTUDENTE .....	112
4.4	KORRELASIES MET DIE GR 12-WISKUNDEPUNT EN DIE OPKNAPPINGSKURSUSTOETSPUNT.....	116
4.4.1	Korrelasie tussen die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoetspunt .....	117
4.4.2	Korrelasie tussen die wiskundige bevoegdheid by toetredende en prestasie in eerstejaarsingenieursvakke.....	118
4.5	GEVOLGTREKKING .....	122
<b><u>HOOFSTUK 5</u> SAMEVATTING, GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS .....</b>		<b>125</b>
5.1	SAMEVATTING .....	125
5.2	GEVOLGTREKKING .....	130
5.3	AANBEVELINGS .....	131
5.3.1	Studie-ondersteuningsadvies om 'n suksesvolle oorgang van sekondêre tot tersiêre onderrig te ondersteun.....	132
5.3.2	Formulering van 'n geldige en betroubare opknappingskursustoets en keuringsitems.....	133

5.4	SLOTWOORD .....	134
	<b><u>BRONNELYS</u></b> .....	<b>136</b>
	<b><u>ADDENDUM A</u></b> Wiskunde Opknappingskursustoets vir eerstejaarstudente vir 2011 met ontleding .....	<b>149</b>
	<b><u>ADDENDUM B</u></b> Wiskunde 1 (WISN111) Junie eksamen vraestel 2011 met ontleding.....	<b>163</b>
	<b><u>ADDENDUM C</u></b> Toestemmingsbrief van Kampusregistrateur .....	<b>176</b>

## LYS VAN TABELLE

Tabel 2.1:	Die agt wiskundige bevoegdhede soos gedefinieer deur Niss (2011) .....	16
Tabel 2.2:	Wiskundige bevoegdheidsvlakke (Mullis & Martin, 2006).....	29
Tabel 2.3:	TIMSS se drie kognitiewe vlakke soos uiteengesit deur Mullis et al., 2007.....	31
Tabel 2.4:	PISA se ses wiskundige geletterdheidsbevoegdheidsvlakke (Fleischman et al., 2010).....	34
Tabel 2.5:	Sintese van TIMSS en PISA (Schagen & Hutchison, 2007) .....	37
Tabel 2.6:	Van Hiele se drie vlakke van meetkundige denkontwikkeling.....	45
Tabel 2.7:	Kognitiewe vlakke in die hersiene taksonomie van Bloom soos uiteengesit deur Felder en Brent (2004).....	49
Tabel 2.8:	Kognitiewe vlakke van Bloom se hersiene taksonomie vs. Kognitiewe vlakke van TIMSS 2005.....	51
Tabel 2.9:	Globale vlakke van kognitiewe ontwikkeling soos uiteengesit deur Pegg en Tall, (2005, p.471).....	69
Tabel 2.10:	Die vergelykende fundamentele siklusse van konseptuele konstruksie van aksie tot objek opgestel deur Pegg en Tall (2005, p. 472).....	70
Tabel 2.11:	Sintese van die verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë.....	72
Tabel 3.1:	Die navorsingsontwerp.....	81
Tabel 3.2 :	TIMSS-assesseringsraamwerk vir Kognitiewe vlakke (Sien paragraaf 2.3).....	84
Tabel 3.3 :	Opsomming van die Opknappingskursustoets se ontleding.....	90
Tabel 3.4 :	Opsomming van die WISN 111-vraestel se ontleding.....	92
Tabel 3.5 :	Opsomming van die ITRW 115-vraestel se ontleding.....	96
Tabel 3.6 :	Opsomming van die INGM 111-vraestel se ontleding .....	103

Tabel 4.1 :	Die vrae met 'n interne-item korrelasie buite die grense van 0.15 en 0.55 .....	108
Tabel 4.2:	Die betroubaarheid van die wiskundige bevoegdheidsvlakke in die onderskeie vraestelle (Cronbach $\alpha$ ).....	109
Tabel 4.3:	Die betroubaarheid van die kognitiewe vlakke in die onderskeie vraestelle .....	110
Tabel 4.4:	Gemiddelde en standaardafwyking van die Gr12-wiskundepunt, Opknappingskursustoetspunt, Wiskunde, Programmering en Ingenieursgrafika .....	114
Tabel 4.5:	Korrelasies tussen die Gr12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoetspunt en bevoegdheidsvlakke.....	118
Tabel 4.6:	Korrelasies met die Gr12-wiskundepunt en Opknappingskursustoets met die onderskeie Junie-eksamenvraestelle .....	119

## LYS VAN FIGURE

Figuur 2.1:	Ingenieursopdrag met twee ratte as die onderwerp (Seitzer, 2011) .....	19
Figuur 2.2:	Reghoekige karton met afmetings b en 2b.....	22
Figuur 2.3:	Die grafiese voorstelling van die funksie $V(x)$ .....	24
Figuur 2.4:	Sirkelfiguur om die toepassings van die Van Hiele-model te illustreer.....	47
Figuur 2.5:	Die hersiene en oorspronklike taksonomie van Bloom.....	49
Figuur 2.6:	Visualisering van die SOLO-vlakke 1 tot 5 (Biggs, 2003) .....	54
Figuur 2.7:	Voorbeeld van 'n Getalpatronevraag deur die SOLO-taksonomie te gebruik.....	57
Figuur 2.8:	Verskillende tipe prosepte wat in wiskunde voorkom word soos volg voorgestel deur Tall (2008).....	64
Figuur 2.9:	Menslike ontwikkeling vanaf die beliggaamde wêreld tot by die formele wêreld (Tall, 2004). .....	66
Figuur 3.1:	Venn-diagram: Steekproefneming .....	81
Figuur 3.2:	Die gegewe lokeerhouermodel in vraag 1 van die INGM111 vraestel .....	97
Figuur 5.1:	Opsomming van die voorspellingswaarde van die Toetree-inligting van die eerstejaaringenieurstudente. ....	129

# **HOOFSTUK 1**

## **PROBLEEMSTELLING EN MOTIVERING VIR STUDIE**

### **1.1 PROBLEEMSTELLING EN MOTIVERING**

Wiskundige bevoegdheid vorm 'n noodsaaklike basis vir suksesvolle universiteitstudie in ingenieurswese. Studente beskik egter dikwels by toetrede tot dié studie nie oor voldoende wiskundige bevoegdhede nie, gevolglik ondervind hulle probleme om die vereiste wiskundige vaardighede toe te pas wat hul prestasie in ingenieurswese negatief beïnvloed (Lawson, 2003). Volgens Artique, Batanero en Kent (2007) is die proses om 'n spesifieke probleem in 'n wiskundige model te ontwikkel, te analiseer en in konteks te plaas, in die algemeen 'n baie komplekse taak (p. 1015). Dit hou verband met die aanleer van vaardighede oor hoe om wiskunde te gebruik, wat die fokus is van wiskunde-onderrig in ingenieurswese. Voorgaande vereis egter grondige kennis, begrip en toepassingsvaardighede wat nodig is om 'n student wiskundig bevoeg te maak vir toetrede tot ingenieurstudie op universiteitsvlak. Die studie fokus primêr op die identifisering van noodsaaklike wiskundige bevoegdhede van 'n voornemende ingenieurstudent in terme van vlakke van kognitiewe bevoegdheid. Die bepaling van sodanige wiskundige bevoegdhede van studente het ten doel om 'n konstruktiewe bydrae te maak tot die identifisering en ontwikkeling van toepaslike wiskundige vaardighede van voornemende en eerstejaaringenieurstudente om suksesvol wiskunde te kan gebruik in ingenieursmodules.

### **1.2 LITERATUUROORSIG**

Die sentrale rol van wiskunde in ingenieurswese is lank reeds bekend. Die feit dat wiskunde die grondslag vorm en essensiële gereedskap is om ingenieursprosesse en -sisteme te beskryf en te analiseer, word nie betwis nie (Artique *et al.*, 2007; Mustoe, 2002). Wat egter bevraagteken word, is die wiskundige bevoegdheid van studente wat tot ingenieurswese toetree. In verskeie lande is daar toenemende verswakking in die wiskundige basis waarop universiteitsonderrig gebou moet word (Mustoe, 2002).

Lawson het in 2003 gevind dat selfs die mees bekwame hedendaagse ingenieurstudente probleme ondervind met die verstaan van konsepte en probleemoplossing in teenstelling met hulle eweknieë van 'n paar jaar gelede (Lawson, 2003). Van Hiele (2002) verklaar dat tensy 'n geskikte wiskundige basis gevorm word, sal studente waarskynlik nie in hul wiskundige ontwikkeling suksesvol wees nie. Studente kan gevolglik nie relatief eenvoudige wiskundetake uitvoer nie en dosente is van mening dat die studente selfs nie algebraïese manipulasies kan doen nie (Mustoe, 2002).

Mislukkings in die oplos van probleme in ingenieurs-, sowel as wiskundemodules, is die gevolg van onbevoegdheid in wiskundige vaardighede (Mustoe, 2002). Soos genoem deur Van Den Heuvel-Panhuizen (2003), is die brug wat oorkom moet word tussen formele wiskundige sisteme en die toepassing van die wiskundige konsepte in die oplos van werklike probleme, belangrik vir 'n ingenieurstudent.

Volgens Jennings (2009) is 'n moontlike verbandhoudende faktor dat universiteite hul toelatingsvereistes verlaag het om meer studente te lok (p. 274). Die resultaat is dat minder leerders wiskunde op 'n hoë vlak op skool slaag en universiteite derhalwe opknappingskursusse moet aanbied om studente voor te berei om aan universiteitsvereistes te voldoen en sodoende suksesvolle voltooiing van modules op universiteit te verbeter (Jennings, 2009).

Programme in ingenieurswese ondergaan ook substansiële verandering, wat impliseer dat wiskunde-opleiding in ingenieursprogramme ook moet verander (Jennings, 2009). Die fokus op ontwerp en professionele studies het veroorsaak dat die klem in die kurrikulum van kennis na prosesontwikkeling verskuif het (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Daar is 'n groter klem op praktiese ontwerp en werkgewers plaas verdere druk op die ontwikkeling van meer professionele studie in graadprogramme (Artique et al., 2007; Jennings, 2009). Voorheen het wiskunde-opleiding vir ingenieurs tipies die gebruik van tegnieke en die uitvoer van praktiese berekeninge behels (Artique et al., 2007). Vandag word die meeste van die berekeninge deur rekenaarsagteware uitgevoer, maar wat nie vervang is nie, is die behoefte aan kognitiewe vaardighede soos kennis, begrip, analisering, modellering en redenering as noodsaaklike wiskundige bevoegdhede (Kent & Noss, 2002).

Opknappings- of oorbruggingskursusse in wiskunde is in verskeie universiteite wêreldwyd gevestig. Die doel van hierdie sentrums of oorbruggingskursusse is om ondersteuning te

bied aan studente met onvoldoende vlakke van bevoegdheid in wiskunde wat 'n voorvereiste vir toelating tot 'n studie in ingenieurswese is. Hierdie ondersteuning maak dit sodoende vir meer studente moontlik om tot ingenieurswese toegelaat te word. Die kursusse het ook ten doel om 'n positiewe bydrae te maak en studente voor te berei vir resente veranderings in die wiskunde-onderrig van voorgraadse ingenieurstudente (Fuller, 2002). Een voorbeeld is die uitgebreide studieprogram wat by die Universiteit van Pretoria in Suid-Afrika bekend gestel is om geleentheid te skep vir eerstejaarstudente om hulle wiskundige bevoegdhede op te skerp en in konteks te plaas met dit wat van hulle verwag gaan word in hulle eerstejaaringenieurstudie (Steyn & Du Plessis, 2007).

Die bepaling van die vlak van wiskundige bevoegdheid en vlak van kennis van die studente met toetreding tot hulle eerstejaaringenieurstudie is belangrik om in ag te neem wanneer die inhoud van die opknappingskursusse saamgestel en oorweeg word (Laia, Nakervisa, Story, Hodgson, Lewenberg & Ball, 2008). Vlakontledings kan gebruik word om vas te stel of die studente wat presteer in hulle akademiese programme oor 'n hoë wiskundige bevoegdheid- en kognitiewe vlak beskik (Laia, Nakervisa, Story, Hodgson, Lewenberg & Ball, 2008). Sodoende kan die studente beter begelei word om tot op 'n sekere denkvlak te kan ontwikkel wat nodig is vir 'n suksesvolle oorgang vanaf sekondêre tot tersiêre instansies (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

### **1.2.1 Probleme rakende wiskundige bevoegdheid**

Die probleem rakende wiskundige bevoegdheid en wiskundige vaardighede wat hierdie studie ten grondslag lê, word vervolgens uiteengesit. In Kent en Noss (2002) se studie is aangetoon dat die meeste studente oor onvoldoende wiskundige bevoegdhede beskik wanneer hulle tot ingenieursprogramme toetree, as gevolg van probleme wat met die toepassing van kern wiskundige vaardighede verband hou. Dit kan lei tot probleme in begripsvorming in verskeie wiskundemodules en verwante vakke (Carr, Bouwe & Fhloinn, 2010). Verbetering en bevordering van studente se begrip van wiskundige konsepte asook hulle wiskundige toepassingsbevoegdheid is 'n belangrike aspek van die universiteitsopleiding in wiskunde, ingenieurswese en natuurwetenskappe. Dit voorsien 'n stewige basis vir suksesvolle professionele ontwikkeling van ingenieurswese (Hsien Huang, 2010).

Aan die ander kant, indien na die professionele praktyk van 'n ingenieur gekyk word, blyk dit dat ingenieurs oor die algemeen van mening is dat hulle nie wiskunde in hul werk gebruik nie (Artique et al., 2007). Ingenieurs het 'n persepsie dat wiskunde wat nuttig en relevant is as deel van ingenieurswese beskou word, terwyl wiskunde wat nie gebruik word nie, as "wiskunde" beskou word (Artique et al., 2007). Kent en Noss (2002) beweer egter dat indien dieper ondersoek ingestel word, wiskundige elemente wel geïdentifiseer kan word, maar dat ingenieurs vanuit hul kundigheid as ingenieurs moontlik verkeerdelik wiskundepraktyk as "ingenieurswese" beskou.

Studente kan dikwels nie die verband tussen skoolwiskunde en wiskunde wat in probleemoplossingomgewings gebruik word, herken nie (Lesh & Zawojewski, 2007). Dit beteken dat die modellerings-, probleemoplossings-, redenerings- en kommunikasieaspek van wiskunde, om net 'n paar te noem, soos bespreek deur Niss (2011) gewoonlik nie genoegsaam (veral op skool) ontwikkel is nie (Jensen, 2007).

Die vraag is dan, waar hierdie persepsie vandaan kom. In hierdie verband bied Kent en Noss (2002, p. 26) die volgende moontlike verklaring:

*"[We] suggest it must come from doing explicit mathematics in the formation phase which becomes implicit in practice. The process of embedding depends critically on the student's experience of learning mathematics and engineering".*

Die proses van vaslegging is dus afhanklik van die leerder se ervaring met betrekking tot die leer van wiskunde in die vormingsfase wat vanselfsprekend word in die praktyk. Hierdie proses word ondersteun deur die gebruik van modelle (Lesh & Zawojewski, 2007). Die doel van modelle is om 'n brug te bou tussen die formele verstaan van die werklike en verbeeldingsrealiteit aan die een kant, en die verstaan van formele sisteme aan die ander kant (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Dit is dus belangrik vir 'n ingenieurstudent om voldoende wiskundige bevoegdheid te hê, sodat bogenoemde brug gebou kan word (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Ingenieurs is verantwoordelik om strukture te ontwerp waaruit ons mensgemaakte omgewing bestaan. Ingenieurs moet dus tekeninge en fisiese modelle effektief kan skep, analiseer en interpreteer sodat voorspellings gemaak kan word oor hoe sodanige strukture

gebruik en toegepas kan word. Vir hierdie voorstellings word modelle, gedetailleerde finale strukture, abstrakte sketse en tekeninge spesifiek ontwerp vir verdere analisering (Sharp & Zachary, 2004; Battista, 2007). Om daartoe in staat te wees, word goed ontwikkelde wiskundige bevoegdhede benodig, byvoorbeeld om 'n lewenswerklike situasie wiskundig te kan interpreteer, probleme te kan formuleer en op te los en dit te kan beredeneer (Sharp & Zachary, 2004; Battista, 2007).

### **1.2.2 Wiskundige bevoegdheidsvlakke van studente**

Die oorgang vanaf 'n skoolomgewing na 'n universiteitsomgewing in die studierigtings soos wiskunde en ingenieurswese, behels die ontwikkeling en oorgang van elementêre wiskundige denke na gevorderde wiskundige denke. Op skool val die klem op beskrywing en oortuiging deur kennis en die toepassing van kennis, maar op universiteit val die klem op definiëring en bewysvoering deur analisering en redenering (Tall, 1999). Volgens Stewart en Thomas (2009) sukkel studente in hulle eerste jaar op universiteit met definiëring en bewysvoering (formele wiskundige toepassings), omdat hulle beperkte blootstelling gekry het op skool aan gevorderde redeneringsvaardighede.

'n Grondige begrip van wat nodig is om 'n student wiskundig bevoeg te maak vir toetreding tot ingenieurstudie op universiteitsvlak is nodig. Dit hou verband met die kognitiewe vlakke, wat op skool ontwikkel is waarop die student wiskundig kan dink, doen en toepas (Tall, 2008; Sharp & Zachary, 2004).

Resente navorsing is gedoen deur Niss (2011) wat wiskundige bevoegdheid definieer as 'n persoon se insiggewende gereedheid om te kan reageer op 'n sekere tipe wiskundige uitdaging van 'n gegewe situasie deur die vermoë om vrae te kan vra met behulp van wiskunde en die gebruik van wiskundige taal en gereedskap. Dit behels ook die vermoë om 'n begronde opinie te kan vorm oor die doen en gebruik van wiskunde in 'n verskeidenheid van situasies en kontekste waar wiskunde 'n rol speel. Niss (2011, p. 19) definieer agt bevoegdhede in die Danish KOM-Projek wat hy geloods het, om die vraag "Wat beteken dit om wiskunde te bemeester?" te beantwoord (kyk paragraaf 2.2).

Soos wat studente na die volgende vlak van kognisie ontwikkel, ontwikkel meer gevorderde wiskundige bevoegdhede wat hulle kan help in die leer van wiskunde met begrip (Benade, 2012). Die studente se wiskundige bevoegdheidsvlak ondersteun die

ontwikkeling van die studente se kognitiewe vaardighede (Luk, 2005). Die ontwikkeling van sekere kognitiewe vaardighede is nodig vir 'n suksesvolle oorgang tot ingenieurstudie op universiteitsvlak (Benade, 2012). In Paragraaf 2.4 is die Anderson-model van kennis, die Van Hiele-teorie, Bloom se taksonomie, die SOLO-taksonomie, die APOS-teorie en die drie-wêreldeteorie van Tall bespreek om insig te kry in die ontwikkelingsprosesse van leer.

In voorgaande verband het Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan, Arora en Erberber (2007) drie kognitiewe vlakke van leer geïdentifiseer wat deur die gebruik en toepassing van wiskunde ontwikkel word. Die drie kognitiewe vlakke is in die studie van belang en is gebruik om die vlakke te identifiseer: Eerstens, *feitekennis, prosedures en konsepte* wat die leerders se behoefte om te weet behels; tweedens, *toepassing* van kennis en konseptuele begrip wat fokus op die vermoë van die leerders om hulle kennis te gebruik om probleme op te los of antwoorde te gee; derdens, *redenering*, wat verder strek as die oplossing van roetineprobleme deurdat dit onbekende situasies, komplekse inhoud en "meervoudige-stap" probleme noodsaak (kyk Tabel 2.1)

Uit die literatuurstudie is dit duidelik dat eerstejaaringenieurstudente tot op spesifieke wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke gevorderd moet wees om wiskunde met sukses te kan gebruik binne die konteks van die eerstejaaringenieursmodules.

### **1.3 DIE NAVORSINGSPROBLEEM**

In die lig van voorgaande, fokus hierdie studie op die wiskundige bevoegdheid waarmee eerstejaaringenieurstudente tot hulle studie toetree, en in die besonder op die verband wat dit met hulle prestasie hou in vakke wat wiskundige bevoegdheid vereis. Die hoofnavorsingsvraag van die studie is dus: *Wat is die wiskundige bevoegdheidsvlak van eerstejaaringenieurstudente en hoe beïnvloed die vlak hulle prestasie in vakke wat wiskundige bevoegdheid vereis?*

Die volgende sekondêre navorsingsvrae word gestel:

1. Wat is die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente by toetrede tot hulle studie?

2. Watter verband bestaan tussen eerstejaaringenieurstudente se wiskundige bevoegdheid by toetrede en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis?
3. Watter riglyne kan op grond van dié verband afgelei word ten einde geskikte studieondersteuningsadvies aan eerstejaaringenieurstudente en die betrokke akademiese personeel te gee en geldige en betroubare keuringsitems met die oog op ingenieurstudie te formuleer?

In die volgende gedeelte word die doelstellings van die studie op grond van die probleemvrae uiteengesit.

#### **1.4 DOELSTELLINGS**

In die lig van voorgaande vrae is die doel van die studie om:

Die wiskundige bevoegdheidsvlak van die eerstejaaringenieurstudente te bepaal en die invloed van hulle wiskundige bevoegdheidsvlak op hulle prestasie in sekere vakke wat wiskundige bevoegdheid vereis.

Ten einde die gestelde doel te bereik, het die volgende sekondêre doelstellings die studie gerig:

1. Die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente by toetrede tot hulle studie te bepaal;
2. Die verband tussen die eerstejaaringenieurstudente se wiskundige bevoegdheid by toetrede en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundebevoegdheid vereis, te bepaal.
3. Om riglyne af te lei wat gebruik kan word om geskikte studieondersteuningsadvies aan eerstejaaringenieurstudente en die betrokke akademiese personeel te gee en geldige en betroubare keuringsitems te formuleer met die oog op ingenieurstudie.

## **1.5 NAVORSINGSONTWERP EN -METODES**

### **1.5.1 Navorsingsontwerp**

In die lig van die doelstellings van die studie (kyk paragraaf 1.4), naamlik om groothede te meet en verbande te bepaal en te toets, asook om op grond van die resultate afleidings te maak, is die ondersoek postpositivisties begrond (Creswell & Garrett, 2008) en word dit hoofsaaklik kwantitatief en in 'n mindere mate kwalitatief beplan en uitgevoer. Die studie gebruik 'n gemengde kwantitatiewe en kwalitatiewe benadering bekend as QUAN-qual (Creswell & Plano Clark, 2011). In die studie is hoofsaaklik kwantitatiewe ontleding gedoen op sekondêre data maar dit is aangevul met inligting wat vanuit 'n kwalitatiewe ontleding verkry is.

### **1.5.2 Literatuurstudie**

Om die navorsingsvrae te beantwoord, is eerstens onderneem om vlakke van wiskundige bevoegdheid uit die literatuur te identifiseer en operasioneel te spesifiseer (kyk Hoofstuk 2). Tweedens is 'n verband tussen hierdie vlakke en studente se prestasie in sekere ingenieursverwante vakke ondersoek, en 'n teoretiese raamwerk ontwikkel waarbinne resultate geïnterpreteer en verklaar is (kyk Hoofstuk 3 en 4). Verskillende databasisse en soekenjins wat onder meer EBSCOhost, Google Scholar en ERIC insluit, is gebruik om relevante bronne op te spoor. Die (Engelse) trefwoorde wat in soektogte gebruik is, is:

*Mathematical competence; mathematics learning; mathematical performance; mathematical achievement; mathematical thinking; mathematical reasoning; analytical thinking; spatial reasoning; mathematical language; Grade 12 learners; first-year mathematical or engineering students; engineering study; prediction of academic success.*

### **1.5.3 Metodologie**

#### **1.5.3.1 Navorsingsmetodes**

Die studie is op data gebaseer, wat reeds bestaan of in die gang van studente se studie aan die Noordwes-Universiteit gargiveer is. Die navorser het dus geen direkte metings gedoen nie, maar haar ondersoek aan die hand van sekondêre data-ontleding uitgevoer.

### 1.5.3.2 Studiepopulasie en steekproef

Die studie is uitgevoer op die data van alle eerstejaaringenieurstudente wat in 2011 vir die eerste keer op die Potchefstroomkampus van die NWU ingeskryf het ( $n=259$ ). In die besonder is die volgende studente se data gebruik:

- Graad 12-wiskundepunt: Alle studente in die populasie ( $n=259$ );
- Opknappingskursustoetspunt: Alle studente in die populasie ( $n=259$ );
- Wiskunde I-punt (WISN111): Alle studente in die populasie ( $n=259$ );
- Programmering vir Ingenieurs C++ punt (ITRW115): Alle Rekenaar-Elektroniese en Elektriese-Elektroniese Ingenieurstudente ( $n=68$ );
- Ingenieursgrafikapunt (INGM111): Alle Rekenaar-Elektroniese en Elektriese-Elektroniese Ingenieurstudente ( $n=68$ ) asook alle Meganiese Ingenieurstudente ( $n=117$ ).

Slegs die Elektroniese Ingenieurstudente volg die spesifieke ITRW 115-module, so ook volg slegs die Meganiese en Elektroniese Ingenieurs die INGM 111-module.

### 1.5.3.3 Insameling van data: Veranderlikes en meetinstrumente

#### **Datastel 1: Gr 12-wiskundepunt**

Wat die Gr 12-wiskundepunte van studente betref, word die punte gebruik wat Umalusi (Raad vir sertifisering van die Graad 12-uitslae) na afloop van die November 2010-eksamen op grond van Wiskunde Vraestel 1 en 2 vrygestel het. Hierdie punte is nie werklike of roupunte nie, maar is die resultaat van Umalusi se aanpassingsproses wat volgens vasgestelde statistiese norme uitgevoer is. Ten einde die bruikbaarheid of betekenisvolheid van Datastel 1 te versterk, asook die gronde vir afleidings ten opsigte van geldige en betroubare studie-ondersteuningsadvies en keuringsitemkonstruksie te ondersteun, word die volgende datastel doelbewus in die studie ingesluit.

## **Datastel 2: Wiskunde-Opknappingskursustoets**

Alle eerstejaaringenieurstudente aan die universiteit moet voor die aanvang van die akademiese jaar 'n oorbruggings- of opknappingskursus voltooi wat gevolg word deur 'n formele toets. Die vakgroep Wiskunde en Toegepaste Wiskunde op die Potchefstroom-kampus is verantwoordelik vir die kursus en die toets. Die toets is oor 'n aantal jare ontwikkel en handel oor verskillende aspekte van verwagte wiskundige bevoegdheid. Die punte wat studente in 2011 behaal het, word as Datastel 2 gebruik. In teenstelling met die Graad 12-punt is hierdie punte werklike of rou punte.

## **Datastel 3: Ingenieursverwante vakke**

Die ander data wat gebruik is, is die werklike of rou punte wat studente in die eerstesemestereksamen (Junie eksamen 2011) in die ingenieursverwante vakke Wiskunde I, Programmering I en Ingenieurstekene I behaal het. Soos gebruiklik word hierdie vraestelle jaarliks deur die verantwoordelike vakgroep opgestel en aan 'n proses van moderering onderwerp.

### 1.5.3.4 Ontleding van data

'n Instrument (taksonomie) is op grond van die literatuurstudie geselekteer aan die hand waarvan studente se wiskundige bevoegdheid ontleed is. Hierdie instrument is onder meer op die hiërargiese vlakke/modelle wat in paragraaf 2.1 beskryf is, gebaseer. Alle data word aan die hand van die betrokke vlakke van wiskundige bevoegdheid ontleed en vergelyk. Datastel 1 word gebruik soos vrygestel deur Umalusi nadat die gebruikelike statistiese norme op die roupunte toegepas is. Alle vergelykings word met behulp van korrelasies tussen datastelle getref. Betroubaarheid van die data-ontledings word aan die hand van die Cronbach  $\alpha$ -koëffisiënt bepaal. Die beduidendheid van verskille word aan die hand van statistiese beduidendheid en effekgrootte (praktiese betekenisvolheid) bepaal. Beskrywende en afgeleide statistiek is ook uit die data bepaal. Alle statistiese ontleding en prosedures is in oorleg met 'n konsultant van die Noordwes-Universiteit, Statistiese Konsultasiediens (SKD, s.d) uitgevoer.

## 1.6 STRUKTUUR VAN DIE STUDIE

**Hoofstuk 1:** Probleemstelling en motivering vir studie.

**Hoofstuk 2:** Assesseringsraamwerke vir die meting van wiskundeprestasie in terme van wiskundige bevoegdheede.

In die hoofstuk is daar ondersoek ingestel na die betekenis van wiskundige bevoegdheid en die verskillende teorieë en taksonomieë van leer en denkontwikkeling. Die oorgang vanaf 'n skoolomgewing na 'n universiteitsomgewing in terme van wiskundige bevoegdheidsvlakke is bespreek. Vanuit die literatuurstudie is 'n raamwerk gekies as meetinstrument waarvolgens die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke in die studie geïdentifiseer is.

**Hoofstuk 3:** Navorsingsontwerp en metodologie

Die hoofstuk voorsien 'n beskrywing van die empiriese studie, asook die resultate wat verkry is van die gebruikte raamwerk en data. Die hoofstuk gee 'n duidelike uiteensetting van die ontledingsproses en die vlak van wiskundige bevoegdheid en kognisie, van die aanvangsinligting asook die data wat verkry is vanaf die eerste semestereksamen van die eerstejaaringenieurstudente.

**Hoofstuk 4:** Data-ontleding en interpretasie

In die hoofstuk is beskrywende en afgeleide statistiek asook korrelasies bepaal tussen die aanvangsinligting van die eerstejaaringenieurstudente en hul prestasie op eerstejaarsvlak in terme van hul wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke.

**Hoofstuk 5:** Samevatting, Gevolgtrekking en Aanbevelings.

Riglyne en gevolgtrekkings is afgelei in hierdie hoofstuk vanuit die bevindinge in Hoofstuk 3 en 4 om die navorsingsvrae te beantwoord.

## **1.7 BYDRAE VAN STUDIE**

Uit die studie is die verband tussen die wiskundige bevoegdheid van eerstejaarstudente se Gr 12-wiskundepunt en Opknappingskursustoetspunt, en prestasie in onderskeie eerstejaarsingenieursvakke bepaal. Uit die resultate is riglyne afgelei om geskikte ondersteuning aan eerstejaaringenieurstudente te gee ter verbetering van hulle prestasie in vakke wat wiskundige bevoegdheid vereis. Bykomend is riglyne afgelei wat gebruik kan word om geldige en betroubare items vir 'n keuringstoets met die oog op ingenieurstudie te konstrueer.

Voorts bied die studie ook vanuit voorgaande perspektief noodsaaklike terugvoer oor die sukses, al dan nie, van die bydrae van wiskunde-onderrig en leer op skool tot universiteitstudie, in die besonder met betrekking tot die vlak en gehalte van wiskundebevoegdheid wat bereik word. Hierdie inligting mag belangrik en nuttig wees sover dit die implementering van die jongste kurrikulum- en assesseringverklarings ("CAPS"-dokumente) (South Africa. Department of "Basic Education", 2011) aangaan. Die studie val dus ook in die fokus van verbetering van die vlak en gehalte van wiskunde onderrig en leer op skool.

## HOOFSTUK 2

# ASSESSERINGSRAAMWERKE VIR DIE METING VAN WISKUNDEPRESTASIE IN TERME VAN WISKUNDIGE BEVOEGDHEDE

### 2.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk is daar ondersoek ingestel na die oorgang ten opsigte van die vereiste wiskundige bevoegdheid tussen sekondêre en tersiêre vlak in terme van die kognitiewe ontwikkeling van elementêre tot gevorderde denke. Wiskundige bevoegdheid word krities bespreek. Vervolgens word teoretiese perspektiewe rakende die ontwikkeling van wiskundige denke in terme van kognitiewe vlakke ondersoek. Uit die bestudering van die nodige kognitiewe vlakke vir voldoende wiskundige bevoegdheid word 'n assesseringsraamwerk gekies waarvolgens die wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vlakke geïdentifiseer kan word van studente wat ingenieurstudie op universiteit wil volg.

Studente ervaar probleme met die oorgang vanaf 'n prosedurele of algoritmiese skoolbenadering na abstrakte en formele bewysvoering van konsepte en definisies op universiteitsvlak (Stewart & Thomas, 2007). Die bepaling van wiskundige bevoegdhede van eerstejaarstudente het ten doel om 'n konstruktiewe bydrae te maak tot die identifisering van 'n raamwerk vir assessering en ontwikkeling van toepaslike wiskundige vaardighede van voornemende en eerstejaaringenieurstudente om suksesvol wiskunde te kan gebruik in ingenieursmodules.

Die assesseringsraamwerk(e) word gebruik as instrument om die kognitiewe vlakke te identifiseer waarvolgens wiskundige bevoegdhede bepaal kan word. 'n Assesseringsraamwerk kan as meetinstrument gebruik word om prestasie en denkvlakke te meet en te analiseer. Wiskundige bevoegdheid (kyk paragraaf 2.2) word eerstens bespreek. Tweedens word daar ondersoek ingestel na die assesseringsraamwerk (kyk paragraaf 2.3) in die kognitiewe domeine soos uiteengesit deur Mullis, Martin en Foy (2005) in die TIMSS (*Third International Mathematics Study*) en die assesseringsraamwerk vir

wiskundige geletterdheidsbevoegdheidsvlakke soos uiteengesit deur Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) (2009) in die PISA (*Programme for International Student Assessment*). Vervolgens word ‘n aantal teoretiese perspektiewe (sien paragraaf 2.4) op die ontwikkeling van studente se kognitiewe vlakke ondersoek om insig te verkry oor die ontwikkeling van kognitiewe bevoegdhe.

## **2.2 WISKUNDIGE BEVOEGDHEID**

Daar is ‘n verskil tussen wiskundige bevoegdheid en wiskundige doeltreffendheid (Callingham & Griffin, 2000). Bevoegdheid is die meting van die vermoë om ‘n taak uit te voer. Wiskundige bevoegdheid is dus die vermoë om wiskundige konsepte te herken, te gebruik en toe te pas in relevante kontekste en situasies ten einde bepaalde take uit te voer, wat beslis die oorhoofse doel is van onderrig van wiskunde in die ingenieursfakulteit (Callingham & Griffin, 2000). Doeltreffendheid is die meting van die sukses behaal in die uitvoering van ‘n taak. Wiskundige doeltreffendheid is die bekwaamheid of prestasievermoë om ‘n wiskundige taak suksesvol uit te voer. Wiskundige bevoegdheid behels die vermoë en bereidwilligheid om wiskundige denke (logiese en ruimtelike denke) en voorstellings (formules, modelle en grafieke) te gebruik (Vilkomir & O’Donoghue, 2009).

Uit die literatuur is verskeie studies gebruik wat die vermoë om wiskundig bevoeg te wees, verder ondersoek. In 1894 het Calkins en Skelton navorsing gedoen oor wat die essensie van wiskundige bevoegdheid is en watter verstandelike prosesse nodig is om wiskunde te kan doen (Calkins & Skelton, 1894). Hulle het drie denkproesse genoem, naamlik: identifisering, redenering en probleemoplossing. Volgens Vilkomir en O’Donoghue (2009) het navorsers soos Binet, Piaget en Krutetskii ook bydraes gelewer tot die studie van wiskundige bevoegdheid. Binet (1975) was een van die eerste navorsers wat erken het dat wiskundige intellek ‘n groot omvang van verskillende spesiale vermoëns aanneem. Piaget (1963) het deur die identifisering van die stadiums van konkrete en formele prosedures, verskillende vlakke van intelligensie beskryf wat baie belangrik geag word vir die ontwikkeling van wiskundige bevoegdhe, naamlik “fisiese”, “wiskundige logika” en “sosiaal en persoonlike” vlakke (p. 419). Verder is ‘n raamwerk van die struktuur van wiskundige bevoegdhe deur Krutetskii (1976) voorgestel. Hy het wiskundige bevoegdheid in vier kategorieë verdeel, naamlik:

1. *Verkryging van wiskundige inligting* – die vermoë om die formele struktuur van ‘n probleem te bepaal.
2. *Verwerking van wiskundige inligting* – bestaan uit vaardighede soos logiese redenering, veralgemening, buigbaarheid, reflektoring en rasionalisering van oplossings.
3. *Behoud van wiskundige inligting* – om wiskundige verhoudings te kan bepaal, moet daar reeds kennis gedra word van wiskundige konsepte en vaardighede.
4. *Wiskundige aanleg* – om die omgewing wiskundig te kan interpreteer op ‘n logiese en wiskundige vlak.

Resente navorsing in hierdie verband is deur Niss (2011) gedoen op versoek van die Costa Rica Nasionale Raad vir Wetenskap- en Wiskunde-onderwys. Volgens hom beteken wiskundige bevoegdheid die kennis, verstaan, doen en gebruik van wiskunde. Dit behels ook die vermoë om ‘n begronde opinie te kan vorm oor die doen en gebruik van wiskunde in ‘n verskeidenheid van situasies en kontekste waar wiskunde ‘n rol speel. Agt wiskundige bevoegdhede is deur Niss (2011, p. 19) gedefinieer. Die bevoegdhede is ontwikkel deur die Danish KOM-Projek wat die antwoord op die vraag “Wat beteken dit om wiskunde te bemeester?” ondersoek het. Die bevoegdhede is in twee kategorieë ingedeel, soos uiteengesit in Tabel 2.1 en in elke kategorie word vier bevoegdhede geïdentifiseer met duidelike beskrywings van wat elke wiskundige bevoegdheid behels.

**Tabel 2.1: Die agt wiskundige bevoegdheede soos gedefinieer deur Niss (2011)**

Hoof-wiskundige bevoegdheids-kategorieë	Onderafdelings van wiskundige bevoegdheede	Beskrywing van wiskundige bevoegdheede
Die vermoë om vrae te vra en te antwoord met behulp van wiskunde, behels die:	<p>Bemeestering van wiskundige denkwyse (Wiskundige denkbevoegdheid)</p> <p>Formulering en oplos van probleme (Probleemoplossingsbevoegdheid)</p> <p>Analise, wiskundige modellering en integrasie (Modelleringsbevoegdheid)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Die verstaan en hantering van die oorsprong, omvang en die beperkings van gegewe konsepte;</li> <li>- Die abstraher van konsepte en veralgemening van resultate;</li> <li>- Onderskeiding tussen verskillende tipes wiskundige definisies en teorieë;</li> <li>- Bewustheid van die tipe vrae wat wiskundig van aard is en insig te toon met die beantwoording van die vrae;</li> <li>- Vermoë om toepaslike begeleidende vrae te stel tydens die oplos van wiskundige probleme;</li> <li>- Formulering en spesifisering van wiskundige probleme, teoreties of toegepas;</li> <li>- Die vermoë om probleme op te los op verskillende gevraagde maniere;</li> <li>- Die vermoë om wiskundige modelle te analiseer en te bou;</li> <li>- Analisering van oorsprong en eienskappe, en die assessering van die omvang en bruikbaarheid van bestaande modelle;</li> <li>- Strukturering en matematisering van situasies, hantering van die</li> </ul>

Hoof-wiskundige bevoegdheids-kategorieë	Onderafdelings van wiskundige bevoegdhe	Beskrywing van wiskundige bevoegdhe
Die vermoë om wiskundige taal en gereedskap te gebruik, behels die:		gevolgde model, skets wiskundige afleidings vanaf die model, analiseer die model, kommunikeer die model en monitor die totale proses.
	<p>Vermoë om wiskundig te kan redeneer (“reason”) (Redeneringsbevoegdheid)</p> <p>Hantering van wiskundige taal, vertaling in terme van wiskundige simbole en formele wiskundige sisteme (Simbole- en formaliseringsbevoegdheid)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Volg en assessee ander leerders se wiskundige beredenering;</li> <li>- Verstaan wat ‘n bewys is en hoe dit verskil van ander tipe redenering;</li> <li>- Verstaan die logika agter ‘n teenvoorbeeld;</li> <li>- Voer informele en formele argumente aan, byvoorbeeld redenering in bewysvoering.</li> <li>- Ontsyfer simboliese en formele wiskundige taal;</li> <li>- Vertaal tussen simboliese taal en natuurlike taal;</li> <li>- Hanteer simboliese standpunte en uitdrukkings asook formules;</li> <li>- Verstaan die aard van formele wiskundige sisteme.</li> </ul>
	<p>Vermoë om verskillende voorstellings van wiskundige identiteite te hanteer (Voorstellingsbevoegdheid)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ontsyfer, interpreteer, onderskei tussen verskillende tipes voorstellings van wiskundige entiteite;</li> </ul>

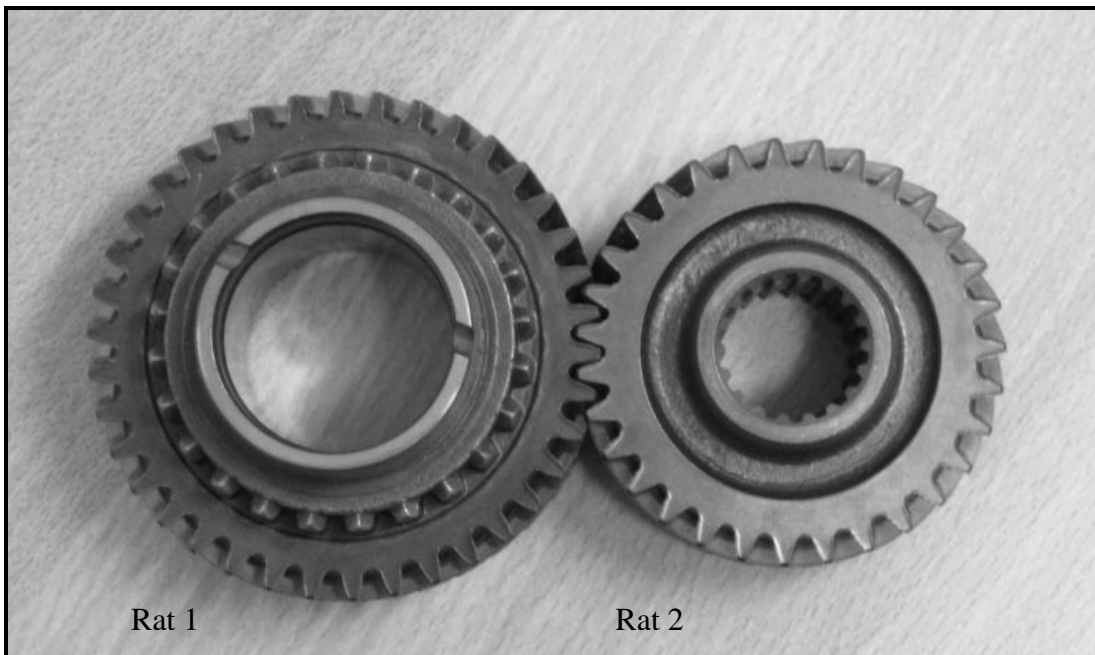
Hoof-wiskundige bevoegdheids-kategorieë	Onderafdelings van wiskundige bevoegdhede	Beskrywing van wiskundige bevoegdhede
	<p>Die vermoë om in, met behulp van en oor wiskunde te kan kommunikeer (Kommunikasiebevoegdheid)</p> <p>Die vermoë om die relevante gereedskap van wiskunde korrek te gebruik (Gereedskapbevoegdheid)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Verstaan die verwantskappe tussen verskillende voorstellings oor dieselfde wiskunde entiteit;</li> <li>- Kies, gebruik en skakel heen en weer tussen die verskillende voorstellings.</li> <li>- Verstaan en interpreteer verskillende tipes skryfwyses of visuele wiskundige uitdrukkings.</li> <li>- Beskik oor kennis oor die eienskappe en bestaan van verskillende relevante gereedskap en hulpmiddele vir wiskundige aktiwiteite, byvoorbeeld liniale, tabelle, rekenmasjiene, rekenaars en die Internet;</li> <li>- Het insig in die moontlikhede en beperkings van die gereedskap.</li> </ul>

Die uiteensetting van Niss (2011) se bevoegdhede voorsien ‘n sistemativering van elemente wat betrokke is by die oorspronklike probleemvoorstelling. Die bevoegdhede is spesifiek vir wiskunde geïdentifiseer en in groepe verdeel. Die belangrikste eienskap van die bevoegdhede is dat dit die vlakke van onderwys van primêre skool tot universiteit omsluit, en oor verskeie dissiplines strek, van rekenkunde tot topologie (Niss 2011).

Wiskundige bevoegdheid gaan oor die aksie op ‘n respons van ‘n sekere tipe wiskundige uitdaging van ‘n gegewe situasie (Callingham & Griffin, 2000). Situasies waar ‘n student sodanige uitdagings kry kom voor binne ‘n wiskundige omgewing of in modules wat deel

vorm van die student se kursus, byvoorbeeld in rekenaarprogrammering en ingenieursgrafika. Die volgende voorbeeld is verkry vanaf ‘n ingenieursopdrag soos opgestel deur die “European Society for Engineering Education (SEFI)” (Seitzer, 2011). Die voorbeeld is ter verduideliking van die konsep wiskundige bevoegdheid.

Beskou twee ratte (1 en 2) met onderskeidelik  $m$  en  $n$  aantal tande (sien figuur 2.1). Elke tand in een rat moet met elke tand in die ander rat in aanraking kom (tande ontmoet mekaar) om laegeraaseksitasie te verseker. Hoe affekteer dit die keuse van die aantal tande?



**Figuur 2.1: Ingenieursopdrag met twee ratte as die onderwerp (Seitzer, 2011)**

Die student sal die taak interpreteer ten opsigte van heelgetalle en verbande tussen heelgetalle (wiskundige denkbevoegdheid). Die vereiste dat die tande moet ontmoet, moet getransleer word in ‘n wiskundige argument wat  $m$  en  $n$  insluit en toepas in ‘n ketting van argumente (wiskundige redeneringsbevoegdheid): Veronderstel tand 1 van Rat 1 ontmoet die eerste tand van Rat 2, dan kan Rat 1 se tande voorgestel word deur  $1+m$ ,  $1+2m$ ,  $1+3m$ , ..., ensovoorts. Die algemene wiskundige uitdrukking vir Rat 1 se tande is dus:  $1+r*m$  modulo  $n$ . Dus, die situasie is gelyk aan “ $r, k \in \mathbb{Z}: 1+rm = s+kn$  vir  $s=1, \dots, n$ ”. Dit is gelyk aan “ $r, k \in \mathbb{Z}: rm=s+kn$  vir  $s=0, \dots, n-1$ ” wat weer gelyk is aan “ $r, k \in \mathbb{Z}: rm=1+kn$ ” (dink en

redeneer wiskundig). Die situasie vereis dat die probleem opgelos word deur  $m$  en  $n$  te bepaal ( $m$  en  $n$  moet dus priemgetalle wees, met ander woorde hulle het geen gemeenskaplike faktore behalwe 1 nie) (wiskundige probleem word voorgestel en opgelos). Nog 'n manier om die probleem te benader, is om 'n boek te kry oor ratte, sodat die inligting beter verstaan kan word (maak gebruik van gereedskap, kommunikasie van, met en oor wiskunde).

Om die ingenieursopdrag te kan uitvoer, moet die student die vermoë hê om vrae te vra en te beantwoord met behulp van wiskunde asook om wiskundige taal en gereedskap te gebruik. Hierdie is altwee wiskundige bevoegdhede wat ontwikkel moet wees tot op 'n vlak wat bruikbaar is vir ingenieurstudente.

### **2.2.1 Die ontwikkeling van wiskundige bevoegdheid**

Freudenthal (1991) het beklemtoon dat situasies wat die potensiaal skep vir groei, ontwikkel moet word sodat leerders geleentheid het om na hoër vlakke van begrip te beweeg en wiskundige kennis gekonstrueer kan word. Freudenthal (1968) het wiskunde soos volg getipeer: "*There is no mathematics without mathematizing*" (p. 3). Hy verduidelik matematisering as die aktiwiteit om argumente te organiseer van realiteit tot wiskundige rede. Vir Freudenthal (1971) was wiskunde die aktiwiteit om 'n probleem te soek, te identifiseer en op te los. Wiskunde moet dus nie gesien word as 'n geslote stelsel nie, maar eerder as 'n konstruktiewe proses, die proses om die werklikheid te matematiseer. Dit beteken dat studente deur verskillende vlakke van begrip beweeg deur matematisering. Om die geheelbeeld te kan raaksien, moet uiteindelik insigte verkry word in algemene beginsels onderliggend aan 'n probleem deur matematisering (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Herkenning, herhaling en taal is die boustene van 'n jong kind se denk- en beredeneringsontwikkeling (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). In meetkunde neem hierdie ontwikkeling volgens Van Hiele (2002) 'n aanvang met die vorming van visuele ruimtelike idees en argumente ten opsigte van figure en word gevolg deur 'n hiërargie van sogenaamde "Van Hiele"-vlakke tot 'n gesofistikeerde volwasse of bekwame vlak waar herkenning, herhaling en taal saamsmelt om 'n volledige verskeidenheid van wiskundige bevoegdhede te vorm.

Van Hiele (1986) beskryf vyf vlakke van meetkundige argumentasie- of beredeneringsbevoegdheid, wat elk deur 'n spesifieke vlak van staving van argumente en die gebruik van "tipiese" taal gekenmerk word. Die vyf vlakke van Van Hiele se teorie word later bespreek (kyk paragraaf 2.4.2).

Daar is 'n definitiewe verskil tussen Van Hiele (2002) se teorie oor die vlakke van ontwikkeling toegepas op meetkunde en die kognitiewe vaardighede wat ontwikkel word vanuit rekenkunde en algebra. In rekenkunde is die fokus op die simbolisering van tellingsprosesse en getalkonsepte. Onderafdelings van elementêre wiskunde soos algebra, rekenkunde, meetkunde en analise bevat eienskappe wat denke ontwikkel sodat aksiomatiese definisies en bewysvoering gebruik kan word (Tall, 2004, 2006). Die ontwikkeling (verskuiwing) in denke is konstruktiewe prosesse wat deur Tall (2008) beskryf word as 'drie wêrelde van wiskunde' (kyk paragraaf 2.5). Die vlak van wiskundige bevoegdheid hou verband met die kognitiewe vlakke waarop die leerder wiskundig kan dink, redeneer, doen en toepas wat op skool ontwikkel is (Tall, 2008; Sharp & Zachary, 2004).

### **2.2.2 Meting van wiskundige bevoegdheid**

'n Breër definisie van wiskundige bevoegdheid (kyk paragraaf 2.2) behels dat die suksesvolle oorgang van sekondêre tot tersiêre vlak nie bereik kan word deur net 'n vaardigheid soos voltooiing van optelsomme nie. Suksesvolle oorgang word bepaal deur kennis en begrip, deur die vermoë om binne 'n gegewe konteks sodanige kennis en vaardighede toe te pas in nuwe take en situasies (Callingham & Griffin, 2000). Callingham en Griffin (2005) verduidelik dat die evaluering en bepaling van bevoegdhede inligting voorsien oor huidige prestasievlakke asook 'n voorspellingselement het van hoe die student in toekomstige akademiese uitdagings gaan vaar (p. 1).

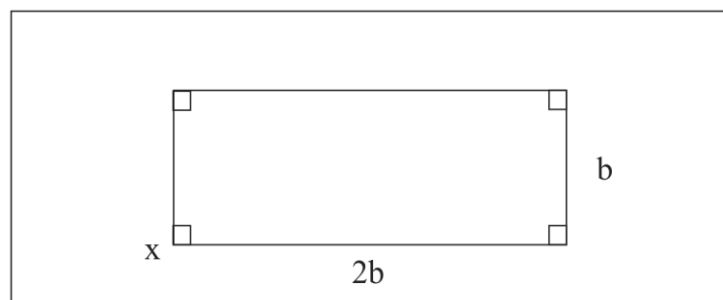
Vervolgens gaan deur die literatuurstudie bepaal word wat die toepaslike meetinstrument is om die wiskundige bevoegdheidsvlakke te bepaal. Volgens Näsström en Henriksson (2008) bevat die assessering van leerders se bevoegdheidsvlakke, inhoudspesifikasies en beskrywings van spesifieke kognitiewe vlakke. Wiskundige bevoegdheid vir ingenieurstudente noodsaak die ontwikkeling van kognitiewe vaardighede soos begrip, toepassings en modellering (Kent & Noss, 2002). Die vlakke van wiskundige

bevoegdheid, soos bepaal en toegepas deur die TIMSS-studie (kyk paragraaf 2.3.1) word in hierdie studie gebruik om die eerstejaaringenieurstudente se vlak van wiskundige bevoegdheid te bepaal met toetred tot hul ingenieurstudie asook aan die einde van die eerste semester van hul studie. Die rede tot die keuse van die TIMSS-raamwerk word volledig uiteengesit in paragraaf 2.6.

Vir die bespreking en ontleding van die basiese wiskundige bevoegdhede wat nodig is vir ingenieurswese is 'n voorbeeld gekies van 'n moontlike wiskundige taak op sekondêre vlak op skool. Die benadering van die probleem word ter illustrasie duidelik opgedeel in wiskundige bevoegdheidsvlakke wat nodig is om die probleem suksesvol op te los.

### ***Beskrywende voorbeeld***

Veronderstel 'n reghoekige stuk karton, met afmetings  $b$  as die breedte en  $2b$  as die lengte is gegee. 'n Oop boks moet gemaak word met die karton deur die sye op te vou. Hoe groot is die volume van die boks wat gevorm is deur die proses? As ten minste 'n sekere volume verkry moet word, wat moet die afmetings van die snitte van  $x$  wees?



**Figuur 2.2: Reghoekige karton met afmetings  $b$  en  $2b$ .**

Hierdie is 'n tipiese wiskundige probleem van toepassende waarde. Om die vrae te beantwoord is wiskundige modellering nodig wat hoofsaaklik uit die volgende komponente bestaan: matematiseer die probleem, spesifiseer in wiskundige terme, stel die probleem grafies voor en beantwoord die vrae (Niss, 2011; par. 2.2). Hierdie komponente word vervolgens bespreek en ontleed aan die hand van die gegewe probleem:

1. Matematiseer die probleem

Die hoekies van die karton met dieselfde veranderlike wydte  $x$  moet uitgeknip word sodat die sye opgevou kan word om 'n oop boks te vorm. Die resultaat sal 'n volume gee van

$$V(x) = x(2b - 2x)(b - 2x) = 2x(b - x)(b - 2x).$$

Die vraag in die probleem kan vertaal word in wiskunde: Is daar 'n waarde vir  $x$  waarvoor  $V(x)$  'n maksimum waarde kan gee? As dit moontlik is, is daar meer as een moontlike waarde vir  $x$ ?

2. Spesifiseer in wiskundige terme

Gebaseer op die aard van die situasie, val die moontlike waardes van  $x$  binne die interval

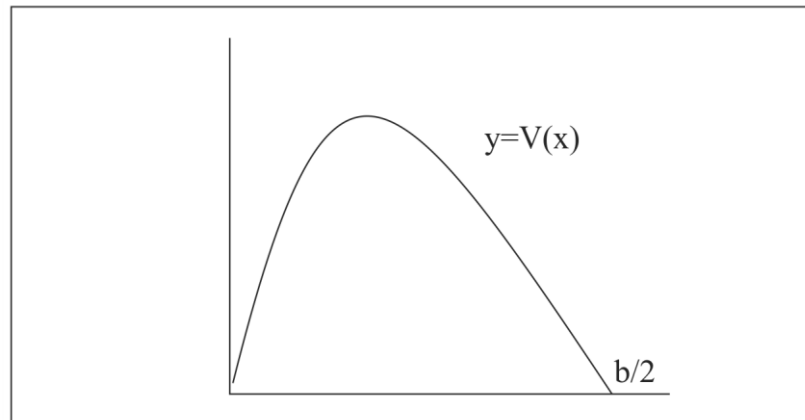
$0 < x < b/2$ , al word  $V$  as 'n polinomiese funksie gedefinieer vir alle  $x$  waardes in  $\mathbb{R}$ . Ons is nou gereed om die vrae te spesifiseer vanuit die probleem:

- Vraag 1: Is daar 'n waarde vir  $x$  in die interval  $I = [0, b/2]$  waar  $V$  'n maksimum sal wees in  $I$ ?
- Vraag 2: Indien wel, wat sal die waarde van  $x$  wees?
- Vraag 3: Is daar meer as een moontlike waarde vir  $x$  in  $I$  soos in Vraag 2?
- Vraag 4: As daar meer as een moontlike waarde vir  $x$  is, wat die beste keuse vir  $x$  as 'n addisionele kriterium voorgestel word?
- Vraag 5: Wat moet  $b$  se waarde wees as die boks 'n minimum volume moet hê?

3. Stel  $V$  grafies voor

Die observering vind plaas dat  $V(0) = V(b/2) = V(b) = 0$  en dat die polinoom geen ander wortels het nie. In die interval  $I = [0, b/2]$ , is  $x > 0$ ,  $b-x > 0$  en  $b-2x > 0$ , vervolgens is  $V(x) > 0$  in  $I$ . Vir 'n negatiewe  $x$ , is  $V(x)$  negatief. Vir  $b/2 < x < b$ , is  $V(x)$  negatief as  $b-x > 0$  en  $b-2x < 0$ . Vir  $x > b$ , is  $V(x)$  positief as beide  $b-x$  en  $b-2x$  negatief is.

Die ontleding maak dit moontlik om die grafiek van  $V$  te teken (Sien figuur 2.3).



**Figuur 2.3: Die grafiese voorstelling van die funksie  $V(x)$**

4. Beantwoord die onderskeie toepaslike vrae

4.1 Beantwoord Vraag 1:  $V$  is kontinu in die geslote interval  $[0, b/2]$  as kenmerk van 'n polinomiese funksie. Vervolgens behaal dit 'n maksimum waarde in die interval. As  $V(0) = V(b/2) = 0$ , en as aangeneem word dat  $V$  positiewe waardes het in  $I$ , sal die maksimum waarde verkry kan word binne die betrokke interval in  $I$ . Dit wil sê dat die antwoord op Vraag 1 "Ja!" is. Hierdie antwoord word visueel ondersteun deur die lees van grafiek  $V$ .

4.2 Beantwoord Vraag 2: Hier word 'n bietjie differensiaalrekening gebruik.  $V(x) = 2x(2x^2 - (2b + b)x + b^2)$  kan geskryf word as  $V(x) = 4x^3 - 6bx^2 + 2b^2x$  waaruit die afgeleide bepaal kan word, naamlik:

$V'(x) = 12x^2 - 12bx + 2b^2 = 2(6x^2 - 6bx + b^2)$ . Deur die afgeleide gelyk aan 0 te stel kan die  $x$  waarde bepaal word waar  $V$  'n maksimum is. Daaruit volg dat  $V'(x) = 0$  vir  $x = b(3 \pm \sqrt{3})/6$ . Die wortel is nie geldig nie want  $b(3 + \sqrt{3})/6$  is nie uitvoerbaar vir  $x > b/2$ . Daar is slegs een moontlike oplossing en vervolgens is  $x_0 = b(3 - \sqrt{3})/6$ . Die waarde van  $V$  in  $x_0$  is  $V(x_0) = (2b/6)(3 - \sqrt{3})[b - b(3 - \sqrt{3})/6][b - (3 - \sqrt{3})/3] = b^3\sqrt{3}/9 > 0$ . 'n Maksimum punt vir  $V$  op  $I$  is dus gevind. Vanuit die feit dat daar slegs een maksimum punt  $x_0$  in  $I$  is en dat daar

reeds geïdentifiseer is dat die maksimum punt vir  $V$  in  $I$  is (reeds gevind in 4.1), kan die gevolgtrekking gemaak word dat  $x_0$  die maksimum punt is.

Daar kan verder geargumenteer word dat  $V''(x) = 12(2x - b)$  sodat  $V''(x_0) = 12[b(3 - \sqrt{3})/3 - b] = -4b\sqrt{3} < 0$ , wat impliseer dat  $x_0$  'n maksimum punt vir  $V$  is.

As 'n benaderde waarde van  $x_0$  bepaal moet word vir praktiese redes, bv.  $x_0 \approx 0,221b$ , sal gereedskap of hulpmiddels gebruik moet word soos sakrekenaars, rekenaars of tabelle. Opsommend kan afgelei word dat daar slegs een aanvaarbare oplossing is vir die probleem, naamlik  $x_0 = b(3 - \sqrt{3})/6 \approx 0.211b$ .

4.3 Beantwoord Vraag 3 & 4: Daar is geen ander maksimum punt vir  $V$  in  $I$  nie, vervolgens word geen alternatief oorweeg nie.

4.4 Beantwoord Vraag 5: Die maksimum volume wat verkry kan word is  $b^3\sqrt{3}/9$ . As 'n sekere gegewe minimum volume  $V(0)$  bepaal moet word, kan dit bepaal word deur  $b$  gelyk te stel aan  $(3\sqrt{3}V(0))^{1/3}$ . Dit beantwoord dus Vraag 5 en die totale probleem is opgelos.

Vervolgens moet geanaliseer word wat dit behels om die vyf vrae te kan beantwoord (Tabel 2.1; Niss, 2011).

- Eerstens behels dit wiskundige denke, om te weet watter tipe vrae om te vra en die tipe antwoorde wat verwag kan word (wiskundige denkbevoegdheid).
- Tweedens moet standpunte, oplossings en afleidings geformuleer en geregverdig kan word (probleemoplossingsbevoegdheid).
- Derdens moet verskillende wiskundige voorstellings gemaak kan word en vertalings tussen die voorstellings is van uiterse belang. In die voorbeeld is gebruik gemaak van verbale, grafiese en simboliese voorstellings (voorstellingsbevoegdheid).

- Vierdens moet wiskundige simbolisering en formalisme hanteer kan word (simbole en formaliseringsbevoegdheid).
- Vyfdens behels dat die kommunikasie van wiskundige situasies (kommunikasie-bevoegdheid).
- Laastens die gebruik van wiskundige gereedskap en hulpmiddele (gereedskaps-bevoegdheid).

## **2.3 RAAMWERKE OPGESTEL VIR INTERNASIONALE WISKUNDIGE STUDIES**

Die fokus van die studie is op die bepaling van die ingenieurstudente se wiskundige bevoegdheid ten opsigte van hulle kognitiewe vlakke. Die vlak van wiskundige bevoegdheid hou verband met die kognitiewe vlakke waarop die leerder wiskundig kan dink en redeneer (Tall, 2008 ; Sharp & Zachary, 2004).

‘n Raamwerk is gekies vanuit twee internasionale studies, naamlik die TIMSS (Trends in International Mathematics Study) en PISA (Programme for International Student Assessment) om te bepaal watter kognitiewe vlakke benodig word om ‘n voldoende wiskundige bevoegdheidsvlak te bereik om sukses te behaal in eerstejaaringenieurstudie.

### **2.3.1 Trends in International Mathematics Study (TIMMS)**

Internasionale vergelykbare studies van prestasie in wiskundeonderwys het sy oorsprong in wat vandag bekend is as die “First International Mathematics Study” (FIMS) (Mullis & Martin, 2006). FIMS was die eerste onderneming van die “International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)”. Volgens Mullis en Martin (2006) was die organisasie (IEA) die baanbreker vir internasionale evaluering van studenteprestasie. FIMS is hoofsaaklik tussen 1961 en 1965 uitgevoer, en dit is afkomstig vanaf ‘n plan vir ‘n grootskaalse internasionale studie in die vak wiskunde, soos voorgestel deur Benjamin S. Bloom in 1958 (Husén, 1967).

Daar was verskeie redes waarom wiskunde gekies is as die vak van ondersoek in die eerste internasionale studie. Eerstens het dit gefokus op die belangrikheid van die vak self. Verskeie lande was bekommerd dat die fundamentele manier waarop wiskunde geleer

word, die ontwikkeling van wetenskap en tegnologie beïnvloed (Beatty, 1997; Mullis & Martin, 2006). Tweedens het dit gefokus op die uitvoerbaarheid van die grootskaalse internasionale studie. Navorsing oor die wiskundekurrikulum en die onderrig in wiskunde was vergelykbaar en ooreenstemmend tussen die verskillende lande (Beatty, 1997; Mullis et al., 2007). Die moontlikheid het dus bestaan om 'n wiskundetoets saam te stel om sodoende verskeie lande se kurrikulums en die prestasie van die leerders te vergelyk. Verder het die vertaling van dié toets na verskillende tale, minimale probleme opgelewer aangesien wiskundige simbole en notasies internasionaal aanvaar word.

Die FIMS is in 12 lande uitgevoer, verskeie bevindinge is verkry rakende die struktuur en organisasie van onderrigsisteme, die wiskundekurrikulum en die wyse van onderrig deur die onderwysers (Husén, 1967).

In die middel van die 1970's het die IEA-navorsers begin werk aan 'n "Second International Study of Mathematics (SIMS)", wat voortgebou het op die inpak van die FIMS (Mullis & Martin, 2006). Die SIMS was ook 'n vergelykende studie tussen studente en hul prestasies in wiskunde, maar dit het groter klem gelê op die invloed van die kurrikulum op die prestasie van die student, asook die wiskundeklaskamer in terme van die verhouding tussen die insette (die manier hoe die wiskunde aangebied word) en uitsette (die reaksie en vordering van die studente) van die skool in terme van studenteprestasies (Mullis et al., 2007).

TIMSS die "Third International Mathematics and Science Study" was die eerste verslag wat wiskunde en wetenskap gekombineer het in 'n enkele studie, wat voortgebou het op FIMS en SIMS (Mullis & Martin, 2006; Mullis et al., 2007). Die TIMSS behels omvangryke assessering van studente se prestasies in wiskunde en wetenskap op drie vlakke van onderrig, naamlik graad drie en vier, graad sewe en agt, en graad twaalf of die finale graad in die sekondêre skoolvlak. Deur die uitvoering van die TIMMS in die begin van 1990, is die afleiding gemaak dat effektiewe wiskunde- en wetenskaponderrig 'n uiters belangrike komponent is vir ekonomiese ontwikkeling in die uitgebreide kennisgebaseerde en tegnologiese wêreld (Beatty, 1997).

Ongeveer 50 lande het deelgeneem aan die TIMMS, wat dit die grootste studie in hierdie verband gemaak het. Een van die essensiële komponente van die TIMMS was 'n uitgebreide stel kurrikulumraamwerke vir wiskunde en wetenskap (Robitaille et al., 1993).

Die raamwerke is ontwerp om omvattende ontleding van kurrikulumdokumente, en die ontwikkeling van assesseringsraamwerke van studenteprestasie te ondersteun (Mullis & Martin, 2006).

Die TIMMS se internasionale verslae van wiskundige prestasies vir graad sewe en agt, en in graad 12, het die studente se prestasies in wiskunde beskryf in die deelnemende lande, en het 'n ryk versameling van data voorsien oor die sosiale en onderrigkonteks vir leer. TIMMS se resultate is versprei na die deelnemende lande en die impak op die onderwysstelsel was enorm ten opsigte van onderrig en die konteks waarbinne wiskunde geleer is (Mullis & Martin, 2006).

Die TIMSS het primêr gefokus op die betroubaarheid en die vergelykbaarheid van die data as die hoogste prioriteit in die uitvoering van die studie. Die betroubaarheid en vergelykbaarheid van die data is die waarmerk van TIMMS, en is een van die redes waarom verskillende toepaslike raamwerke wat opgestel is, deur die TIMMS aanvaar word as betroubare instrument wat gebruik kan word om die wiskundige bevoegdhede te analiseer (Lee, 2006; Mullis & Martin, 2006; Mullis et al., 2007).

TIMMS se toetsvrae is ontwerp om 'n wye verskeidenheid van kennis en bevoegdhede in wiskunde te meet. Die analisering van die resultate is gekategoriseer volgens vier vlakke wat 'n omvattende beskrywing van die wiskunde gee wat die studente kan doen op elke vlak. Die bevoegdhede varieer vanaf die gebruik van relatiewe komplekse algebra, meetkundige konsepte en verhoudings in die gevorderde vlak tot slegs basiese wiskundige kennis hoofsaaklik in die getalarea, op die lae vlak. Die vlakke soos gebruik deur die TIMSS-studie om wiskundige bevoegdheid te meet is in die studie gebruik, aangesien die raamwerk ontwerp is om inhoudsgebaseerde take te evalueer wat in ooreenstemming is met wat van ingenieurs verwag word op eerstejaarsvlak, en dit is om kurrikulumgeörienteerde probleme op te los.

Die vlakke van wiskundige bevoegdheid is soos volg opgesom in Tabel 2.2 volgens Mullis en Martin (2006):

**Tabel 2.2: Wiskundige bevoegdheidsvlakke (Mullis & Martin, 2006)**

Wiskundige bevoegdheidsvlakke	Beskrywing
Gevorderd	Studente kan inligting organiseer, veralgemenings maak, nie-roetineprobleme oplos en kan hulle afleidings voorstel en regverdig.
Hoog	Studente kan hulle begrip en kennis op 'n verskeidenheid van relatiewe komplekse situasies toepas.
Intermediêr	Studente kan basiese wiskundige kennis toepas in gewone roetine situasies.
Laag	Studente het basiese wiskundige kennis.

Volgens Conzales et al. (2008) is raamwerke saamgestel deur die TIMMS om die kognitiewe (kennis, toepassing en redenering) en inhoudsdomene (getalle, algebra, meetkunde en datahantering) vas te stel wat die vordering en ontwikkeling ten opsigte van die gevorderde beginpunt konstrueer. Die kognitiewe domeine in die wiskunde en wetenskapraamwerke is hersien vir TIMMS 2007, wat toe bekend staan as die *Trends in International Mathematics and Science Study*. Die TIMSS 2007 assesseringsraamwerk voorsien 'n beskrywing met meer detail oor die inhoud en kognitiewe domeine (Conzales et al., 2008).

Om die analisering en rapportering van die wiskunde- en wetenskapresultate ten opsigte van die kognitiewe domeine te verhoog, het die Verenigde State van Amerika (V.S.A.) se nasionale sentrum vir Onderwysstatistiek aanbeveel dat die kognitiewe domeine wat in TIMMS 2003 gebruik is, gevalueer en verbeter moet word. Die *National Research Coordinators (NRC's)* en die *Science and Mathematics Item Review Committee (SMIRC)* se kundiges het die kognitiewe domeine in wiskunde en wetenskap gewysig sodat 'n klassifikasie ontwikkel kon word wat die belangrike kognitiewe domeine omvat (Mullis et al., 2007; Conzales et al., 2008). Hierdie wysigings is hersien deur die TIMMS 2007

NRC's in ooreenstemming met die opdatering van die inhoudsdomeine (Mullis et al., 2007).

Die kognitiewe vlakke wat in wiskunde ontwikkel is, is gemeet deur gebruik te maak van die *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) 2007-assesseringsraamwerk. Die assesseringsraamwerk vir die kognitiewe en inhoudsdomeine vir die TIMSS 2007 is ontwikkel oor 'n tydperk van 2 jaar, vanaf Januarie 2005 tot November 2006 (Mullis et al., 2007).

Tydens die ontwikkeling van die TIMSS 2007-assesseringsraamwerk is wiskunde in twee dimensies geplaas. Die eerste dimensie is die inhoudsdomein wat die onderwerp spesifiseer en die inhoud assessee. Die tweede dimensie is die kognitiewe domein wat die denkprosesse spesifiseer wat die leerders moet gebruik om die bepaalde inhoude te bemeester. Die kognitiewe domeine omsluit 'n verskeidenheid van kognitiewe prosesse wat benodig word indien met wiskunde gewerk word en om probleme deurentyd op te los (Conzales et al., 2008).

Die drie kognitiewe vlakke vir wiskundige bevoegdheid, soos deur Mullis en Martin (2006) bepaal, en wat van toepassing is op die studie, is eerstens, *feitekennis, prosedures en konsepte* wat die leerders se behoeftes om te weet, omsluit. Die tweede vlak is die *toepassing* van kennis en konseptuele begrip wat fokus op die vermoë van die studente om hul kennis te gebruik om probleme op te los of antwoorde te gee. Die derde vlak, *redenering*, gaan verder as die oplossing van roetineprobleme, en behels onbekende situasies, komplekse inhoude en "meervoudige-stap"-probleme (Mullis & Martin, 2006).

Die drie kognitiewe vlakke word vervolgens in Tabel 2.3 uiteengesit (Mullis et al., 2007).

**Tabel 2.3: TIMSS se drie kognitiewe vlakke soos uiteengesit deur Mullis et al., (2007)**

Kennis	<i>Herroep</i>	Aflleidings, definisies, bekende aflleiding, terminologie, getaleienskappe, meetkundige eienskappe en notasies.
<b>Kennis</b>	<i>Herken</i>	Wiskundige objekte, vorms, getalle en uitdrukkings. Herken wiskundige entiteite wat wiskundig gelyk is.
	<i>Berekening</i>	Doen algebraïese prosedures met heelgetalle, breuke en desimale.
	<i>Herwin</i>	Verkry inligting vanaf grafieke, tabelle of ander bronne.
	<i>Meting</i>	Gebruik meetinstrumente korrek en voorspel metings.
	<i>Klassifiseer/groepeer</i>	Klassifiseer objekte, vorms, getalle en uitdrukkings volgens algemene eienskappe en orden getalle volgens eienskappe.
<b>Toepassing</b>	<i>Selekteer</i>	Kies 'n toepaslike/effektiewe strategie om probleme op te los, waar daar 'n bekende algoritme of metode (een bekende prosedure) is vir die oplossing.
	<i>Voorstel</i>	Vertoon wiskundige inligting en data in diagramme, tabelle en grafieke, en skep dieselfde voorstellings vir 'n gegewe wiskundige entiteit of verhouding.
	<i>Modelleer</i>	Genereer 'n toepaslike model, soos 'n vergelyking of diagram om die oplossing te vind vir 'n probleem.
	<i>Implementeer</i>	Volg en voer 'n stel wiskundige instruksies uit. Vanaf die gegewe instruksies, teken figure en vorms.
	<i>Los roetineprobleme op</i>	Maak 'n keuse na gelang van uitkoms van stappe, byvoorbeeld die gebruik van meetkundige eienskappe om probleme op te los. Vergelyk en pas verskillende voorstellings van data en gebruik data van tabelle, grafieke en kaarte om probleme op te los.
<b>Redenering</b>	<i>Analiseer</i>	Bepaal en beskryf of gebruik verbande tussen veranderlikes of objekte in wiskundige situasies. Maak waardevolle gevolgtrekkings vanaf gegewe data.

Kennis	<i>Herroep</i>	Aleidings, definisies, bekende afleiding, terminologie, getaleienskappe, meetkundige eienskappe en notasies.
	<p><b><i>Veralgemeen</i></b></p> <p><b><i>Integreer</i></b></p> <p><b><i>Evalueer</i></b></p> <p><b><i>Oplos van nie-roetineprobleme</i></b></p>	<p>Vergroot die domein waarvoor die resultaat van wiskundige denke en probleemoplossing toepaslik is deur herformulering van resultate in meer algemene en toepaslike terme.</p> <p>Kombineer verskillende wiskundige prosesse om resultate te bepaal en vervolgens resultate te kombineer om 'n verdere resultaat te skep. Maak verbande tussen verskillende elemente van kennis, verwante wiskundige idees en verwante voorstellings.</p> <p>Voorsien 'n regverdiging vir die waarheid of onwaarheid van 'n standpunt deur te verwys na wiskundige resultate of eienskappe.</p> <p>Los probleme op in wiskundige of lewenswerklike situasies, waar die leerder wiskundige prosedures moet gebruik in 'n onbekende of komplekse konteks. Gebruik meetkundige eienskappe om nie-roetineprobleme op te los.</p>

Die assesseringsraamwerk wat die TIMMS saamgestel het, is 'n bruikbare raamwerk vir die studie, aangesien die fokus van die TIMSS op kurrikulumgebaseerde take berus en daar van die eerstejaaringenieurstudente verwag word om probleme binne die voorgeskrewe kurrikulum op te los. Deur die assesseringsraamwerk van die TIMMS-studie te gebruik, kan bepaal word wat 'n student se vlak van wiskundige bevoegdheid en kognitiewe ontwikkeling is om daaruit vas stel wat die invloed van die bevindinge op die student se akademiese prestasie is (Conzales et al., 2008).

### 2.3.2 Programme for International Student Assessment (PISA)

Die *Programme for International Student Assessment (PISA)* is 'n wêreldwye evaluasie van 15-jarige skoolleerders se prestasies (Schagen & Hutchison, 2007). Die PISA-studie is die eerste keer in 2000 uitgevoer en daarna elke drie jaar herhaal (Fleischman, Hopstock, Pelczar & Shelley, 2010; Schagen & Hutchison, 2007). Die studie is gekoördineer deur die Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), met die doel om onderriguitkomstes te verbeter. Geletterdheid is die fokus van die evaluering van die PISA-

studie in drie bevoegdheidsvelde naamlik wiskunde, wetenskap en taal (lees) (Fleischman et al., 2010).

Die PISA-wiskundegeletterdheidstoetse noodsaak die leerders om hulle wiskundige kennis toe te pas om probleme op te los in 'n lewenswerklike konteks (Dohn, 2007). Om probleme op te los, moet leerders wiskundige bevoegdhede gebruik asook uitgebreide wiskundige kennis (Fleischman et al., 2010).

Wat wiskunde betref, assesseer PISA in hoe 'n mate leerders probleme kan analiseer, beredeneer en interpreteer in verskillende situasies (Fleischman et al., 2010). PISA voorsien ses bevoegdsheidsvlakke wat beskryf wat elke leerder behoort te kan doen op elke vlak en daarvolgens word die leerders se prestasies beoordeel (OECD, 2009). PISA se doel is om 'n antwoord te gee op die vraag “Wat is die kennis en vaardigheid van leerders?” In PISA 2009, word wiskundige geletterdheid soos volg gedefinieer: “An individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgments and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual’s life as a constructive, concerned and reflective citizen” (OECD, 2009, p. 84).

'n Beskrywing van die PISA se ses wiskundige geletterdheidsbevoegdheidsvlakke word vervolgens in Tabel 2.4 gegee.

**Tabel 2.4: PISA se ses wiskundige geletterdheidsbevoegdheidsvlakke (Fleischman et al., 2010)**

Geletterdheids-bevoegdheidsvlakke	Beskrywing
<b>Vlak 1</b>	<p>Leerdere kan vroe beantwoord met 'n bekende konteks waar alle relevante inligting beskikbaar is en die vroe duidelik gedefinieer is. Leerdere kan inligting identifiseer en roetine prosedures uitvoer. Leerdere kan aksies uitvoer wat ooglopend is en onmiddellik volg na 'n gegewe stimulus. Leerdere kan situasies in verskillende kontekste interpreteer en herken.</p>
<b>Vlak 2</b>	<p>Leerdere kan relatiewe inligting onttrek vanaf 'n enkele bron. Leerdere op dié vlak kan basiese algoritmes, formules en prosedures toepas. Leerdere het die vermoë om direk te redeneer en letterlik interpretasies oor die resultate te maak.</p>
<b>Vlak 3</b>	<p>Leerdere kan duidelik beskryfde prosedures uitvoer, asook dié wat opeenvolgende besluite noodsaak. Leerdere kan eenvoudige probleemstrategieë selekteer en toepas. Leerdere op die vlak kan interpreteer en voorstellings gebruik wat gebaseer is op verskillende inligtingsbronne. Leerdere kan hulle interpretasies en resultate kortliks kommunikeer.</p>
<b>Vlak 4</b>	<p>Leerdere kan effektief werk met modelle vir komplekse konkrete situasies wat beperkings kan bevat en afleidings benodig. Hulle kan verskillende voorstellings selekteer en integreer deur dit direk te verbind met lewenswerklike situasies. Goed ontwikkelde vaardighede en redenering kan gebruik word, met beperkte insig in die konteks. Leerdere kan hul interpretasies, aksies en argumente konstrueer en kommunikeer.</p>

Geletterdheids-bevoegdheidsvlakke	Beskrywing
<b>Vlak 5</b>	<p>Leerdere kan modelle vir komplekse situasies ontwikkel en gebruik, asook beperkings identifiseer en veralgemenings spesifiseer. Leerdere kan strategieë om probleme op te los selekteer, vergelyk en evalueer. Leerdere op dié vlak kan strategies werk deur goed ontwikkelde denken en redeneringsvaardighede te gebruik. Leerdere het die vermoë om te reflekteer op hulle aksies en hulle redenerings te formuleer en te kommunikeer.</p>
<b>Vlak 6</b>	<p>Leerdere kan konseptualiseer, veralgemenings maak en inligting aanwend, gebaseer op hul ondersoek en modellering van komplekse probleem-situasies. Leerdere kan verskillende inligtingstukke en voorstellings in verband bring met die geheelbeeld en vloeiend beweeg tussen die verskillende inligtingsbronne en voorstellings. Leerdere op dié vlak het die vermoë om te dink en te redeneer op 'n gevorderde wiskundige wyse. Nuwe benaderings en strategieë ontwikkel op dié vlak en leerdere kan hulle aksies en refleksies oor hulle bevindinge en interpretasies formuleer en presies kommunikeer.</p>

PISA bestudeer die vermoë en die sukses waartoe leerdere in staat is om vlak 6 van die wiskundige geletterdheidsbevoegdheid te bereik. Die bevoegdheid van die leerdere om wiskundige idees te analiseer, te beredeneer en te kommunikeer in verskeie probleem-situasies benodig verskeie kognitiewe vaardighede soos beskryf word in elke afsonderlike vlak (kyk Tabel 2.4). PISA beskryf die kognitiewe aktiwiteite wat voorkom in die wiskundige bevoegdheidsvlakke in terme van drie groepe: die reproduksiegroep, die konneksiegroep en die refleksiegroep.

Probleemoplossingsvaardighede vereis van leerdere om wiskundige prosesse, kennis en lewenservaring te kan gebruik. In PISA word na die fundamentele prosesse wat leerdere gebruik om probleme op te los, verwys as matematiesing (Fleischman et al., 2010). In ingenieurswese moet die studente oor die vermoë beskik om te kan matematiseer (Hsien Huang, 2010). Vervolgens word die matematiesingsproses verder beskryf en verduidelik.

Matematisering verklaar die probleem vanaf realiteit in wiskunde. Die proses bevat aktiwiteite soos (Fleischman et al., 2010):

- Identifiseer relevante wiskunde ten opsigte van 'n probleem in die werklikheid.
- Stel die probleem voor op 'n ander wyse deur die probleem te organiseer in terme van wiskundige konsepte en deur toepaslike afleidings te maak.
- Verstaan die verband tussen die taal van die probleem en die simboliese en formele taal wat nodig is om wiskundig te kan verstaan.
- Ondersoek verbande en patrone.
- Verklaar die probleem wiskundig.

Wanneer die leerder die probleem in 'n wiskundige vorm verklaar het, kan die matematiseringsproses voortgaan in wiskunde. Leerders vra vrae soos: “Is daar....?”, “Hoe baie?” en “Hoe vind ek....?”, deur gebruik te maak van wiskundige vaardighede en konsepte (Fleischman et al., 2010).

'n Individu wat matematisering suksesvol binne 'n verskeidenheid van situasies bemeester, moet beskik oor 'n verskeidenheid van wiskundige bevoegdhede, wat saamgevoeg word en wat in geheel gesien kan word as omvangryke wiskundige bevoegdheid (Fleischman et al., 2010). Elkeen van die bevoegdhede word ontwikkel deur verskillende vlakke van kognitiewe bemeestering. PISA beskryf wiskundige bevoegdheid deur die agt wiskundige bevoegdhede wat Niss en sy kollegas (2011) saamgestel het (OECD, 2009). Hierdie agt wiskundige bevoegdhede is reeds bespreek (kyk Tabel 2.1). Die verskillende bevoegdhede wat die leerders bemeester het word bepaal en gemeet volgens die ses wiskundige geletterdheidsbevoegdheidsvlakke (Fleischman et al., 2010).

Die doelwitte van die TIMSS en PISA is duidelik verskillend. TIMSS vra die vraag: watter wiskunde het die leerder geleer en hoe word die gebruik van wiskundige prosedures verstaan in verskillende situasies? terwyl die PISA die vraag vra, hoe kan jy die wiskunde gebruik wat jy geleer het? In PISA word gemeet of studente hulle wiskundige kennis kan toepas in nuwe situasies. In vergelyking met die lang reeds bestaande TIMSS-studies, is die PISA 'n relatiewe nuwe studie. Die primêre doel van die PISA-studie is om te bepaal

hoe uitgebreid 'n leerder se lees-, wiskunde- en wetenskapbevoegdheid is wat hulle gaan benodig in hulle volwasse lewe (Schagen & Hutchison, 2007). TIMMS se primêre doel is om die wiskundeprestasie van leerders op 'n betroubare en vergelykbare manier te meet en raamwerke op te stel om die wiskundige bevoegdhede te analiseer. Die verskille en ooreenkomstes tussen die TIMMS en die PISA word vervolgens uiteengesit in Tabel 2.5 (Schagen & Hutchison, 2007).

**Tabel 2.5: Sintese van TIMSS en PISA (Schagen & Hutchison, 2007)**

Eienskap	TIMSS	PISA
Hoofdoelwit	<ul style="list-style-type: none"> <li>- TIMMS ondersoek wiskunde en wetenskap op 'n vierjaar siklus.</li> <li>- Die doel van TIMSS se assessering is om onderrig en die leer van wiskunde te verbeter. Die assessering voorsien inligting omtrent die studente se prestasievlakke in vergelyking met dit wat die student geleer het op skool (Mullis et al, 2007).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- PISA ondersoek die inhoude en standaarde (lees, wiskunde of wetenskap) op 'n driejaar siklus.</li> <li>- Die doel van PISA is om die onderwysstelsel te assesseer. PISA vra die vraag "Is 15-jariges voorberei deur die onderwysstelsel om 'n konstruktiewe rol as burgers van die gemeenskap te speel?" (OECD, 2009).</li> </ul>
Fokuspunt	<ul style="list-style-type: none"> <li>- TIMMS se vrae is gefokus op feitekennis en die oplos van roetineprobleme, wat die bepaling en meting van die nodige kognitiewe vlakke vir die onderskeie probleme vergemaklik.</li> <li>- TIMSS se toetsitems is nie gebaseer op situasies buite die wiskundige wêreld nie, maar toets en meet kennis en vaardighede op kurrikulumonderwerpe.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- PISA se vrae fokus op die gebruik van konsepte en die skep van konneksies.</li> <li>- PISA assesseer studente se kapasiteit om probleme in die alledaagse lewe op te los.</li> </ul>

Eienskap	TIMSS	PISA
Versamel inligting	Versamel inligting oor leerders, onderwysers en skole.	Versamel inligting oor leerders en skole.
Ontledingstegnieke	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ondersteun sekondêre ontleding van data wat verband hou met agtergrondfaktore en bekwaamhede.</li> <li>- Vergelyk die resultate wat verkry is met 'n internasionale gemiddeld wat gedefinieer is in terme van die deelnemende lande.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ondersteun sekondêre ontleding van data wat verband hou met agtergrondfaktore en bekwaamhede.</li> <li>- Vergelyk die resultate wat verkry is met 'n internasionale gemiddeld wat gedefinieer is in terme van die deelnemende lande.</li> </ul>
Assesserings- raamwerke	Die TIMSS het twee assesseringsraamwerke opgestel om te bepaal wat nodig word om kurrikulumgebaseerde take te kan uitvoer in terme van vier wiskundige bevoegdheidsvlakke (laag, intermediêr, hoog en gevorderd) en drie kognitiewe vlakke (kennis, toepassing en redenering).	Die PISA het 'n uitgebreide assesseringsraamwerk opgestel waarbinne die leerders se wiskundige geletterdheidsbevoegdheidsvlakke bepaal kan word.
Wiskunde- raamwerk	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Die TIMSS-wiskunderaamwerk identifiseer twee dimensies: inhoudsdomein en kognitiewe domein</li> <li>- Fokus op die kognitiewe vaardighede wat nodig is om probleme op te los.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- PISA se wiskunderaamwerk identifiseer drie dimensies: situasie/konteks domein, inhoudsdomein en prosesse/kognitiewe domein.</li> <li>- Fokus op die kognitiewe vaardighede wat nodig is om probleme op te los.</li> </ul>

Die TIMSS en die PISA kan oor twee redes nie vergelyk word nie, eerstens aangesien die twee studies op verskillende ouderdomme gebaseer is en tweedens ondersoek die TIMSS wiskunde en wetenskap op 'n vierjaarsiklus, terwyl die vak (lees, wiskunde of wetenskap) geroteer word op 'n driejaarsbasis in die PISA-studie. Die duidelike kognitiewe assesseringsraamwerk wat deur die TIMSS-studie ontwikkel is, gaan gebruik word om die kognitiewe vlakke van die eerstejaaringenieurstudente te bepaal. Aangesien ingenieurs kurrikulumgeöïenteerde take en probleme (toepassing van kennis en vaardighede op kurrikulumonderwerpe) kry om op te los, is die TIMSS se raamwerk gepas om die ingenieurs se wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke te meet. TIMSS se raamwerk word dus gekies, omdat dit reeds beproefde duidelike kategorieë voorstel wat die oorvleueling van kognitiewe kategorisering uitskakel. Volgens Van Hiele (2002) is dit makliker en meer betroubaar om 'n raamwerk te gebruik wat minder ontledingsvlakke of kategorieë het. Die kognitiewe vermoëns wat ontwikkel word deur wiskunde is in drie vlakke gekategoriseer wat die ontleding van die betrokke vraestelle vergemaklik en betroubaarheid verhoog. Die gebruik van die TIMSS-raamwerk gee versekering dat suiwer wiskundige bevoegdheidsvlakke gemeet gaan word op 'n betroubare en vergelykbare manier.

## **2.4      TEORETIESE PERSPEKTIEWE OP DIE ONTWIKKELING VAN STUDENTE SE VLAK VAN KOGNITIEWE ONTWIKKELING**

Verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë en prosesse waardeur wiskundige bevoegdheid ontwikkel, is nagevors. Soos wat studente ontwikkel deur verskillende vlakke van kognitiewe ontwikkeling, benodig hulle meer gevorderde bevoegdhede om hul by te staan in die leer van wiskunde met begrip (Luk, 2005). Kennis van verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë begelei ons om insig te verkry oor hoe 'n individu deur spesifieke ontwikkelingsproesse van leer groei en vorder (Benade, 2012). Die Anderson-model van kognisie, die Van Hiele-teorie, Bloom se taksonomie, die SOLO-taksonomie en die APOS-teorie word vervolgens bespreek.

### 2.4.1 Anderson se ACT-model

Anderson (1983) noem sy teorie ACT wat staan vir *Adaptive Control of Thought*. Die teorie onderskei twee tipes kennis, nl. verklarende kennis en prosedurele kennis (Anderson, 1983). Verklarende kennis dui op “die weet dat” (‘What’) en stoor teorieë in skemas tesame met kennis oor die teorieë se funksie, vorm en voorvereistes. Prosedurele kennis dui op “die weet hoe” (‘How’) en die kennis word gestoor in die vorm van produksiesisteme of stelle voorwaardes: Leer vind plaas deur self te doen (Sternberg, 2006; Fourie, 2001, p. 11).

Die leerproses volgens die ACT-model soos opgesom deur Fourie, (2001):

- Kennis word aanvanklik gestoor as verklarende kennis;
- Die verklarende kennis word geïnterpreteer deur algemene prosedures;
- Die toepassing van verklarende kennis op nuwe situasies vind plaas d.m.v. ondersoek en vergelyking;
- Die versterking van verklarende en prosedurele kennis (Clements & Battista, 1992).

Dit gebeur dikwels dat daar geen konneksie tussen die prosedurele kennis en die konseptuele kennis plaasvind nie. Volgens Fourie (2001, p. 11) gebeur dit ”dat leerders wiskundige prosedures uitvoer sonder om regtig te weet wat hulle doen en waarom hulle dit doen”. Die belangrikheid van die model vir die doeltreffende ontwikkeling van die wiskundige bevoegdheidsvlakke lê in die ontwerp van ‘n gedetailleerde raamwerk wat die kognitiewe vlakke kan bepaal wat nodig is om koppeling tussen verklarende kennis en prosedurele kennis te voorsien (Sternberg, 2006; Fourie, 2001).

#### ***Toepaslikheid van ACT-model teorie***

Anderson se model bied ‘n oorkoepelende teorie aan oor die argitektuur van kognisie. Individuele kognitiewe prosesse soos geheue, taalbegrip, probleemoplossing en redenering is voorgestel as variasies op ‘n sentrale tema. Die bevinding van Anderson is insiggewend oor die proses van groei deur die verskillende stadiums van kognisie, assosiasie na outomatisasie. ‘n Resente weergawe van dié model staan bekend as ACT-R (R =

“Rational”) wat fokus op die integrering van verklarende kennis en prosedurele kennis (Sternberg & Sternberg, 2012).

### ***Tekortkominge van die ACT-model teorie***

Die studie fokus spesifiek op die ontwikkeling van verskillende kognitiewe vlakke en die ondersteuning wat die model bied in die ontwikkeling van kognitiewe vaardighede. Die ACT-model bied egter nie dieper insig oor die ontwikkeling van die verskillende kognisiestadiums nie.

### ***Voorbeeld van die toepassing van die ACT-model***

Wat is ‘n reguit lyn en wat beteken  $y = mx + c$ ? (m stel die helling voor en c die afsnit op die y-as )(Verklarende kennis).

Skets die volgende reguit lyne en ondersoek die betekenis van die veranderlikes in die vergelyking: (Toepassings van verklarende kennis).

$$y = 2x + 1; y = 2x - 1; y = -2x + 1; y = (1/2)x + 1$$

(Versterking van verklarende en prosedurele kennis, met ander woorde, outomatisering).

## **2.4.2 Van Hiele-Teorie**

Herkenning, herhaling en taal is die boustene van ‘n jong kind se denk- en beredeneringsontwikkeling (Van Hiele, 2002). In meetkunde neem hierdie ontwikkeling volgens Van Hiele (2002) ‘n aanvang met die vorming van visuele ruimtelike idees en argumente ten opsigte van figure en word dit gevolg deur ‘n hiërargie van “Van Hiele”-vlakke tot ‘n gesofistikeerde gevorderde vlak waar herkenning, herhaling en taal saamsmelt om ‘n volledige verskeidenheid van wiskundige bevoegdhede te vorm.

Die Van Hiele-teorie het ontstaan uit ‘n poging deur Van Hiele (1986) en sy vrou, D. van Hiele-Geldof, om ‘n teoretiese perspektief ten opsigte van die leer van meetkunde daar te stel (Fourie, 2001). Van Hiele (1986) beskryf vyf vlakke van meetkundige kognitiewe- of beredeneringsbevoegdheid, wat elk deur ‘n spesifieke vlak van staving van argumente en die gebruik van “tipiese” taal gekenmerk word. Die uitstaande kenmerk van die Van Hiele-teorie ten opsigte van meetkundige redenering is dat die verband tussen die vlakke van

redenering, 'n hiërargiese patroon van kognitiewe ontwikkeling deur leer vorm asook 'n sikliese patroon van vlakke van leer binne die redeneringsvlakke (Gutiérrez & Jaime, 1998). Die vlakke van redenering gee 'n beskrywing hoe leerders redeneer in Euklidiese meetkunde. Leerders se redeneringsvermoë ontwikkel hiërargies deur vyf vlakke van groeiende strukturele kompleksiteit.

- **Vlak 1: Visueel**

- Figure word herken en geklassifiseer op grond van hoe hulle lyk (visuele inligting), d.w.s. herkenning (staving) op grond van vorm. Die eienskappe van die spesifieke figuur speel nie 'n groot rol nie.
- Tipiese reaksie: “'n Vierkant lyk soos 'n dobbelsteen” (Fourie, 2001, p. 13).

- **Vlak 2: Analise**

- Leerders herken en klassifiseer figure op grond van hul eienskappe, wat nou nog as onafhanklik van mekaar gesien word, d.w.s. staving op grond van trekke.
- Tipiese reaksie: “'n Vierkant is 'n figuur met vier sye, al vier sye is ewe lank en al vier hoeke is  $90^\circ$ ” (Fourie, 2001, p. 13).

- **Vlak 3: Ordening**

- Die eienskappe van 'n figuur word nie meer gesien as onafhanklik van mekaar nie, maar verbande en ordening in die eienskappe van 'n figuur bestaan, d.w.s. staving op grond van verwantskap. Die leerder verstaan dat eienskappe mekaar opvolg of voorafgaan. Dus verstaan leerders verwantskappe tussen verskillende figure deur informele argumente. Logiese implikasies en gevolgtrekkings word verstaan en herken.
- Tipiese reaksie: “'n Vierkant is soos 'n reghoek, maar al sy sye is ewe lank” (Fourie, 2001, p. 13).

- **Vlak 4: Formele Deduksie**

- Die rol van die elemente van 'n aksiomatiese sisteem en van 'n deduktiewe sisteem word verstaan. Nodige en voldoende voorwaardes kan gebruik word.

Bewysvoering kan ontwikkel word, sonder dat die leerder nodig het om alles uit sy kop te leer om werklik te verstaan. Leerders kan op die stadium hul eie definisies saamstel.

- Wanneer 'n leerder gevra word om 'n figuur te beskryf, met die minste moontlike inligting, is 'n tipiese reaksie, byvoorbeeld: “'n vierkant is 'n reghoek met twee paar aangrensende sye gelyk” (Fourie, 2001, p. 13).

- **Vlak 5: Abstrahering**

Leerders kan verwantskappe tussen verskillende deduktiewe sisteme ondersoek. 'n Leerder moet oor die nodige kennis beskik, verstaan en inligting van enige meetkundige figure kan weergee. Die gebruik van die vlak val buite die veld van dit wat op hoërskool van leerders verwag word, maar is meer toepaslik op universiteitstudente (Aydin & Halat, 2009).

Alhoewel bogenoemde beskrywing van die vlakke inhoudspesifiek is, is die vlakke stadiums van kognitiewe ontwikkeling (Van Hiele, 1986, p. 53). Wanneer die leerder 'n sekere vlak van meetkundige denkontwikkeling bereik het, het die student eienaarskap van die leerstof asook insig in die leerstof (Aydin & Halat, 2009). 'n Hoër vlak bevat die kennis van enige laer vlak en bykomende kennis wat nie bepaald in die vorige vlakke teenwoordig is nie.

Die oorgang van een vlak van redenering na 'n volgende word bewerkstelling deur onderrig wat volgens 'n vyf-fase volgorde van aktiwiteite geskied. Die fases is: herwinning van inligting, gerigte oriëntasie, verklarings, vrye oriëntasie en integrasie. Hierdie fases lei na 'n hoër vlak van denke (Van Hiele, 2002; Benade, 2012).

Volgens Van Hiele (1986) word die visuele denkvlak gekenmerk deur globale herkenning van meetkundevorms, sonder inagneming van die dele waaruit die vorm bestaan (p. 62). Leerders sal byvoorbeeld vierkante en reghoeke herken, maar nie besef dat beide vorms regte hoeke het en dat teenoorstaande sye ewe lank is nie. Op die beskrywende vlak word eienskappe van figure eksperimenteel vasgelê deur waarneming, meting, teken en modellering. Leerders onderskei op die vlak tussen verskillende vorms as gevolg van die eienskappe wat waargeneem en ontdek is. Leerders op die informele deduktiewe vlak groepeer figure volgens eienskappe in families. So is 'n vierkant dan 'n parallelogram wat al die eienskappe van 'n ruit en 'n reghoek het. Leerders op die vlak kan redeneer en

informele argumente gee wat hulle groeperings of klassifikasies regverdig (Nieuwoudt, 2003).

Volgens Van Hiele (2002) kan 'n leerder wat op Vlak 3 funksioneer, 'n kort bewys volg volgens die eienskappe wat verkry is van ervarings, maar sal nie 'n bewys op sy eie kan konstrueer nie. Indien leerders tot op Vlak 4 en 5 ontwikkel het, sal hulle 'n formele bewys kan konstrueer en beskik oor die nodige redeneringsvermoë om 'n sukses te maak van modules wat gebaseer is op formele logiese redenering. Die bereiking van Vlak 4 stel die leerder in staat om vir 'n gegewe probleem, toepaslike wiskundige konsepte en vaardighede te ontwikkel en die resultaat wat verkry kan word deur die gebruik en toepassing van die konsepte en vaardigheid te voorspel. Die leerder is ook in staat om kennis oor die verskillende konsepte van ruimtelike denke te koördineer (Sharp & Zachary, 2004).

Van Hiele (1986) stel voor dat 'n eenvoudiger klassifikasie van die vlakke moontlik is: Hy het sy model in terme van drie eerder as vyf vlakke van meetkundige denkontwikkeling beskryf (Teppo, 1991). Hierdie vereenvoudigde weergawe van die oorspronklike uitgebreide model maak dit makliker om die leerder se redeneringsvermoë te bepaal (Fourie, 2001). Volgens Teppo (1991) bestaan die eenvoudiger weergawe van Van Hiele se model uit die visuele, beskrywende en teoretiese vlakke (p. 210). Die beskrywende vlak sluit die analise en informele deduksievlakke in (Benade, 2012). Op die beskrywende vlak moet studente vorms kan onderskei op grond van hulle eienskappe. Die teoretiese vlak sluit die formele deduksie- en abstraheringsvlakke in (Benade, 2012). Studente moet 'n formele bewys kan gee en logiese redenering kan toepas op die teoretiese vlak. Die drie vlakke word soos volg beskryf en in Tabel 2.6 uiteengesit.

**Tabel 2.6: Van Hiele se drie vlakke van meetkundige denkontwikkeling.**

Denkontwikkelingsvlakke	Beskrywing
Visueel	Globale erkenning van figure vind plaas.
Beskrywend	Leerders onderskei figure op grond van die onderskeie eienskappe van die figure.
Teoreties	Leerders kan 'n formele meetkundebewys uitvoer en verstaan die prosesse betrokke by formele bewysvoering.

Vir Van Hiele was die hoofdoel van onderrig die ontwikkeling van insig, wat beteken dat die persoon doeltreffend en met spesifieke intensies in 'n nuwe situasie kan optree (Van Hiele, 1986). Die vlakke soos hierbo beskryf (kyk Tabel 2.6) is stadiums van kognitiewe ontwikkeling wat 'n direkte invloed het op die bevoegdheid van die leerder om 'n sekere meetkundige probleem op te los (Fourie, 2001).

Die Van Hiele-teorie het ook kritiek ontlok. Die teorie is waardevol wanneer 'n meetkundige onderrigmodel saamgestel moet word of wanneer 'n leerder se begrip van meetkundige idees ondersoek word, maar daar ontstaan probleme wanneer vrae buite die grense van die eienskappe van figure, klassifikasie en deduksie beantwoord moet word (Fourie, 2001). Die simplistiese een-dimensionele aard van die Van Hiele-vlakke word bevraagteken en die moontlikheid bestaan dat die teorie nie daarin slaag om diversiteit wat daar in leerders se gedrag voorkom, te beskryf nie (Pegg, 1997).

Van Hiele (2002) se teorie oor die vlakke van ontwikkeling toegepas op meetkunde verskil van die kognitiewe ontwikkeling van rekenkunde en algebra. Daar is 'n duidelike onderskeid in die eienskappe van die redeneringsproses op elk van die Van Hiele-vlakke. Die redeneringsproses van herkenning, definiëring, klassifikasie en bewys is 'n goeie aanduiding van die vlak waarop die leerders kan redeneer. Die redeneringsproses wat Van Hiele uiteengesit het is baie eensydig en net op meetkunde gebaseer. Van Hiele se redeneringsproses van kognitiewe ontwikkeling word gekategoriseer deur Pegg en Tall (2005) as 'n globale raamwerk van individuele groei op die lang termyn.

Van Hiele ontken enersyds 'n verandering in vlakke tussen rekenkunde en algebra, maar erken andersyds 'n vlakverandering van die simbolisering van algebra en rekenkunde asook die aksiomatiese benadering tot wiskunde (Tall, 2004). Herkenning, kategorisering en herhaling is konstruktiewe prosesse wat geleer word deur rekenkunde, algebra en meetkunde. Die prosesse ontwikkel verder deur die gebruik van beskrywende taal, definiëring en herleiding van verhoudings, totdat daar op die hoogste vlak teoretiese taal as basis van 'n formele wiskundige teorie gebruik kan word (Tall, 2004). Van Hiele (2002) maak onderskeid tussen elementêre wiskunde (byvoorbeeld skoolmeetkunde en -algebra) en gevorderde wiskundige denke wat bestaan uit formele voorstellings van aksiomatiese teorieë.

In rekenkunde is die fokus op die simbolisering van telprosesse en getalkonsepte. Die eienskappe van rekenkunde, algebra, meetkunde en analise ("calculus") wat ontdek word in elementêre wiskunde, lei tot die gebruik van aksiomatiese definisies en bewysvoering (Tall, 2004, 2006).

Die Van Hiele-teorie het die volgende eienskappe (Clements & Battista, 1992; Roux, 2004):

- Die vlakke volg hiërargies op mekaar en leerders vorder slegs van een vlak na 'n volgende (hoër) een as gevolg van leer en onderrig. Onderwysers kan leerinhoud na 'n vorige vlak "verlaag", maar leerders kan nie vlakke systap en nog steeds meetkundebegrippe verstaan nie;
- Leer is nie kontinu nie, vandaar die bestaan van diskrete denkvlakke. Volgens Van Hiele (1986) is dit die rede waarom leerders leerstof memoriseer sonder begrip. Wanneer onderrig op 'n hoër vlak plaasvind of wanneer daar van leerders verwag word om op 'n hoër denkvlak te werk sonder dat die leerders ontwikkel het tot op daardie vlak sal dit nie suksesvol wees nie en sal die leerders die leerstof memoriseer sonder begrip (Fourie, 2001).
- Konsepte wat op een vlak onbewustelik verstaan word, word op 'n volgende vlak bewustelik verstaan (Teppo, 1991). Die eienskap ontwikkel die leerders se begrip en toepassingsvaardighede.

- Elke vlak het sy eie taal, simbole en stelsel waarin simbole met mekaar in verband gebring word. Taalstruktuur is 'n belangrike faktor in die beweging deur hierdie vlakke.
- Die Van Hiele-vlakke is 'n reglynige model wat nie verskeie dimensies het nie. Die model moet beskou word as 'n ideale of gemiddelde pad waarlangs kognitiewe groei in meetkundige konsepte vorder (Fourie, 2001, p. 16 & Nieuwoudt, 2003).

### ***Toepaslikheid van die Van Hiele-model in die studie***

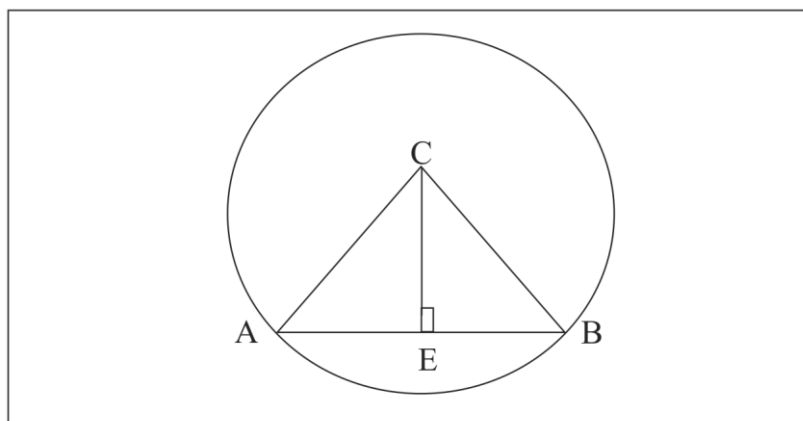
Van Hiele se teorie is toepaslik en beperk tot meetkunde, maar gee die grondslag vir verdere ontwikkeling van globale kognitiewe raamwerke waarvolgens wiskundige bevoegdheede gemeet kan word (Pegg & Tall, 2005). Die diskontinue eienskap van die leerproses soos verduidelik deur Van Hiele se teorie gee insig in die soeke na 'n rede hoekom studente op universiteitsvlak swak doen in vroeë wiskundige toets.

### ***Tekortkominge van die Van Hiele-model***

Die teorie is nie geskik vir die fyn ontleding van leerders se begrip van algemene wiskundige konsepte nie, maar bied slegs 'n beginpunt vir die ontleding van leerders se meetkundige denke.

### ***Voorbeeld van die toepassing van die Van Hiele-model***

C is die middelpunt van die sirkel soos voorgestel deur Figuur 2.4



**Figuur 2.4: Sirkelfiguur om die toepassings van die Van Hiele-model te illustreer.**

Verduidelik waarom is:

a)  $AC = CB$

Antwoord: Vlak 1: Dit lyk so.

Vlak 2: AC en CB is radiusse van die sirkel aangesien C die middelpunt van die sirkel is.

b)  $\angle CAB = \angle CBA$

Antwoord: Vlak 1: Dit lyk so.

Vlak 2: Uit die definisie van 'n gelykbenige driehoek is die hoeke teenoor die gelyke bene ewe groot.

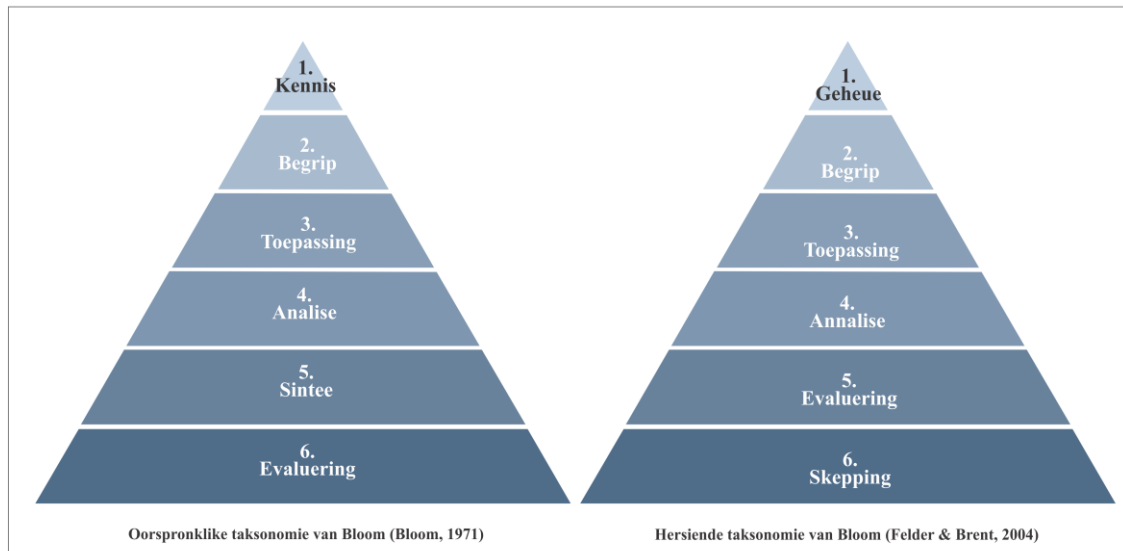
c)  $\triangle CAE \cong \triangle CBE$

Antwoord: Vlak 3: 'n Formele meetkundige bewys word uitgevoer deur die voorwaardes van kongruensie toe te pas.

### 2.4.3 Bloom se Taksonomie

In 1956, het 'n groep kognitiewe psigoloë onder leiding van Benjamin Bloom 'n klassifikasie van intellektuele vlakke wat belangrik is vir leer, ontwikkel (Bloom, Hastings, & Madaus, 1971). Gedurende die 1990's het 'n nuwe groep van kognitiewe psigoloë onder die leiding van Lorin Anderson ('n student van Bloom), die taksonomie hersien en dit meer gebruiklik en relevant gemaak vir die 21ste eeu (Felder & Brent, 2004). Die hersiene taksonomie het twee dimensies, die kennisdomein en die kognitiewe prosessedomein (Näsström & Henrikson, 2008). Die kategorie van die kennisdomein is feitekennis, konseptuele kennis, prosedurekennis en metakognitiewe kennis. Die kognitiewe prosedurele domein fokus op hoe die kennis gebruik word. Die kategorieë van die kognitiewe prosessedomein is geheue, begrip, toepassing, analisering, evaluering en skepping. Die onderliggende kontinuum in die kognitiewe prosedurele domein varieer van min kognitiewe kompleksiteit, naamlik geheue na die mees kognitiewe kompleksiteit (Näsström & Henrikson, 2008). Die kognitiewe prosedurele domein sluit herkenning van spesifieke feite, prosedurele patrone en konsepte in, wat dien as die ontwikkeling van vaardighede en vermoëns (Bloom, 1971; Felder & Brent, 2004).

Ses oorhoofse kategorieë van die kognitiewe prosedurele domein word hieronder gelys. Die kategorieë kan beskou word as verskillende moeilikheidsgrade wat bemeester moet word voordat die volgende kategorie kumulatief bemeester kan word (Felder & Brent, 2004). Die twee voorstellings in Figuur 2.5 dui die oorspronklike en hersiene taksonomie aan.



**Figuur 2.5: Die hersiene en oorspronklike taksonomie van Bloom**

Die kognitiewe vlakke van die hersiene taksonomie is in Tabel 2.7 beskryf deur beskrywende sleutelwoorde.

**Tabel 2.7: Kognitiewe vlakke in die hersiene taksonomie van Bloom soos uiteengesit deur Felder & Brent (2004)**

KATEGORIE	SLEUTELWOORDE
<p><b>Geheue:</b> Kan die leerder toepaslike data herroep?</p> <p><b>Begrip:</b> Verstaan die leerder die betekenis? Kan die leerder die instruksies en probleme vertaal en interpreteer? Kan 'n probleem in eie woorde verduidelik word?</p>	<p>Definieer, beskryf, identifiseer, kennis dra, herken, benoem.</p> <p>Begryp, omskryf, verduidelik, voorspel, brei uit, veralgemeen.</p>

KATEGORIE	SLEUTELWOORDE
<p><b>Toepassing:</b> Kan 'n leerder 'n konsep in 'n nuwe situasie gebruik? Kan dit wat geleer is toegepas word in 'n werkspleksituasie wat nageboots is?</p>	<p>Toepas, bereken, konstrueer, ontdek, manipuleer, oplos, verbeter.</p>
<p><b>Analise:</b> Deel materiaal of konsepte op in komponente sodat die struktuur verstaan kan word. Onderskei tussen feite en gevolgtrekkings.</p>	<p>Analiseer, opbreek, vergelyk, kontrasteer, voorstel, verdeel.</p>
<p><b>Evaluering:</b> Kan 'n leerder sy besluit en redenering regverdig? Kan 'n leerder oordeel oor die waarde van die idees?</p>	<p>Vergelyk, aflei, gevolgtrekking maak, verdedig, beskryf, evalueer, interpreteer, verhaal, opsom, ondersteun.</p>
<p><b>Skepping:</b> Kan 'n leerder 'n struktuur of patroon bou vanaf diverse elemente en verskillende dele saamvoeg om 'n geheel te vorm, met die beklemtoning om 'n nuwe betekenis of struktuur te vorm?</p>	<p>Kategoriseer, verbind, ontwerp, verduidelik, skep, organiseer, herorganiseer, hersien.</p>

Vlakke 4-6 is bekend as die hoër denkvaardigheidsvlakke (Shorser, 2005). In die praktyk is dit nodig dat ingenieurs die hoër denkvaardigheidsvlakke reeds bemeester het (Hsien Huang, 2010). Die enigste manier om hierdie vlak aan te leer is deur oefening en terugvoering (Felder & Brent, 2004). Indien op vlak 3 onderrig word, is dit onregverdig om van studente in eksamens te verwag om op vlakke 4, 5 en 6 probleme op te los. Die beste manier om die proses van ontwikkeling in hoër vaardigheidsvlakke te fasiliteer, is om hoëvlak opdragte te gee. Die uitvoering van die take moet begelei word deur die dosent of onderwyser, illustrasies en oefeninge moet in die klas gegee word en dan kan die hoëvlak vrae in die eksamens gevra word (Felder & Brent, 2004).

Volgens Felder en Brent (2004) sal gegradueerde ingenieurs kan modelleer, ontwerp en krities en kreatief kan dink op 'n baie hoë vlak indien hulle die regte manier van onderrig ontvang het. Onderrig moet daarop klem lê om vlak 4, 5 en 6 van Bloom se taksonomie te oefen tydens klastyd, en nie net met eksamen vrae nie.

Bloom se klassifikasies kan gebruik word as 'n sinvolle fondasie vir leerontwikkeling aangesien dit lae en hoë vlakke insluit as kriteria vir prestasie (Hsien Huang, 2010). Volgens Pegg en Tall (2005) is Bloom se taksonomie 'n globale raamwerk van individuele groei oor die lang termyn. Volgens Näsström en Henrikson (2008) is Bloom se taksonomie bruikbaar vir riglynstudies. Riglynstudies is wanneer gefokus word op die verband tussen standarde en assessering, deur korrelasies te trek tussen die inhoude en kognitiewe vaardighede. Bloom se taksonomie is gebruik om op voort te bou deur verskeie teorieë en raamwerke soos byvoorbeeld die TIMSS, PISA, SOLO-taksonomie en Tall se drie wiskundewêreldes (Fleischman, 2010; Schagen & Hutchison, 2007; Pegg & Tall, 2005).

Die kognitiewe vaardighede van die TIMSS 2005 stem ooreen met die kognitiewe vaardighede van Bloom se hersiene taksonomie (Wu, 2010). Tabel 2.8 stel die ooreenstemmings duidelik voor.

**Tabel 2.8: Kognitiewe vlakke van Bloom se hersiene taksonomie vs. Kognitiewe vlakke van TIMSS 2005**

Kognitiewe vlakke van Bloom se hersiene taksonomie	Kognitiewe vlakke van TIMSS 2005
Geheue	Kennis (definieer, beskryf)
Begrip	Vergelyk/ Kontrasteer/ Klassifiseer
Toepassing	Toepassing
Analise	
Evaluering	Analiseer/ Oplos van probleme
Skepping	

***Toepaslikheid van Bloom se taksonomie in die studie***

Die TIMSS se kognitiewe raamwerk wat gebruik is in die studie om die kognitiewe vlakke van die eerstejaaringenieurstudente te meet, stem in 'n mate ooreen met Bloom se taksonomie. Bloom se klassifikasie is 'n sinvolle fondasie vir leerontwikkeling aangesien dit lae en hoë vlakke insluit as kriteria vir prestasie.

### ***Tekortkominge van Bloom se taksonomie***

Bloom se taksonomie was ontwikkel voordat die kognitiewe prosesse wat betrokke is by leer en prestasie verstaan is. Navorsing oor leer ondersteun slegs die onderskeiding wat Bloom gemaak het tussen konseptuele kennis en prosedurele kennis maar nie die kategorieë of vlakke van Bloom se taksonomie nie (Sugrue, 2002). Die onderskeiding in Bloom se taksonomie toon moeilike praktiese verskille aan, in diagnosering en hantering van leer en prestasiegapings. Die vlakke bo Toepassing word gewoonlik hanteer as hoërde denke en reduceer dan die taksonomie na drie vlakke (Tall, 2010).

### ***Voorbeeld van die toepassing van Bloom se taksonomie***

Gegee  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  Beantwoord die volgende vrae wat betrekking het op die gegewe funksie.

- a) Hoe word die draaipunt van 'n grafiek bepaal? (Geheue)
- b) Voorsien 'n definisie in jou eie woorde wat 'n raaklyn aan 'n grafiek is. (Begrip)
- c) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by die punte waar  $x = 1$ . (Toepassing)
- d) Indien die  $f(x)$  so geskuif word dat sy lokale maksimum op die oorsprong lê, wat is die vergelyking van die nuwe grafiek? (Analise)
- e) Watter afdeling kan gemaak word ten opsigte van die draaipunte van  $f(x)$  en die vergelyking wat gevorm word vanuit die afgeleide/ gedifferensieerde funksie? (Evaluering)
- f) Hoe gaan jy te werk indien die gedifferensieerde funksie gegee is en die derdegraadse funksie geskets moet word? (Skepping)

#### **2.4.4 Die SOLO-taksonomie**

Die SOLO-taksonomie (*Structure of Observed Learning Outcomes*) is gerig op die onderrig van universiteitstudente ten opsigte van bepaalde leeruitkomstes, soos uitgevoer deur Biggs en Collis in die vroeë 1980's. Hierdie taksonomie onderskei vyf verskillende vlakke in ooreenstemming met die kognitiewe vaardighede wat benodig word deur studente vir 'n suksesvolle toetreding tot tersiêre studie. SOLO beskryf 'n hiërargie waar elke

deel of vlak 'n basis vorm vir verdere leer (Biggs, 2003). Die SOLO-taksonomie kan gebruik word om voorgenome leeruitkomstes te definieer binne die implementering van konstruktiewe riglyne (Brabrand & Dahl, 2007).

Die SOLO-taksonomie kan gebruik word om 'n student se reaksies byvoorbeeld benadering, redenering en oplossingsvaardighede vir 'n taak te evalueer (Chan, Tsui, Chan, & Hong, 2002). Die SOLO-taksonomie assesser die studente se bevoegdheid om probleme op te los: 'n vorm van kritiese denke wat waarde het in byvoorbeeld bestuursposisies, ingenieurswese en programmering van stelsels. Assesseringskriteria gebaseer op die SOLO-taksonomie maak identifikasie en terugvoering van die sterk- en swakpunte in studente se ontwikkeling moontlik (Green, Hammer & Star, 2009). Dus kan die SOLO-taksonomie gebruik word om leerders se respons in terme van twee aspekte te interpreteer. Die eerste beskryf die *tipe* denke teenwoordig in die respons en word opgedeel in vyf modusse (SOLO-modusse) (Fourie, 2001). Die tweede beskryf die *kwaliteit* van die respons in 'n spesifieke modus (SOLO-siklus) (Fourie, 2001; Chan et al., 2002).

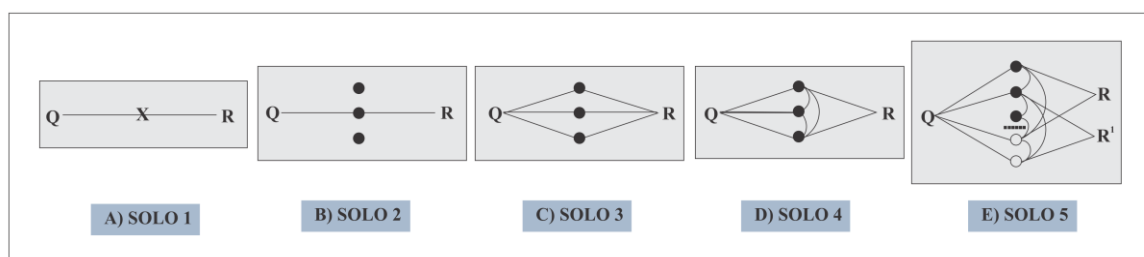
Collis en Biggs (1991) beskryf 'n modus as die vlak van abstrahering wat 'n leerder gebruik om die elemente van 'n leertaak te hanteer en 'n teikenmodus word beskryf as die vlak van abstrahering wat toepaslik is vir 'n spesifieke probleemituasie (Fourie, 2001). Elke modus met al die bewerkings is teenwoordig in die volgende modus, wat veroorsaak dat die leerder 'n oneindigende vergrote repetorium van modusse ontwikkel (Dahl, 2009).

Die vyf modusse soos opgesom deur Fourie (2001, p. 21) is die volgende:

- Sensomotoriese modus (vanaf geboorte) kan beskryf word as operasionele kennis (die weet "hoe" om dit te doen) en hou verband met motoriese aktiwiteite (loop, hardloop ens.). Hierdie vaardigheid moet teenwoordig wees wanneer daar aan die student "hands-on"-aktiwiteite gegee word.
- Ikoniese modus (vanaf agtien maande) ontwikkel deur verbeelding en is die voorvereiste vir taalontwikkeling. Hierdie modus word gebruik deur wiskundiges gedurende probleemoplossing, waar hulle oplossings visualiseer en dan logiese en simboliese voorstellings gebruik om hierdie oplossings aan kollegas te kommunikeer.

- Konkreet-simboliese modus (vanaf sewe jaar) word geassosieer met die gebruik en manipulasie van geskrewe simbole en kan beskryf word as verklarende kennis. Daar bestaan logiese orde tussen die simbole.
- Formele modus (vanaf sestien jaar) word geassosieer met abstrakte konstruksies wat nie noodwendig verwys na iets in die werklike lewe nie. Kennis word omgesit in teorieë. Hierdie modus word gebruik wanneer 'n student 'n buitengewone talent en toewyding in 'n spesifieke akademiese vak toon.
- Postformele modus (vanaf 20 jaar) gebruik die teoretiese konstruksies van die vorige modus en brei daarop uit.

Die vyf vlakke kan voorgestel word deur Figuur 2.6 wat soos volg verduidelik word deur Biggs (2003) : Figuur 2.6 stel die elemente voor wat betrokke is indien 'n student op 'n spesifieke SOLO-vlak is. "R" stel 'n uitkoms of reaksie voor op 'n gegewe probleem of vraag "Q" deur die data wat gegee is te gebruik. Die simbool "X" stel irrelevante data voor; "●" stel bekende relevante data voor wat vir die studente gegee is. Die "○" stel hipotetiese of denkbeeldige verwante data voor wat nie aan die student gegee is nie.



**Figuur 2.6: Visualisering van die SOLO-vlakke 1 tot 5 (Biggs, 2003)**

Die vyf vlakke van die SOLO-taksonomie word vervolgens verduidelik:

### **SOLO 1: Die Pre-Strukturele Vlak**

Leerders verwerf gedeeltes van inligting waarvan hulle geen geheelbeeld vorm en dus geen insigte verkry nie (Biggs, 2003). Figuur 2.6 stel SOLO 1 voor deur 'n leerder wat 'n probleem of vraag "Q" kry en deur irrelevante data "X" 'n reaksie "R" gee (Biggs, 2003). Op hierdie vlak het 'n leerder geen begrip nie. Gefragmenteerde stukkies inligting word

verkry, maar die inligting is ongeorganiseerd en ongestruktureerd (Brabrand & Dahl, 2007).

### **SOLO 2: Die Uni-Strukturele Vlak**

Leerders maak eenvoudige en vanselfsprekende verbintenisse, sonder dat dit gedemonstreer word (Biggs & Collis, 1991; Chan et al., 2002). Soos in Figuur 2.6 voorgestel, kan die leerder nou een relevante bekende aspek of data-element “●” gebruik om ‘n waardevolle maar eenvoudige reaksie “R” te produseer (Biggs, 2003). Dus van vlak 1 na 2, is daar reeds vordering in die opsig dat die leerder relevante uitkomstes kan onderskei en met een ‘n verbintenis kan maak met die probleem “Q”. Op dié vlak is die leerder bevoeg om die korrekte terminologie te gebruik, eenvoudige instruksies uit te voer, te identifiseer en te benoem (Brabrand & Dahl, 2007)

### **SOLO 3: Die Multi-Strukturele Vlak**

Leerders maak ‘n aantal konneksies, maar die verband tussen die konneksies word nie gedemonstreer nie (Chan et al., 2002). Soos voorgestel deur Figuur 2.6 het die leerder die vermoë om met meer as een element te werk, maar die verskillende elemente word onafhanklik van mekaar gesien en nie in konneksie met mekaar nie (Biggs, 2003). Van vlak 2 tot 3 is daar ‘n kwantitatiewe verbetering soos wat die leerder meer bevoeg word om met meervuldige of relevante bekende uitkomstes te werk. Die leerder is bevoeg om op vlak 3 te kan opsom, beskryf, klassifiseer, kombineer, metodes toe te pas en prosedures uit te voer (Brabrand & Dahl, 2007).

### **SOLO 4: Die Relasionele/Verwantskapvlak**

Leerders demonstreer verhoudings tussen die konneksies en verhoudings met die geheel (Chan et al., 2002). Soos voorgestel deur Figuur 2.6 kan gesien word dat kwalitatiewe verbetering plaasvind wanneer die detail integreer om ‘n struktuur te vorm. Leerders vind nou verbande tussen verskillende aspekte en pas dit bymekaar om ‘n geheel te vorm en ‘n gestruktureerde reaksie “R” (Biggs, 2003). Leerders het nou die bevoegdheid om te vergelyk, te analiseer, stellings toe te pas en te verduidelik (Brabrand & Dahl, 2007).

## **SOLO 5: Die Uitgebreide Abstrakte Vlak**

Leerders maak konneksies tussen die verskillende vakafdelings. Leerders veralgemeen en dra die beginsels van 'n spesifieke situasie na 'n abstrakte formaat oor (Chan et al., 2002). Die leerder het nou die bevoegdheid om met hipotetiese inligting te werk wat nie gegee is nie “o”. Die leerder kan nou die kennisstrukture van verskillende perspektiewe gebruik om verskillende toepaslike reaksies “R” te produseer (Biggs, 2003). Op vlak 5 kan die leerder veralgemeen, hipoteses opstel, kritiseer en teoretiseer (Brabrand & Dahl, 2007).

Die Uni-strukturele – multi-strukturele – verwante leersiklus herhaal homself binne elke modus. Die middelste drie vlakke val binne die ontwikkeling van 'n spesifieke modus; 'n pre-strukturele respons dui daarop dat die leerder nie ten volle verstaan wat die leertaak van hom verwag nie, terwyl 'n uitgebreide abstrakte respons daarop dui dat die leerder bokant die respons funksioneer (Fourie, 2001; Chan et al., 2002).

### ***Toepaslikheid van die SOLO-taksonomie in die studie***

Die SOLO-taksonomie is 'n samevatting van die globale vlakke en die lokale vlakke van kognitiewe ontwikkeling. Soos reeds bespreek, is elke modus teenwoordig in die volgende modus, en dit het tot gevolg dat die leerder 'n deurlopende vergroting in repetorium van modusse van bewerkings ontwikkel, bekend as 'n globale raamwerk (Dahl, 2009). Die globale vlakke wat gevorm word deur die ontwikkeling na 'n volgende modus veroorsaak groei in die siklus van konseptuele konstruksie van aksie tot objek, bekend as 'n lokale raamwerk (kyk paragraaf 2.4.2). Die SOLO-taksonomie is belangrik in die studie ter verduideliking van die verskillende siklusse waarbinne kognitiewe ontwikkeling plaasvind (Pegg & Tall, 2005).

### ***Tekortkominge van die SOLO-taksonomie***

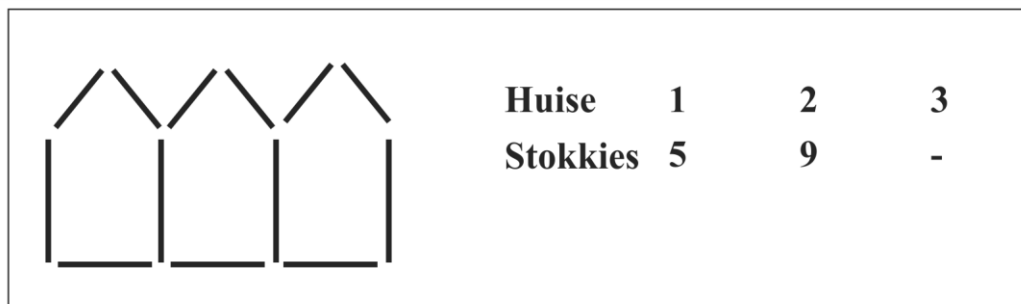
Daar kan geargumenteer word dat assessering van die bevoegdheids deur die SOLO-model nie 'n toepaslike meetinstrument vir wiskundige bevoegdheids is nie. Die SOLO-taksonomie is ontwikkel vanuit alle hoë-onderrig vakke en nie net uit wiskunde nie (Biggs, 2003). Wiskunde word gewoonlik beskou as 'n vertikale dissipline, met 'n hiërargie van stellings en metodes wat bou op die vorige kennis en vaardighede, terwyl sommige dissiplines horisontaal is, met stellings en metodes wat gekombineerd gebruik en ontwikkel

word (Brabrand & Dahl, 2007). Navorsing het getoon dat wiskundige bevoegdheede soos probleemoplossing, redenering, bewysvoering, kommunikasie, die trek van verbande en die maak van voorstellings, bevoegdheede binne die wiskundekonteks is wat die assessering van ontwikkeling binne 'n wiskundekonteks onderskei van ander vakke se ontwikkelingsvlakke (Brabrand & Dahl, 2007). Die ontwikkeling van wiskundige bevoegdheede kan dus nie aan dieselfde assesseringsraamwerk onderwerp word as ander hoër onderrigvakke nie.

***Voorbeeld van die toepassing van die SOLO-taksonomie***

Algebra: Getalpatrone

Gegee: Die probleem word voorgestel deur Figuur 2.7



**Figuur 2.7: Voorbeeld van 'n Getalpatronevraag deur die SOLO-taksonomie te gebruik.**

Vrae:

- Hoeveel stokkies is nodig vir 3 huise? (Uni-Strukturele Vlak – SOLO 2)
- Hoeveel stokkies is nodig vir 5 huise? (Multi-Strukturele Vlak – SOLO 3)
- As 52 huise 209 stokkies nodig het, hoeveel stokkies is nodig vir 53 huise? (Relasionele Vlak – SOLO 4)
- Gee 'n reël om die aantal stokkies te kan tel vir enige aantal huise wat nodig is. (Uitgebreide Abstrakte Vlak – SOLO 5)

## 2.4.5 Die APOS-teorie

Gebaseer op die teorie van kognitiewe konstruksie, ontwikkel deur Piaget vir jonger kinders, het Dubinsky die APOS-teorie beskryf (Tall, 1999). Die APOS-teorie begin met die veronderstelling dat 'n wiskundige probleem opgelos word deur die gebruik van kognitiewe konstruksie soos aksies, prosesse, objekte en die organisering van die objekte in skemas (Dubinsky & McDonald, 2001). Dit is 'n teorie wat beskryf hoe die leer van 'n wiskundekonsep kan plaasvind. Volgens hierdie teorie bestaan die leer van wiskunde uit die skep van sekere geheuekonstruksie in antwoord op wiskundeprobleemsituasies. Dubinsky en McDonald (2001) gebruik 'n metode van konstruksieveronderstelling in elementêre skoolwiskunde en brei dit uit na gevorderde universiteitswiskunde. Hier volg 'n uiteensetting van die essensiële komponente van die teorie soos beskryf deur Dubinsky en McDonald.

'n *Aksie* is 'n herhalende fisiese of kognitiewe manipulasie wat objekte transformeer. 'n Aksie is 'n eksterne essensiële stap-vir-stap instruksie wat verkry is vanaf die geheue om 'n bewerking uit te voer. Dus deur 'n aksie is dit moontlik om geoefende prosedures uit te voer, bestem vir 'n spesifieke voorstelling (Maharaj, 2010; Roux, 2009).

'n *Proses* is 'n interne kognitiewe konstruksie wat gemaak word, wanneer 'n aksie herhaal word en die individu daarop reflekteer. Die individu gebruik dieselfde tipe aksie, maar gebruik nie meer 'n eksterne stimulus nie. 'n Individu kan aan 'n proses dink, maar dit nie regtig uitvoer nie, wat dit moontlik maak om die proses om te keer en die proses waaraan gedink is saam met ander prosesse te integreer (Maharaj, 2010; Roux, 2009).

'n *Objek* kan 'n konsep, veranderlike, funksie of datastruktuur wees. 'n *Objek* kan ook gekonstrueer word vanaf 'n proses indien die individu bewus word van die totaliteit van die proses en besef dat transformasies daarop kan plaasvind (Maharaj, 2010).

Laastens word 'n *skema* gevorm vir 'n spesifieke wiskundige konsep, deur 'n individu se versameling van aksies, prosesse, objekte en ander skemas wat verbind is deur algemene beginsels. 'n Skema is 'n samehangende strukturering van kognitiewe objekte en interne prosesse wat objekte kan manipuleer. 'n Skema kan studente help om 'n gegewe probleemsituasie te verstaan, te hanteer, te organiseer en om sin daaruit te maak (Weyer, 2010; Maharaj, 2010).

Volgens Roux (2009) is die boustene van wiskunde onder andere getalle, veranderlikes en funksies, wat as objekte beskou kan word. Daar bestaan bepaalde verwantskappe tussen hierdie objekte wat deel vorm van groter strukture van objekte (p. 94). Prosesse is bewerkings wat op die objekte uitgevoer word en dus die objekte transformeer (Roux, 2009).

Volgens Weyer (2010) vorm die begrippe “proses” en “objek” ‘n verwante entiteit. Roux (2009) verduidelik dat namate die leerder vertrouwd raak met ‘n bepaalde proses, neem die proses die vorm van 'n reeks bewerkings aan wat met hoofrekenings uitgevoer kan word. Vervolgens verhelder die geheuebeeld van hierdie proses in ‘n enkele entiteit, ‘n nuwe objek bekend as objektivering. Objektivering is die belangrikste fase in leer en word deur Sfard (1995) beskryf as reïfikasie.

Brijlall en Maharaj (2008) gee voorbeelde van prosesse wat as operatore dien, naamlik: telling, berekeninge deur ‘n formule te gebruik (bv. gebruik die n-de term van ‘n reeks om opvolgende terme te skep) en differensiasie. Voorbeelde van objekte as die eindproduk, is getalle, algebraïese uitdrukkings (bv. die n-de term van ‘n reeks) en die eerste afgeleide van ‘n funksie (Brijlall & Maharaj, 2008).

### ***Toepaslikheid van die APOS-teorie in die studie***

Die APOS-teorie kan gebruik word om die probleme te verklaar wat ‘n student ervaar met ‘n wye verskeidenheid van wiskundige konsepte en om voorstelle te maak op welke wyse die student die konsepte kan leer (Dubinsky & McDonald, 2001; Brijlall & Maharaj, 2008). Die APOS-teorie het ‘n groot bydrae gelewer tot die verstaan van kognitiewe vaardighede wat nodig is in wiskunde. Onderrigstrategieë kan die gebruik van die APOS-teorie insluit, wat ‘n verbetering sal gee in die student se leermetodes van abstrakte of komplekse wiskundige konsepte (Weyer, 2010). Verbetering kan ook plaasvind in die studente se gebruik van konsepte om stellings te kan bewys, voorbeelde te gee en probleme op te los (Weyer, 2010).

Die APOS-teorie kan gebruik word om die idee te formuleer dat kognitiewe konsepte voorafgegaan moet word deur kognitiewe bewerkings (Roux, 2009). Op ‘n manier is die APOS-teorie ‘n “teorie van alles” (Tall, 1999). Die feit dat die leerder ‘n wye versameling

van beliggaamde konstrunkte benodig om te reflekteer en te herkonstrueer, val die klem op patrone wat alleen gebou is op die aksie-proses-objek-skema.

### ***Tekortkominge van die APOS-teorie***

Die verskillende denke wat nodig is in die professionele wiskundeberoep het 'n uitdrukking nodig wat meer omvattend is as dit wat gemeet word deur die aksie-proses-objek-skema ontwikkeling (Weyer, 2010; Tall, 1999). As 'n voorbeeld van die stelling het Tall differensiasie ontleed deur te begin met 'n beliggaamde visuele ruimtelike begrip van "lokale reglynigheid" wat dan verken word parallel met simboliese bewerkings van differensiasie.

Tall (1999) gebruik die feit dat 'n metode van konstruksieveronderstelling in elementêre skoolwiskunde gebruik word en uitgebrei word na gevorderde universiteitswiskunde, om voor te stel dat die APOS-teorie se bruikbaarheid en betekenis in die ontwerp van voorgraadse wiskundekurrikulums lê. Tall (2004) bevraagteken die APOS-teorie se universele toepaslikheid. Dubinsky en McDonald (2001) fokus op 'n simboliese benadering deur prosedures te programmeer as 'n funksie en dan die funksie te gebruik as die inset vir 'n ander funksie, wat dan probleme veroorsaak indien leerders 'n proses wil enkapsuleer na 'n objek. Navorsing deur Tall (2004) toon dat wanneer 'n kurrikulum op simbolisering fokus en nie op die verwante beliggaming nie, die leerder se visie beperk sal wees. Leerders met die beperkte visie het geleer om 'n prosedure uit te voer en selfs om die prosedure te sien in die geheelbeeld, maar slaag nie daarin om 'n objek te konstrueer van 'n proses nie. Daar is 'n betekenisvolle parallel tussen die simboliese kompressie van die APOS-teorie en die beliggaamde wêreld van Tall wat in 2.5 bespreek gaan word. Die fokus verskuif vanaf die stappe wat gevolg moet word tydens 'n aksie na die effek van die aksie en dan om die effek voor te stel as 'n beliggaamde denkbare konsep. Hierdie kombinasie van beliggaming en simbolisering kan 'n beliggaamde betekenis gee aan 'n objek (Tall, 2008).

### ***Voorbeeld van die toepassing van die APOS-teorie (Maharaj, 2010, p. 43)***

'n Funksie van 'n limiet is gegee:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

‘n Student met ‘n aksie-kognitiewe konstruksie van ‘n limietfunksie kan slegs waardes van  $x$  vervang met waardes wat a nader in die uitdrukking  $f(x)$  en dit manipuleer.

‘n Student met ‘n proses-kognitiewe konstruksie van ‘n limietfunksie kan aan ‘n proses dink om  $x$  te vervang in terme van moontlike substitusiewaardes en transformasies van substitusiewaardes om ‘n uitset te produseer.

‘n Student met ‘n objek-kognitiewe konstruksie kan verskeie aksies en prosesse gebruik. Dit behels die vorming van ‘n nuwe funksie vanuit ‘n integrering van twee gegewe funksies, soos  $\lim_{v \rightarrow 4} \frac{4-v}{|4-v|}$  of  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$ . Die student moet bewys wees van die totaliteit van die proses en die transformasies kan toepas, sodat die proses verander kan word in ‘n objek.

‘n Student met ‘n skema-kognitiewe konstruksie verstaan dat om die bestaan van ‘n limiet van ‘n funksie te bepaal, die volgende oorweeg moet word: die insetwaardes vanaf die linker en regterkant van die  $x$  veranderlike en die ooreenstemmende uitsetwaardes.

## **2.5 TALL SE DRIE WÊRELDE VAN WISKUNDE**

### **2.5.1 Die Ontwikkeling van die Drie Wêrelde van Wiskunde**

Skoolwiskunde word beskou as ‘n kombinasie van visuele voorstellings insluitend meetkunde en grafieke asook simboliese berekeninge en manipulasies. Suiwer wiskunde op Universiteit verskuif na formele raamwerke van aksiomatiese sisteme en wiskundige bewyse. Die verandering in denkvlakke word geformuleer in ‘n raamwerk van ‘drie wêrelde van wiskunde’ deur David Tall (2004). Al drie wêrelde het hul eie patroon van ontwikkeling en hul eie vorm van bewysvoering wat vermeng kan word om ‘n ryker verskeidenheid van wiskundige denke te ontwikkel. Dit beteken dat wiskundige denke as ‘n integrasie van verskillende tipes kennisstrukture gesien kan word (Tall & Mejia-Ramos, 2006).

Daar is drie fundamentele menslike faktore wat geneties bepalend is vir die ontwikkeling van wiskundige denke.

Die drie veranderlikes volgens Tall, (2008) is:

- *Herkenning* van patrone, ooreenkomste en verskille;
- *Herhaling* van reekse van aksies totdat dit outomaties is;
- *Taal* om te kan beskryf en om die manier hoe ons dink, te verhelder.

Persoonlike ontwikkeling bou op vorige ervarings en belewenisse. Vorige ervarings maak konneksies in die brein wat 'n invloed het oor hoe 'n nuwe situasie geïnterpreteer word. Die brein is dinamies en herorganiseer deurlopend inligting om bestaande skemas te wysig. Dit is nie bloot 'n herhaling van vorige ervarings en die voortbou op ou ervarings nie, maar vorige ervarings word nuut geformuleer op verskeie maniere. Met die verloop van tyd veroorsaak die nuut-geformuleerde ervarings 'n verandering in die manier waarop gedink word (Tall, 2008).

Die ontwikkeling van die individu as 'n jong kind tot 'n gesofistikeerde volwassene bou op die drie fundamentele reeds beleefde ervarings naamlik herkenning, herhaling en taal wat drie onderling verbonde reekse van ontwikkeling konstrueer en wat saam geïntegreer word om uitgebreide aaneengeskakelde wiskundige denke te bou (Tall, 2004, 2006). Die verskillende maniere van denke wat groei in gesofistikeerdheid word benoem deur Tall (2004) as die 'drie wêrelde van wiskunde'. Die drie wêrelde van wiskunde bestaan uit drie tipes wiskundige konsepte, naamlik liggaamlike, simbolies en aksiomaties, en elkeen het 'n individuele styl van kognitiewe ontwikkeling en taalgebruik. Gesamentlik dek die drie wiskundewêrelde 'n wye verskeidenheid van wiskundige aktiwiteite (Watson, Spirou & Tall, 2003).

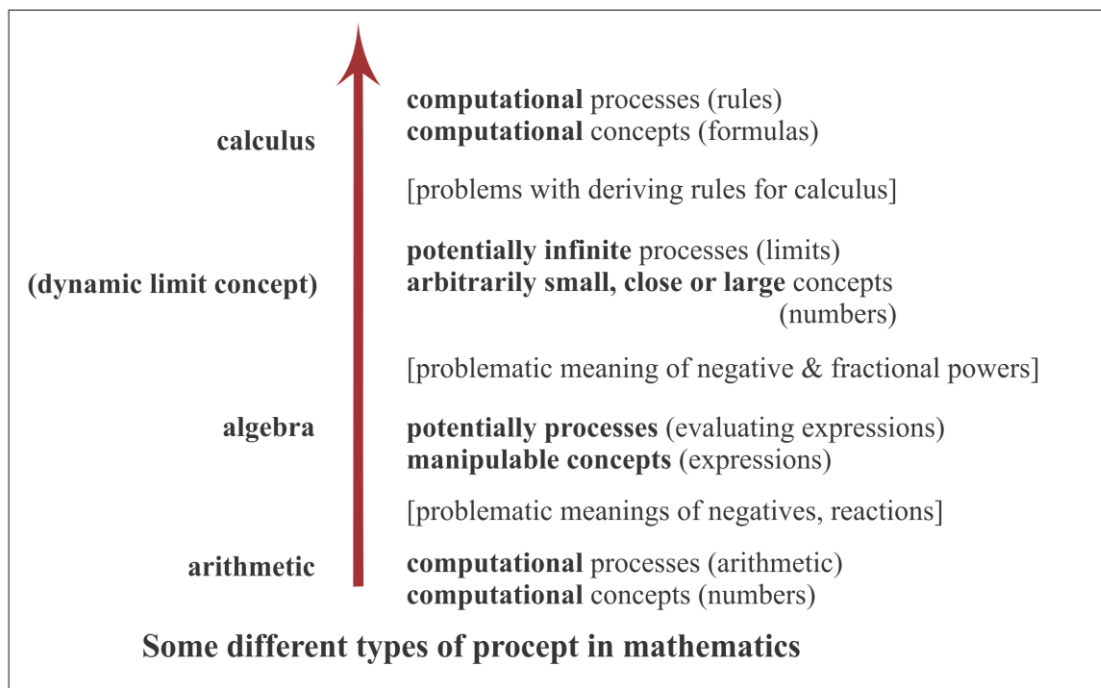
Die eerste wêreld staan bekend as die 'konseptuele-beliggaamde wêreld' of kortliks die *beliggaamde wêreld*. Dié wêreld ontwikkel vanuit persepsies van die omgewing en bestaan uit denke oor ervarings en stimuli vanaf ons eie verstandelike wêreld van betekenis, deur gebruik te maak van refleksie (individu leer uit ervarings) en gesofistikeerde taal. Die eerste wêreld ontwikkel konstant meer gesofistikeerd soos wat die individu ouer word, soos beskryf deur Van Hiele (1986). Die beliggaamde wêreld ontwikkel vanuit persepsies van objekte, beskrywings, konstruksies en definisies wat lei tot herleiding en byvoorbeeld

Euklidiese meetkunde. Ander beliggaamde meetkunde volg, soos projektiewe meetkunde, sirkelmeetkunde en nie-Euklidiese meetkunde.

Die beliggaamde wêreld begin met wat waargeneem word. Gevolgtrekkings en afleidings word gemaak deur eksperimente uit te voer en te kyk of die verwagte resultate verkry word. Ontwikkeling vind plaas wanneer die waarheid geregverdig word deur verbale Euklidiese bewyse.

Die tweede wêreld staan bekend as die 'proseptuele-simboliese wêreld' of kortliks die *proseptuele wêreld*. Hierdie is die wiskundewêreld waar simbole gebruik word om berekeninge en manipulasies in rekenkunde, algebra en differensiaalrekenkunde uit te voer. Die proseptuele wêreld begin met aksies (bv. optel) wat dan konsepte vorm waarvoor gedink moet word (bv. getal). Tall (2004) verduidelik dat simbole soos  $3 + 2$  in rekenkunde 'n dubbele konneksie het, met 'n proses (optel) en 'n konsep (som). Die kombinasie van simbool, proses en konsep wat gekonstrueer is vanaf 'n proses word 'n *prosep* genoem. Figuur 2.8 stel die verskillende prosepte voor wat in wiskunde voorkom. Die fokus op die eienskappe van die simbole en die onderlinge verbande beweeg weg van die fisiese betekenis na 'n simboliese aktiwiteit in rekenkunde. Tydens ontwikkeling in die proseptuele wêreld word op algemene rekenkunde en algebra gefokus. Dit behels die manipulasie van simbole om vergelykings op te los na meer algemene konsepte in simboliese differensiaalrekenkunde. In rekenkunde is 'n stellingvergelyking waar as dit bereken kan word, byvoorbeeld die toepaslike simboliese manipulasie in algebra:

$$(a - b)(a + b) = (a - b)a + (a - b)b = a^2 - ba + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$



**Figuur 2.8: Verskillende tipe prosepte wat in wiskunde voorkom word soos voorgestel deur Tall (2008).**

Die derde wêreld staan bekend as die ‘aksiomatiese-formele wêreld’ of kortliks die *formele wêreld*. Die derde wêreld is gebaseer op eienskappe wat uitgedruk word as formele definisies wat gebruik word as aksiomas om wiskundige strukture te spesifiseer. Ander eienskappe word afgelei deur formele bewysvoering om ‘n reeks stellings op te bou (Tall, 2004). Wanneer studente se kognitiewe ontwikkeling dié stadium bereik het, kan hulle stelsels omsit in aksiomas en eienskappe aflei deur gebruik te maak van teoretiese bewysvoering (Tall, 2008).

Aksiomatiese formalisme verskil van die elementêre wiskunde van die beliggamde en simboliese wêreld in dié opsig dat die definisies ontwikkel word vanuit ervaring met objekte waarvan die eienskappe beskryf is en gebruik word as definisies (Tall, 2008). Formele wiskunde begin met ‘n stel teoretiese definisies en eienskappe wat afgelei word deur gebruik te maak van formele bewysvoering (Hilbert, 1901).

Skoolwiskunde bou vanaf die beliggaming van fisiese oortuigings en aksies: speel met vorms, groepeer in versamelings, telling en metings (Cooley, Martin, Vidakovic, & Loch.,

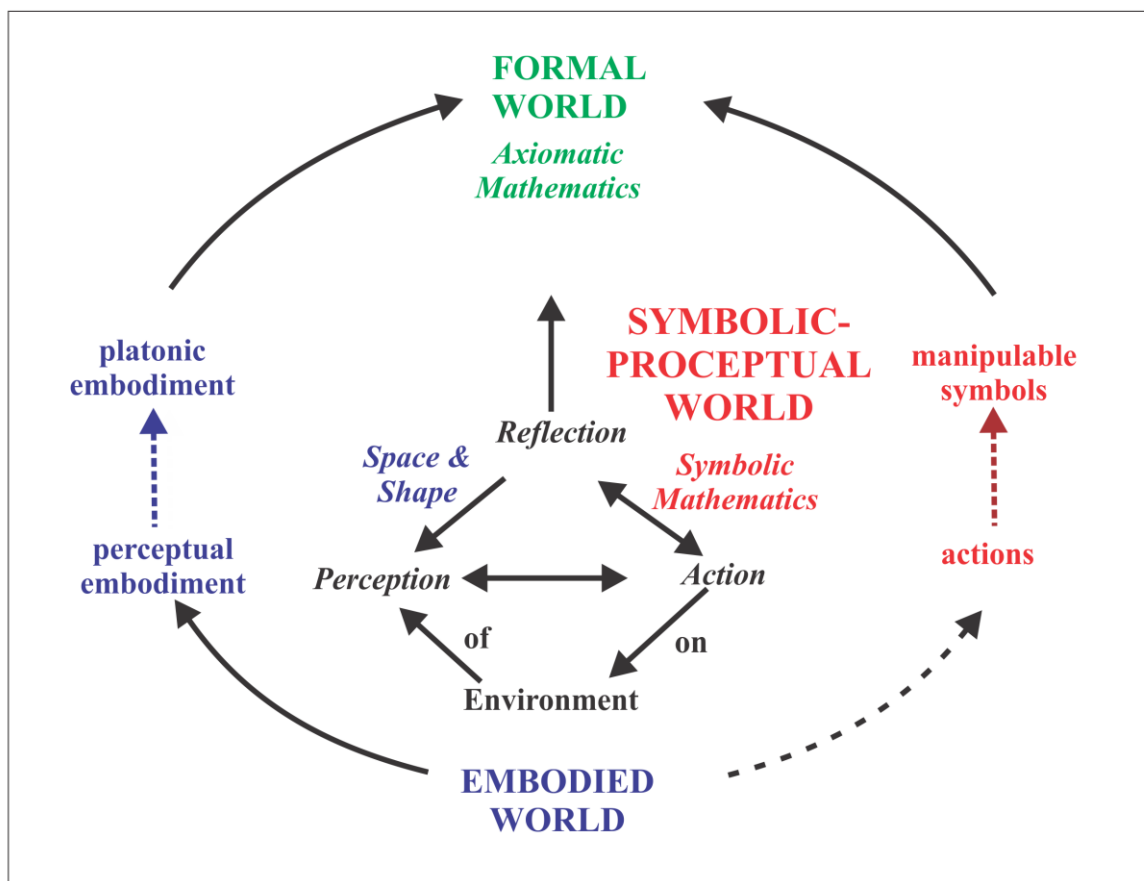
2011; Tall, 2004). As die bewerkings geoefen is en dit roetine word, kan dit deur simbole voorgestel word as getalle en gebruik word as bewerkings of verstandelike entiteite waarop bewerkings uitgevoer kan word (Tall, 2008). Met die gebruik van skoolwiskunde gee beliggaming verskeie betekenis aan verskeie kontekste terwyl simbolisering in rekenkunde en algebra 'n verstandelike wêreld van rekenkundige kapasiteit aanbied.

Kognitiewe ontwikkeling tot by die formele aksiomatiese wêreld bou op die ervarings van beliggaming en simbolisering om formele definisies te formuleer en stellings te bewys (Tall, 2008). Die teorie van Tall bou op die fundamentele menslike aktiwiteite van persepsie, aksie en refleksie. Om die kognitiewe vaardighede te volg deur die wêreld van beliggaming en proseptuele simbolisering tot by die formele wêreld van wiskundige bewysvoering vereis 'n globale visie van groei in wiskundige bevoegdheid (Tall, 1999). Die uitgeskryfde formele bewys is die finale stadium van wiskundige denke. Formele teorieë gebaseer op aksiomas lei tot gestruktureerde teorieë. 'n Aksiomatiese stelsel het 'n meer gesofistikeerde beliggaming en verwante simbolisering (Tall, 2008).

Beliggaming en simbolisering dien nie net as 'n fondasie vir idees wat geformuleer word in die formele aksiomatiese wêreld nie, maar gestruktureerde stellings kan ook teruglei vanaf die formele wêreld na die wêreld van beliggaming en simbolisering. Dit beteken dat indien wiskunde gebruik word, die beliggaming en simbolisering gebruik kan word om lewenswerklike probleme voor te stel en dit simbolies te modelleer. Ingenieurs kan dus die eerste twee wêreld gebruik as fondasie vir hulle werk.

Studente wat wiskunde op universiteit neem, kan verskil met die persepsie oor die belangrikheid van beliggaming tot by formele bewysvoering. Alle mense ontwikkel deur die opbou vanuit beliggaming en simbolisering tot by formalisme (Piaget, 1965; Tall, 2004). Aksiomatiese sisteme is nie willekeurig of arbitrêr geskep nie, insig word benodig in wat aksiome is, en vorige ervaring in beliggaming en simbolisering speel 'n subtiele rol. Formalisme word gebou vanaf gestruktureerde teorieë en het beliggaamde en simboliese betekenis, wat 'n raamwerk vorm en wat weer terugkeer na sy oorsprong (Tall, 2008). Die teorie van Tall impliseer dat om begrip van 'n konsep in wiskunde te fasiliteer die persoon deur drie wiskundewêreld moet gaan: die "beliggaamde wêreld" (*embodied world*), die simboliese wêreld en die formele wêreld. Die beliggaamde wêreld gee 'n diep betekenis aan 'n konsep. As dit nie gebeur nie kan die persoon vasgevang wees in die

simboliese wêreld sonder die vermoë om die wêreld van wiskundige denke in te gaan (Benade, 2012). Die ontwikkeling vanaf die beliggaamde wêreld tot by die formele wêreld word voorgestel deur Figuur 2.9.



**Figuur 2.9: Menslike ontwikkeling vanaf die beliggaamde wêreld tot by die formele wêreld (Tall, 2004).**

Kategorisering van oplossings binne die drie verskillende wêrelde van bewerking is soos volg opgesom deur Cooley et al. (2011):

*Beliggaam:* gebaseer op die mens se persepsies en aksies in 'n werklike wêreld. Die konteks is ingesluit, maar word nie beperk deur visuele aspekte nie.

*Proseptuele:* Kombineer die rol van die simbole in rekenkunde, algebra, simboliese differensiaalrekenkunde. Die kombinerings is gebaseer op die teorie van die

simbole wat as proses en konsep gehanteer word soos vroeër bespreek (Gray & Tall, 2001).

*Aksiomaties:* ‘n formele benadering wat begin deur aksiome te selekteer en logiese afleidings te maak om ‘n teorie te bewys.

### ***Toepaslikheid van die teorie van die drie wiskunde wêreld***

Daar is verskillende omgewings of praktyke waar die klem op verskillende plekke val. Eerstens in die skool is die klem op die beliggaamde en proseptuele wêreld. Soos wat leerders se denke ontwikkel, word die verbinding met die beliggaming minder en die steun op die proseptuele meer (Van Hiele, 2002). ‘Bewysvoering’ word bekendgestel deur gereelde assessering of algebraïese manipulasie of verbale beskrywings van visuele figure in meetkunde. Tweedens, suiwer wiskunde behou implisiet die gebruik van beliggaming maar op verskillende maniere en fokus meer op die proseptuele en formele wêreld. Individue bereik die formele wiskundevlak op verskillende maniere. Leerders kan die formele wêreld bereik op ‘n spontane manier deur die beliggaamde beeld in te bou in formele definisies en herleidings. Die formele wêreld kan ook bereik word deur beliggaming af te keur en om dan slegs vanaf die formele definisies te werk deur gebruik te maak van formele herleidings. In die praktyk gebruik alle wiskundiges hul denke wat bewustelik of onbewustelik op hulle beliggaamde konsepsies staatmaak. Derdens is die toegepaste wiskunde soos gebruik deur Ingenieurswese ‘n dissipline waar die fokus op meer gesofistikeerde simboliese aktiwiteite val. Die klem val eerder op die beliggaamde en proseptuele wêreld as op die formele wêreld.

Tall et al. (2001) impliseer dat die ontwikkeling van elementêre tot universiteitswiskunde ‘n reeks onderbrekings het. Hulle stel voor dat wiskunde nie gestruktureer kan word as ‘n eenvoudige kurrikulum wat gevorm en ontwikkel word deur ou tradisionele maniere nie, maar dat nuwe konstante heroorwegings hoe om wiskunde te leer in nuwe kontekste ‘n vereiste is. Hulle impliseer ook dat daar nie net ‘n enkele manier van wiskunde-onderrig is nie. Indien daar rekening gehou word met al die verskillende maniere waarop studente se denke ontwikkel en maniere van leer, sal die menslike interaksie tussen onderrig en leer ‘n konstante bron van vernuwing vereis.

Die voorgestelde teorie van die drie wiskundewêreld van konseptuele beliggaming, proseptuele simbolisering en aksiomatiese formalisme bied 'n ryk raamwerk om wiskundige leer en denke op alle vlakke van voorskoolse wiskunde tot wiskundenavorsing te interpreteer. Meer spesifiek gee die teorie insig oor die oorgang van denkvlakke van skool na voorgraadse studie in wiskunde.

### ***'n Voorbeeld van die toepassing van Tall se drie wêreld***

Die gebruik van die drie wiskundewêreld word verduidelik aan 'n differensiasie voorbeeld:

#### **Die beliggaamde wêreld**

'n (Lokale reguit) grafiek het 'n helling of gradiënt, want dit kan visueel waargeneem word. Dit het 'n area onder die grafiek, want dit kan gesien word.

#### **Die proseptuele wêreld**

Dit is 'n wêreld waar berekeninge gemaak kan word (beide rekenkunde en algebra). 'n Grafiek het 'n gradiënt (afgeleide) of 'n area (integraal), want dit kan bereken word.

#### **Die formele wêreld**

In die wêreld word eksplisiete aksiome en definies formeel gegee in terme van gekwantifiseerde gegewe teoretiese standpunte. 'n Funksie het 'n afgeleide of 'n integraal, want jy kan dit bewys.

### **2.5.2 Tall se teorie in verband met ander teorieë**

Pegg en Tall (2005) onderskei tussen twee tipes teorieë van kognitiewe ontwikkeling. Die eerste tipe is globale raamwerke van individuele groei oor die lang termyn byvoorbeeld Van Hiele se teorie oor meetkundige ontwikkeling (sien paragraaf 2.4.2), Bloom se taksonomie (sien paragraaf 2.4.3) en die vyf SOLO-modusse (sien paragraaf 2.4.4). Die globale vlakke belig konseptuele ontwikkeling deur die verskillende stadiums en die feit dat 'n persoon op 'n sekere toepaslike konseptuele vlak moet wees om sin te maak uit wat hy leer. Indien dit nie die geval is nie, sal gewoonteel heel moontlik plaasvind (Benade, 2012). In die SOLO-modusse soos reeds bespreek, is elke modus met al die teenwoordige bewerkings teenwoordig in die volgende modus, dus ontwikkel die leerder 'n oneindigende

vergroting in repetorium van modusse van bewerkings (Dahl, 2009). Dit is belangrik om die verskillende modusse van denke te oorweeg wanneer die lokale teorieë bespreek word (Dahl, 2009). Tabel 2.9 gee 'n uiteensetting van die drie vergelykbare globale raamwerke van kognitiewe ontwikkeling.

**Tabel 2.9: Globale vlakke van kognitiewe ontwikkeling soos uiteengesit deur Pegg & Tall, 2005, p. 471.**

Van Hiele-vlakke (1986)	Bloom se hersiene taksonomie (1990)	SOLO-Modusse (1991)
Visueel	Geheue	Sensomotoriese modus
Analise	Begrip	Ikoniese modus
Ordering	Toepassing	Konkreet-simboliese modus
Formele-deduksie	Analise	Formele modus
Abstrahering	Evaluering	Post-formele modus
	Skepping	

Kenmerke van die globale raamwerke is die beskrywing van drie paaie waarlangs ontwikkeling plaasvind (Pegg, 1997). Die eerste pad verwys na die optimale kognitiewe ontwikkeling van geboorte, deur die skool na tersiêre opleiding. Die pad is soortgelyk aan die model van ontwikkeling deur Van Hiele (Fourie, 2001). Die tweede pad is 'n multimodale perspektief wat beteken dat die vaslegging van die vaardighede in 'n modus die ontwikkeling in 'n opeenvolgende modus versterk en ontwikkeling na opeenvolgende modusse bevorder. Die unimodale modus is die laaste pad waarlangs ontwikkeling plaasvind. Navorsing het getoon dat daar minstens twee uni-strukturele – multi-strukturele – verwante leersiklusse in die konkreet-simboliese modus voorkom (Fourie, 2001).

Die drie wêrelde van Tall word ook beskou as 'n globale raamwerk, aangesien Tall (2004) wiskundige denke as 'n vermenging van verskillende kennisstrukture sien. Tall (2004) beskou die verandering van denke as 'n ontwikkelingsproses vanaf skoolwiskunde, wat 'n kombinasie van visuele voorstellings is (meetkunde, grafieke, simboliese berekeninge en manipulasies) na suiwer wiskunde op Universiteit, wat bestaan uit formele raamwerke van aksiomatiese sisteme en wiskundige bewyse. Die verandering van denke word deur Tall (2004) geformuleer as die 'drie wêrelde van wiskunde'.

Die tweede tipe teorie oor kognitiewe ontwikkeling is lokale raamwerke van konseptuele groei soos beskryf deur Dubinsky se aksie-proses-objek-skema (APOS) (kyk paragraaf 2.4.5), en Gray en Tall se prosedure-proses-prosep en ook SOLO se vlakke naamlik pre-strukturele, uni-strukturele, multi-strukturele, verwantskap en uitgebreide abstrakte vlak (Gray & Tall, 2001). Tabel 2.10 gee 'n uiteensetting van die verskillende siklusse van konseptuele konstruksie wat 'n skema vorm. Uit die tabelvoorstelling is dit duidelik dat 'n skema 'n samehangende versameling van kognitiewe objekte en interne prosesse is.

**Tabel 2.10: Die vergelykende fundamentele siklusse van konseptuele konstruksie van aksie tot objek opgestel deur Pegg & Tall (2005, p. 472).**

SOLO (1991)	APOS (2001)	Gray & Tall (2001)	
Uni-struktureel	} Aksie	Basiese objek	<b>SKEMA</b> ↓
Multi-struktureel		Prosedure [as 'n aksie op basiese objek] [Alternatiewe prosedures]	
Relasioneel	Proses	Proses	
Uni-struktureel in nuwe siklus	Objek / Skema	Prosep	

In die SOLO-taksonomie kom die SOLO-siklus, in elkeen van die globale SOLO-modusse voor (sien paragraaf 2.4.4), en 'n siklus in een modus kan lei tot verdere abstrakte basis in die volgende een (Pegg & Tall, 2005). Volgens Pegg en Tall (2005) kan die SOLO-siklusanalises toegepas word in die teoretiese raamwerk van byvoorbeeld Dubinsky se APOS-teorie. Die eerste aksie van APOS is op 'n uni-strukturele vlak van bewerking waar 'n enkele prosedure gebruik is om 'n probleem op te los (Dahl, 2009). Die multi-strukturele vlak gebruik alternatiewe prosedures wat nie gesien word as onderling verbind nie, wat dan bly op die aksievlak van die APOS-teorie. In die relasionele vlak word konneksies gemaak tussen verskillende prosedures en dit word op dieselfde vlak geplaas as die prosesvlak van die APOS-teorie en Gray en Tall se teorie. (Dahl, 2009). Hierdeur word die proses omskep in 'n objek wat gebruik kan word in verdere ontwikkeling van kennis. Die proses na proses tot 'n verstandelike objek is egter verskillend in rekenkunde, algebra, trigonometrie, differensiaalrekenkunde en formele wiskunde (Dahl, 2009). Pegg en Tall meen verder dat alhoewel daar verskille in die verskillende teorieë van konsepkonstruksie

is, hulle wel dieselfde fundamentele siklus van konsepkonstruksie het, van 'n 'doenbare' aksie tot 'n 'denkbare' konsep.

Die SOLO-taksonomie deur Biggs en Collis (1982) voorsien 'n templaar vir assessering. Binne elke modus word assessering van die konsepte toegepas in ooreenstemming met hoe die leerder 'n spesifieke konsep hanteer:

- Pre-struktureel (kort kennis oor die geassesseerde komponent);
- Uni-struktureel (fokus op 'n enkele aspek);
- Multi-struktureel (fokus op verskillende aparte aspekte);
- Relasioneel (verbind verskillende aspekte);
- Uitgebreide abstrakte (kyk na die konsep vanuit 'n geheelbeeld).

In elke modus kom toenemende gesofistikeerdheid voor en soos wat nuwe modusse ontwikkel, word daar voortgebou op die kennis en vaardigheid van die vorige modus. Dit stem ooreen met die voorstelling van opeenvolgende samevatting deur Gray, Pinto, Pitta en Tall (1999) van prosedure deur multi-prosedure, proses en prosep (Tall, 2006). Die betekenis van die term "prosedure" volgens Pegg en Tall (2005) word gesien as 'n reeksvorming van 'n prosep wat ooreenstem met die SOLO-siklus van die SOLO-taksonomie. Die fokus skuif van die individuele stappe (SOLO-taksonomie) na die geheelproses, en kan dan saamgevat word as 'n prosep waarvoor gedink kan word en verstandelik gemanipuleer kan word op 'n buigbare manier (Tall, 2010).

## **2.6 SINTESE**

Die verskillende ontwikkelingsteorieë het die navorser begelei om insig te verkry oor hoe 'n individu deur spesifieke ontwikkelingsprosesse van leer groei en vorder, asook in 'n toepaslike raamwerk wat gebruik kan word vir die ontleding en kategorisering van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke. Tabel 2.11 toon die finale sintese van die verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë aan.

**Tabel 2.11: Sintese van die verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë**

Naam	Jaar	Outeur	Teorie: Globaal of Lokaal	Belangrike eienskappe en bydrae tot wiskundige bevoegdheid	Beoordeling en bruikbaarheid vir dié studie
<b>ACT- model (§ 2.4.1)</b>	1983	Anderson	n.v.t	Die teorie dra by tot die verstaan van hoe kennis georganiseer en intelligente gedrag openbaar word. Die teorie beweer dat leer begin met begrip en wat ontwikkel tot outomatiese prosesse deur herhaling en oefening.	Die teorie gee insig in die ontwikkeling van leer met begrip, maar gee nie 'n duidelike kategorisering van verskillende vlakke waarvolgens die wiskundige bevoegdheid bepaal kan word nie.
<b>Van Hiele- teorie (§ 2.4.2)</b>	1986	Van Hiele	Globaal	Die ontwikkeling van wiskundige leer vind plaas deur ontwikkeling van verskillende vlakke. Studente moet die laer denkvlakke bemeester om verder te kan ontwikkel na die hoër en meer gevorderde vlakke.	Die teorie gee insig oor die ontwikkeling van meetkundige denke deur verskillende vlakke op 'n hiërargiese wyse, maar die voorgestelde vlakke kan nie gebruik word in die studie nie, aangesien ontledings gemaak moet word op wiskundige bevoegdheid in alle ingenieursverwante vakke wat wiskundige bevoegdheid vereis.

Naam	Jaar	Outeur	Teorie: Globaal of Lokaal	Belangrike eienskappe en bydrae tot wiskundige bevoegdheid	Beoordeling en bruikbaarheid vir dié studie
<b>Bloom se hersiene tak- sonomie (§ 2.4.3)</b>	1956	Bloom	Globaal	Die taksonomie se klassifikasies kan gebruik word as 'n sinvolle fondasie vir leerontwikkeling aangesien dit lae en hoë-orde vlakke insluit as kriteria vir prestasie.	Bloom se taksonomie is gebruik om op voort te bou deur verskeie teorieë en raamwerke soos byvoorbeeld die TIMSS en PISA. Navorsing oor die ontwikkeling van denkvlakke ondersteun nie die kategorieë van Bloom se taksonomie nie (Surgue, 2002).
<b>SOLO – tak- sonomie (§ 2.4.4)</b>	1980	Collis & Biggs	Globaal (SOLO- modusse) & Lokaal (SOLO- siklus)	Die taksonomie maak identifikasie en terugvoering van die sterk- en swakpunte in 'n student se ontwikkeling moontlik deur die student se tipe denke te beskryf en ook die kwaliteit van sy respons.	Die taksonomie is ontwikkel vanuit alle hoër onderrigvlakke en omdat wiskundige bevoegdhede binne die wiskundekonteks is wat die assessering van ontwikkeling binne 'n wiskundekonteks onderskei van ander vakke se ontwikkelingsvlakke, kan die ontwikkeling van wiskundige bevoegdhede dus nie aan die SOLO-assesseringsraamwerk onderwerp word nie. Die taksonomie is 'n deeglike uiteensetting van 'n konseptuele konstruksie wat plaasvind binne 'n globale raamwerk.

Naam	Jaar	Outeur	Teorie: Gloabaal of Lokaal	Belangrike eienskappe en bydrae tot wiskundige bevoegdheid	Beoordeling en bruikbaarheid vir dié studie
<b>APOS- teorie (§ 2.4.5)</b>	2001	Dubinsky & McDonald	Lokaal	Die teorie beskryf hoe die leer van 'n wiskundekonsept plaasvind deur 'n metode te gebruik van gekonstrueerde beeld veronderstelling.	Die verskillende denke wat nodig is in die professionele wiskundeberoep het 'n uitdrukking nodig wat meer omvattend is as dit wat gemeet word deur die aksie-proses-objek-skema ontwikkeling.
<b>Tall se drie wêrelde van wiskunde (§ 2.5)</b>	2004	Tall; Gray & Tall	Gloabaal (Die drie wêrelde van Tall) & Lokaal (Prosedu re-proses-prosep)	Die teorie impliseer dat om begrip van 'n konsep in wiskunde te fasiliteer (wiskunde op universiteit) moet die persoon deur drie wiskundewêrelde gaan. Die teorie gee insig oor die oorgang van denkvlakke van skool na voorgraadse studie in wiskunde.	Tall se drie wêrelde van wiskunde toon die ontwikkeling van 'n metateorie en die byvoeging van kennis wanneer bestaande teorieë soos Bloom, Van Hiele en Collis & Biggs vergelyk word en daar op die onderskeie teorieë se ooreenstemmings gebou word.

#### ASSESSERINGSRAAMWERKE

<b>TIMSS (§ 2.3.1)</b>	2007	Mullis et al.	Gloabaal	Die TIMSS het twee assesseringsraamwerke opgestel om te bepaal wat benodig word om kurrikulumgebaseerde take te kan uitvoer in terme van vier wiskundige bevoegdheidsvlakke (laag, intermediêr, hoog en gevorderd) en drie kognitiewe vlakke (kennis, toepassing en redenering).	Die TIMSS-studie se assesseringsraamwerk gaan gebruik word om die kognitiewe vlakke van die eerstejaaringenieurstudente te bepaal. Aangesien ingenieurs kurrikulumgeöïenteerde take en probleme kry om op te los is die TIMSS se raamwerk gepas om die ingenieurs se wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke te meet.
----------------------------	------	---------------	----------	--	---

Naam	Jaar	Outeur	Teorie: Gloobaal of Lokaal	Belangrike eienskappe en bydrae tot wiskundige bevoegdheid	Beoordeling en bruikbaarheid vir dié studie
<b>PISA</b> (§ 2.3.2)	2009	Fleischman et al.	Gloobaal	TIMSS se toetsitems meet kennis en vaardighede op kurrikulumonderwerpe.  Die PISA het 'n uitgebreide assesseringsraamwerk opgestel waarbinne die leerders se wiskundige geletterdheidsbevoegdheids -vlakke bepaal kan word. PISA assesseer studente se kapasiteit om probleme van die alledaagse lewe op te los.	TIMSS se raamwerk word dus gekies, omdat dit reeds beproeft duidelike kategorieë voorstel wat die oorvleueling van kognitiewe kategorisering uitskakel  Uit die PISA-studie is aangetoon dat ingenieurs oor die vermoë moet beskik om te kan matematiseer. Die PISA-studie verleen verdere insig in die nodige wiskundige bevoegdhe wat nodig is vir ingenieurs om die matematiseringsproses suksesvol te bemeester (Fleischman et al., 2010).

Die oorgang van sekondêre na tersiêre wiskunde behels die ontwikkeling van elementêre wiskundige denke na gevorderde wiskundige denke (Benade, 2012). Uit die literatuurstudie is die verskillende teoretiese perspektiewe oor kognitiewe ontwikkeling toegelig. Daaruit is dit duidelik dat elementêre wiskundige denke op konkrete objekte fokus om verwante konsepte en prosesse te veralgemeen of saam te vat terwyl gevorderde wiskundige denke verwys na die vlak van wiskundige bevoegdheid waar die student met abstrakte konsepte en deduktiewe bewyse werk. Soos wat studente se wiskundige bevoegdheid ontwikkel en hulle vorder deur die verskillende kognitiewe vlakke sal hulle meer gevorderde bevoegdhe aanleer wat hulle sodoende help om wiskunde te leer met begrip en kan daar dan op 'n redeneringsvlak met wiskunde en in ander vakgebiede gewerk word. Kennis van verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë kan ondersteuning bied om insig te verkry oor hoe 'n student deur verskillende ontwikkelingsprosesse van leer

gaan en hoe verskillende kognitiewe assesseringsraamwerke ontwikkel is en op mekaar voortgebou is.

Die drie kognitiewe vlakke vir wiskunde, naamlik kennis, toepassing en redenering, soos en deur die TIMSS (2007) bepaal en is met groot sukses beproef, gaan gebruik word in die studie om die kognitiewe vlakke van die studente te kategoriseer en te meet. In die lig van die studie, deur die gebruik van sekondêre data wat hoofsaaklik 'n kwantitatiewe benadering volg (kyk paragraaf 3.2, 3.3) is die TIMSS-assesseringsraamwerk gekies tot pragmatiese voordeel. Die TIMSS se raamwerk is gebruik om redes wat vervolgens kortliks saamgevat is (kyk Tabel 2.11):

- Dis 'n internasionale raamwerk gebaseer op die konseptuele leer van die vak wiskunde.
- Die kognitiewe assesseringsraamwerk is opgestel om te bepaal wat benodig word om kurrikulumgebaseerde take te kan uitvoer in terme van vier wiskundige bevoegdheidsvlakke.
- Ingenieurstudente kry kurrikulumgebaseerde probleme om op te los.
- Die betroubaarheid en vergelykbaarheid is die waarmerk van TIMSS, en is die rede waarom die verskillende toepaslike raamwerke opgestel deur Mullis et al. (2007) deur die TIMSS aanvaar word as betroubare instrumente wat gebruik kan word om die wiskundige bevoegdheidsvlakke te analiseer.
- Die TIMSS-assesseringsraamwerk kan ook toegepas word in ingenieursverwante vakke soos programmering en ingenieursgrafika wat hoë-orde denke vereis.

Onderwysers by 'n sekondêre skool of dosente by 'n universiteit moet die feit in ag neem, dat studente deur verskillende fases van kognitiewe ontwikkeling gaan terwyl wiskunde met begrip geleer word en dat die studente tot op 'n spesifieke wiskundige bevoegdheidsvlak gevorderd moet wees met toetreding tot die universiteit. Ontwikkeling deur die wiskundige bevoegdheidsvlakke en kognitiewe vlakke moet reeds op skool aangemoedig word sodat die studente 'n suksesvolle oorgang vanaf die sekondêre fase na die tersiêre fase kan maak. Die volgende hoofstuk voorsien 'n beskrywing van die empiriese studie, asook die betroubaarheidsresultate van die gebruikte raamwerk en data.

## **HOOFSTUK 3**

### **NAVORSINGSONTWERP EN METODOLOGIE**

#### **3.1 INLEIDING**

Die rol van wiskunde in ingenieurswese vorm die grondslag en essensiële gereedskap om ingenieursprosesse en -sisteme te beskryf en te analiseer (Artique, *et al.*, 2007; Mustoe, 2002). Die studie fokus op die wiskundige bevoegdheid waarmee eerstejaar-ingenieurstudente tot hulle studie toetree, en in die besonder op die verband wat dit met hulle prestasie hou in vakke wat wiskundige bevoegdheid vereis.

Uit die literatuurstudie van Hoofstuk 2 is kategorieë van wiskundige bevoegdheid geïdentifiseer en operasioneel gespesifiseer (kyk paragraaf 2.2). Hieruit is insig verkry in wat bedoel word met wiskundige bevoegdheid. Wiskundige bevoegdheid is kortliks die vermoë om wiskundige konsepte te herken, te gebruik en toe te pas in relevante kontekste en situasies wat die oorhoofse doel is van die onderrig van wiskunde in die Ingenieursfakulteit. Vervolgens is 'n raamwerk voorgestel om die vlak van wiskundige bevoegdheid te meet. Insig is verkry in die vlak van kognitiewe ontwikkeling wat nodig word vir die gebruik en toepassing van wiskundige denke. 'n Gepaste teoretiese raamwerk is voorgestel waarvolgens resultate geïnterpreteer en verklaar word. Daar is besluit om die TIMSS-raamwerk te gebruik as meetinstrument (kyk paragraaf 2.3.1, 2.6).

In Hoofstuk 2 is aangetoon dat wiskundige bevoegdheid 'n noodsaaklike basis vorm vir suksesvolle universiteitstudie in ingenieurswese en dat assessering van wiskundige bevoegdheid nie net inligting moet verskaf oor huidige prestasie nie, maar dat dit ook 'n voorspellingselement van prestasie moet wees. Grondige kennis en begrip is 'n vereiste van watter maatstawwe nodig is om te bepaal of 'n student wel wiskundig bevoeg is vir toetrede tot ingenieurstudie op universiteitsvlak. Dit hou verband met die kognitiewe vlakke waarop die leerder wiskundig kan dink, doen en toepas wat op skool ontwikkel is (Tall, 2008, kyk paragraaf 2.2.1).

In hierdie hoofstuk is die vlak van kognitiewe ontwikkeling in wiskunde van aanvangstudente in ingenieurswese gemeet, deur die opknappingskursustoets te ontleed wat hul geskryf het met die aanvang van hulle studies. Die vlak van wiskundige bevoegdheid word weer gemeet aan die einde van die eerste semester deur die Junie-eksamenvraestelle van sekere ingenieursverwante vakke naamlik wiskunde, ingenieursgrafika en rekenaarprogrammering te ontleed.

### **3.2 FILOSOFIESE BENADERING**

Om die doelstellings van die studie te bereik, is groothede gemeet en verbande bepaal en getoets. Afleidings is gemaak vanuit die bevindinge. Die ondersoek is dus post-positivisties begrond. Die postpositivisme aanvaar dat teorieë, agtergrond en waardes van die navorser, dit wat waargeneem word kan beïnvloed. Terselfdetyd jaag postpositivisme objektiwiteit na, deur die effek van interpretasie en partydigheid te erken (Ryan, 2006). Postpositivisme staan bekend daarvoor dat menslike kennis nie gebaseer is op onaantasbare, rotsvaste fondasies nie, maar eerder op menslike veronderstellings (Ryan, 2006). Die handhawing van die veronderstellings word geregverdig deur versekerings of waarborge, wat gewysig of weggelaat kan word in die lig van verdere ondersoek (kyk paragraaf 3.3.3.2). Postpositivisme behou die idee van objektiewe waarheid (Cresswell & Garrett, 2008).

In die studie is 'n gemenge (*mixed methods*) kwantitatiewe kwalitatiewe (QUAN-qual) benadering gevolg, wat hoofsaaklik kwantitatiewe metodes insluit (Cresswell, 2003; Cresswell & Garrett 2008). Cresswell en Plano Clark (2011) verduidelik dat die kwantitatiewe ontleding die grootste gewig dra en aanvullend word verdere kwalitatiewe ontledings gedoen. In dié studie is die sekondêre data-ontleding die kwantitatiewe aspek en die vraestelontleding en insette vanaf die betrokke dosente rakende die ontleding van vraestelle, die kwalitatiewe aspek van die navorsingsmetode.

### **3.3 NAVORSINGSMETODOLOGIE**

Sekondêre data-analise (Mouton, 2001) is gebruik om bestaande data te analiseer en antwoorde te vind op die navorsingsvrae. Die ontleding van sekondêre data impliseer die

analise en herinterpretasie van bestaande data (Smith, 2006). Die gebruik van sekondêre data bied die geleentheid om beskikbare data van ingenieurstudente aan die universiteit waar die studie uitgevoer is, te ondersoek om sodoende te bepaal wat die verband is tussen die studente se wiskundige bevoegdheid en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis. Sekondêre data kan ook gebruik word om vergelykings en verbande te trek na 'n volgende groep eerstejaaringenieurstudente of die tendens te toets met dieselfde groep studente wat verder gevorderd is in hulle studie (Smith, 2006).

Vanuit die literatuurstudie is 'n toepaslike raamwerk gekies wat gebruik is om studente se wiskundige bevoegdheidsvlakke asook hulle kognitiewe vlakke te meet (kyk paragraaf 2.3.1, 2.6). Die vlak van die studente se wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vaardighede is met die toetreding tot hulle studie vir ingenieurswese vasgestel deur die ontleding van hulle wiskunde Opknappingskursustoets (Addendum A). Na die eerste semester se eksamen is die studente se wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke gemeet in spesifieke modules. Die betrokke modules was Wiskunde I (WISN111), Ingenieursgrafika I (INGM111) en Programmering I vir Ingenieurs C++ (ITRW115). Die raamwerk is ook gebruik om die onderskeie toepaslike vraestelle per vraag te ontleed om vas te stel wat die vereiste wiskundige bevoegdheidsvlak en kognitiewe vlak is. Dieselfde raamwerk is gebruik vir die ontleding van die onderskeie vraestelle om konsekwentheid te verhoog en omdat dieselfde kognitiewe vaardighede wat ontwikkel word deur wiskunde, vir die vraestelle vasgestel moet word. Sodoende kan die verband tussen die studente se wiskundige bevoegdheids- en kognitiewevlakke waarmee hulle tot ingenieurswese toetree en hul prestasie in die gekose eerstejaarsvakke wat wiskundebevoegdheid vereis, bepaal word.

### **3.3.1 Etiese aspekte**

Die studie is op sekondêre data gebaseer wat aan 'n universiteit behoort. Die universiteit se Etiekkomitee het besluit dat dit nie nodig was vir die normale etiekprosedure om uitgevoer te word vir goedkeuring om die data te gebruik nie, maar dat die Kampusregistrator moes toestem. Die Kampusregistrator het toestemming gegee dat die data verwerk en ontleed mag word op voorwaarde dat die data uitsluitlik vir die doeleindes van die ondersoek gebruik mag word (kyk Addendum C). Alle inligting moet ten alle tye

vertroulik hanteer word. Geen persoon mag in enige publikasie wat uit die studie voortspruit geïdentifiseer word nie.

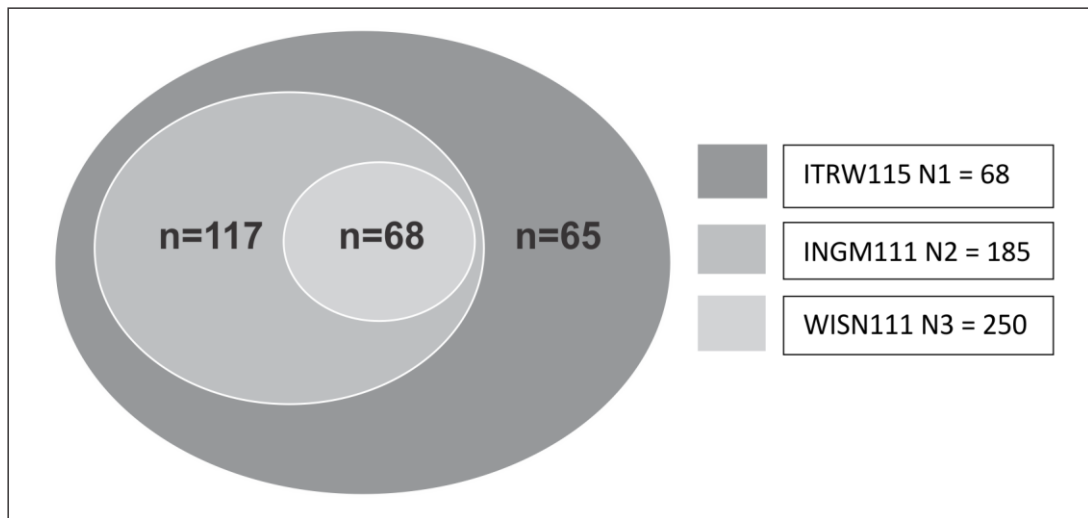
Wat die opknappingstoets- en eksamendata betref, is die toestemming van die betrokke dekane, skooldirekteure en dosente verkry om die data uitsluitlik vir die doeleindes van die ondersoek te gebruik. Die betrokke dosente het die vraestelle beskikbaar gestel en die ontleding van elke vraag is volgens die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke saam met die navorser gedoen.

### 3.3.2 Populasie en Steekproefneming

Die studie is met alle eerstejaaringenieurstudente, uitgesonderd die chemiese ingenieurstudente, uitgevoer wat in 2011 vir die eerste keer op die betrokke Universiteitskampus ingeskryf het ( $n=259$ ). Die elektriese-elektroniese en rekenaar-elektroniese ingenieurstudente vorm deel van die populasie omdat die groepe se kurrikulum die Programmering vir Ingenieurs (ITRW115) en ingenieursgrafika (INGM111)-modules insluit. Die meganiese ingenieurstudente is ook ingesluit, maar het net INGM111 en is dan ooreenkomstig ontleed net vir daardie module. Die chemiese ingenieurstudente is uitgelaat aangesien die betrokke modules nie in hulle kurrikulum ingesluit is nie. In die besonder is die volgende veranderlikes met betrekking tot sekere metings geïdentifiseer:

- Graad 12-wiskundepunt: Alle studente in die populasie;
- Opknappingskursustoetspunt: Alle studente in die populasie;
- Wiskunde I-punt (WISN111): Alle studente in die populasie ( $N3 = 250$ );
- Programmering vir Ingenieurs C++ punt (ITRW115): Alle Rekenaar-Elektroniese en Elektriese-Elektroniese Ingenieurstudente ( $N1=68$ );
- Ingenieursgrafikapunt (INGM111): Alle Rekenaar-Elektroniese en Elektriese-Elektroniese Ingenieurstudente ( $N1=68$ ) asook alle Meganiese Ingenieurstudente ( $N=117$ ), d.w.s  $N2 = 185$ .

Die samestelling van die steekproewe is voorgestel deur Figuur 3.1 in 'n Venn-diagram.



**Figuur 3.1: Venn-diagram: Steekproefneming**

### 3.3.3 Navorsingsontwerp

**Tabel 3.1: Die navorsingsontwerp**

Jaar	2010	2011 (Januarie)	2011 (Junie)
<b>Jaarvlak</b>	<b>Gr 12</b>	<b>Eerstejaaringenieurswese</b>	<b>Eerstejaaringenieurswese</b>
<b>Datastel</b>	Datastel 1: Gr 12 Wiskundepunte (Vraestel 1 en 2).	Datastel 2: Opknappingskursustoets in Wiskunde (Werklike of rou punte)	Datastel 3: Junie-Eksamen 1. Wiskunde (WISN111) (n=250) 2. Programmering (ITRW115) (n=68) 3. Ingenieursgrafika (INGM111) (n=185) (Werklike of rou punte)
<b>Datatype</b>	Sekondêre data	Sekondêre data	1. Sekondêre data (punte per vraag vir onderskeie vraestelle) 2. Ontleding van vraestelle volgens die raamwerk om wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vlakke te bepaal

Jaar	2010	2011 (Januarie)	2011 (Junie)
Jaarvlak	Gr 12	Eerstejaaringenieurswese	Eerstejaaringenieurswese
<b>Metode</b>	Kwantitatief (beskrywende en afgeleide statistiek)	Kwantitatief (beskrywende en afgeleide statistiek)	Kwantitatief (beskrywende en afgeleide statistiek) asook kwalitatiewe ontleding van vraestelle met TIMSS- assesseringsraamwerk.

### 3.3.4 Data-insameling

#### 3.3.4.1 Punte van studente

Die volgende drie datastelle is in die empiriese navorsing gebruik:

#### **Datastel 1: Gr 12-wiskundepunte**

Die Gr 12-wiskundepunte van die studente is die punte wat Umalusi (*Council for Quality Assurance in General and Further Education and Training*) na afloop van die November 2010-eksamen op grond van Wiskundevraestel 1 en 2 vrygestel het. Hierdie punte is nie werklike of roupunte nie, maar is die resultaat van Umalusi se aanpassingsproses wat volgens vasgestelde statistiese norme uitgevoer is. Die datastel is doelbewus in die studie ingesluit om eerstens te bepaal wat die wiskundige bevoegdheid van 'n voornemende ingenieurstudent is in terme van sy/haar vermoë in die formele Gr 12-eksamen van die vorige jaar en tweedens om die gronde vir afleidings ten opsigte van geldige en betroubare studie-ondersteuningsadvies en keuringsitemkonstruksie te ondersteun.

#### **Datastel 2: Opknappingskursustoets**

Alle eerstejaaringenieurstudente moet voor die aanvang van die akademiese jaar 'n wiskunde-opknappingskursus voltooi en na afloop van dié kursus 'n formele toets skryf. Die toets is oor 'n aantal jare ontwikkel en sluit verskillende aspekte van verwagte wiskundige bevoegdheid in. Die vakgroep Wiskunde en Toegepaste Wiskunde op die Potchefstroom-kampus is verantwoordelik vir die kursus en toets. Datastel 2 bestaan uit die rou en werklike punte wat die studente in 2011 behaal het vir die opknappingskursustoets.

### **Datastel 3: Eerste semestereksamen**

Datastel 3 bestaan eerstens uit die werklike of rou punte wat studente in die eerste semestereksamen in die ingenieursverwante vakke behaal het. Tweedens is die modules van Wiskunde I, Programmering I en Ingenieursgrafika I se Junie-eksamenvraestelle *per vraag* ontleed in terme van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke.

#### ***Die betroubaarheid van Datastel 1, Datastel 2 en Datastel 3***

Die Gr 12-wiskundepunte (Datastel 1) is verkry vanaf die Ingenieursfakulteit met goedkeuring van die Kampusregistrator en die Dekaan van die Ingenieursfakulteit. Die punte van die student vir die vraestelle van die Opknappingskursus (Datastel 2), Wiskunde I, Ingenieursgrafika 1 en Ingenieursprogrammering 1 (Datastel 3) is ontvang vanaf die betrokke dosente. Die punte per vraag is ook ontvang vanaf die betrokke dosente soos dit op die klaslyste aangeteken is. Soos gebruiklik word die vraestelle deur die verantwoordelike vakgroep opgestel en aan 'n proses van moderering onderwerp. Die dosente van die onderskeie vakke het die antwoordstelle volgens 'n opgestelde memorandum gemerk.

#### **3.3.4.2 Ontleding van vraestelle**

Hierdie afdeling beskryf die empiriese navorsing oor die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke van die eerstejaaringenieurstudente deur die ingenieursverwante vakke se vraestelle per vraag te ontleed. Die Junie-eksamenvraestelle vorm Datastel 3.

#### ***Raamwerke vir Wiskundigebevoegdheids- en kognitiewe vlakke***

Die raamwerke, wat op grond van die literatuurstudie in Hoofstuk 2 saamgestel is, is geskik bevind. Die TIMSS is vir hierdie doel gebruik en die spesifieke vlakke van bevoegdheid en kennis is bespreek en beskryf (kyk paragraaf 2.3.1).

Die Opknappingstoets se vraestel (kyk Datastel 2) en elkeen van die 3 vraestelle (kyk Datastel 3) wat betrekking het op die studie is per vraag soos volg ontleed: eerstens volgens die vier **wiskundige bevoegdheidsvlakke** (gevorderd, hoog, intermediêr en laag) (kyk Tabel 2.2) en tweedens volgens die drie **kognitiewe vlakke** (kennis, toepassing en redenering) (kyk Tabel 3.2).

- (a) Die **Wiskundige bevoegdheidsvlakke** soos geïdentifiseer deur Mullis & Martin (2006) is: Gevorderd, Hoog, Intermediêr en Laag (kyk Tabel 2.2).
- (b) Die **Kognitiewe assesseringsraamwerk** soos saamgestel deur Mullis, Martin, Ruddock, O’Sullivan, Arora en Erberber (2007) het drie kognitiewe vlakke vir wiskunde geïdentifiseer wat in hierdie studie van belang is. Die kognitiewe raamwerk wat gebruik is tydens die studie is in Tabel 3.2 opgesom:

**Tabel 3.2 :**      **TIMSS-assesseringsraamwerk vir Kognitiewe vlakke**  
(Sien paragraaf 2.3)

HOOFKATEGORIE	ONDERAFDELINGS
<b>Vlak 1: Kennis</b>	<i>Herroep</i>
	<i>Herken</i>
	<i>Berekening</i>
	<i>Herwin</i>
	<i>Meting</i>
	<i>Klassifiseer/groepeer</i>
<b>Vlak 2: Toepassing</b>	<i>Selekteer</i>
	<i>Voorstel</i>
	<i>Modelleer</i>
	<i>Implementeer</i>
	<i>Los roetineprobleme op</i>
<b>Vlak 3: Redenering</b>	<i>Analiseer</i>
	<i>Veralgemeen</i>
	<i>Integreer</i>
	<i>Regverdig</i>
	<i>Oplos van nie-roetineprobleme</i>

### ***Ontledingsprosedure***

Die wiskundige bevoegdheidsvlakke gee ‘n omvattende beskrywing van die wiskunde wat die student op elke vlak kan doen. Die bevoegdhede varieer vanaf die gebruik van relatiewe komplekse algebra, meetkundige konsepte en verhoudings in die gevorderde vlak

tot slegs basiese wiskundige kennis hoofsaaklik in die getalarea in die lae vlak (Mullis & Martin, 2006).

Die hoofklassifikasie van die kognitiewe vlakke behels die onderskeiding tussen die drie hoofkategorieë (kyk Tabel 3.2). Daarna word die vraag verder afgebreek in die onderafdelings van elke kategorie om sin te maak van presies watter kognitiewe vlak benodig word om die spesifieke vraag te ontleed (Mullis et al., 2007).

- Die **kennisvlak** is voldoende indien die student 'n taak moet herroep en herwin. Die student het ook die kennisvlak nodig vir basiese algebraïese berekeninge, klassifikasie en groepering. Die vaardigheid om basiese metings te doen en inligting te herwin vanaf gegewe figure of modelle word ook verkry op die kennisvlak.
- Die **toepassingsvlak** is voldoende indien die student 'n taak kry waar hy 'n effektiewe strategie wat vooraf geleer is, kan selekteer om die oplossing te vind. Die toepassingsvlak word ook benodig as gegewe inligting voorgestel moet word deur bv. tabelle, grafieke of modelle. Modelling of manipulering vind ook plaas in die toepassingsvlak indien 'n nuwe vergelyking of model opgestel moet word om die oplossing te vind. 'n Taak kan bestaan uit 'n stel instruksies en dan is die toepassingsvlak nodig om dit te kan uitvoer. Laastens moet roetineprobleme opgelos word deur toepaslike strategieë te gebruik en dan na gelang van die uitkoms 'n keuse te maak oor die proses wat gevolg moet word om die oplossing te vind.
- Die **redeneringsvlak** is voldoende indien die student 'n taak kry waar hy vanaf die gegewe inligting verbande moet bepaal tussen veranderlikes en gevolgtrekkings moet maak. Redeneringsvaardighede is nodig as die student 'n veralgemening moet maak deur die resultate te herformuleer in meer toepaslike terme. 'n Taak kan bestaan uit 'n nie-roetineprobleem waar die student verskillende wiskundige prosesse moet integreer en die resultate evalueer in 'n onbekende of komplekse situasie.

Die kennisvlak is bereik wanneer die student voorheen 'n toepaslike algoritme of feit in die handboek of in die lesings teëgekom het in verskeie gevalle sodat hulle die geleentheid gehad het om die algoritme, definisie of feit te leer. Die toepassingsvlak is bereik wanneer die eienskappe van die taak van so 'n aard is dat die student die taak kan korreleer met take en voorbeelde in die handboek of in die lesings wat 'n bekende algoritme of prosedure gebruik het om die oplossing te vind. Die redeneringsvlak is bereik wanneer die student gereeld tydens kontakssessies met die dosente hoëvlak opdragte en take kry sodat die student kritiese en kreatiewe denke kan aanleer (Felder & Brent, 2004; par. 2.4.3).

### ***Die geldigheid en betroubaarheid van die vraagontledings***

Die raamwerke waarvolgens die vrae van die verskillende vraestelle ontleed is, is verkry vanaf die TIMSS se assesseringsraamwerk wat gebruik is om die vlak van wiskundige bevoegdheid en kognisie te bepaal (kyk paragraaf 2.3.1). Die betroubaarheid van die TIMSS se raamwerk as meetinstrument is gemeet deur Cronbach se  $\alpha$ -koëffisiënt, wat gebaseer is op interne-itemkorrelasies (Field, 2009). Indien die items korreleer, sal die  $\alpha$ -koëffisiënt naby aan een wees, maar indien die  $\alpha$ -koëffisiënt naby aan nul is, stem die items nie ooreen nie. Daar is verskillende waardes van interne betroubaarheid wat vereis word, afhangende daarvan waarvoor die instrument gebruik word. 'n Cronbach- $\alpha$  van 0.75 sal aanvaarbaar wees indien die instrument gebruik word om prestasie te meet, byvoorbeeld om te meet of die student die vraag met sukses kon beantwoord, en 'n waarde van 0.5 is aanvaarbaar vir metings wat gedoen word op gesindhede en assesserings van leeraktiwiteite, byvoorbeeld om te meet tot op watter vlak 'n student se kognitiewe vaardighede gevorder het (Felder & Spurlin, 2005; Field, 2009). Die Cronbach se  $\alpha$ -koëffisiënt is vir elke vlak vir die onderskeie vraestelle aangedui by die verskillende afdelings waar elke vraestel afsonderlik bespreek en ontleed is (kyk paragraaf 3.3.5).

Alle ontledings is eerstens deur dosente in die Fakulteit Opvoedingswetenskappe uitgevoer wat kenners is in die onderskeie vakgebiede wiskunde, rekenaarprogrammering en tegniese tekeninge maar ook behulpsaam was met die ontleding en kategorisering volgens verskillende kognitiewe vlakke. Tweedens is die vraestelle ook ontleed deur die betrokke dosente van die modules in die Fakulteit Natuurwetenskappe. Hiervolgens is daar dan kohesie verkry tussen die dosente van beide Fakulteite. Interpretasiefoute of verskille kon

op die manier uitgewys en heroorweeg word. Interpretasiefoute het onder andere voorgekom by vrae wat kennis toets maar geïnterpreteer is deur die dosente van Opvoedingswetenskappe as vrae wat toepassings- of redeneringsvaardighede vereis. Palm, Boesen & Lithner (2011) en Benade (2012) het besluit om die handboek te gebruik as 'n verwysing na die geleentheid wat die student gehad het om te leer. Die betrokke dosente kon dus duidelik uitlig watter vrae kennis en slegs toepassing getoets het en watter vrae redenering geverg het omdat hulle die inhoud van die handboek en studiegidse ken asook wat behandel is in die lesings. Die ontleding van die vrae in die onderskeie vraestelle is dus deur die betrokke dosent gemodereer, waarna dit ook deur 'n onafhanklike kundige nagegaan is.

### **3.3.5 Die ontledings van die onderskeie vraestelle**

Die ontledings van verskeie vraestelle word vervolgens prakties geïllustreer. Die vrae van elke vraestel is afsonderlik ontleed en gekategoriseer. Volledige ontledings is ingesluit in Addenda A & B. Die eerste kolom dui die (a) **wiskundige bevoegdheidsvlak** aan en die tweede kolom dui die (b) **kognitiewe vlakke** aan wat die student reeds moes bemeester het om die vraag te beantwoord (kyk paragraaf 3.3.4.2).

#### **3.3.5.1 Wiskunde-Opknappingskursusstoets vir eerstejaarstudente vir 2011 (Datastel 2)**

Die doel van die opknappingskursus is om ondersteuning te bied aan ingenieurstudente met onvoldoende vlakke van bevoegdheid in wiskunde aan die einde van Graad 12. Die kursus het ten doel om 'n positiewe bydrae te maak en studente voor te berei vir resente veranderings in die wiskunde-onderrig van voorgraadse ingenieurs (Fuller, 2002).

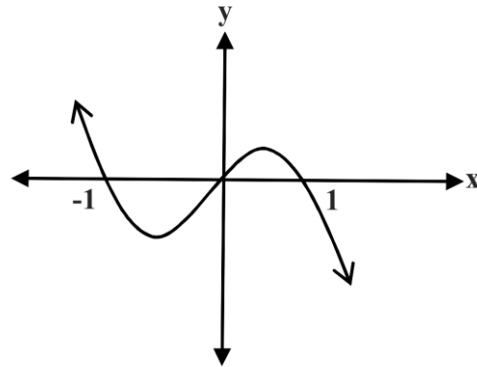
'n Paar vrae is geselekteer om die ontleding te illustreer. Die volledige ontleding van die opknappingskursus se vraestel word uiteengesit in Addendum A.

Vraag 16 wat volg is 'n voorbeeld van 'n vraag waar die student se **kennis** (vlak 1) getoets word.

## VRAAG 16

'n Moontlike vergelyking vir die funksie in die skets is:

- A.  $f(x) = -x(x-1)(x-1)$
- B.  $f(x) = x(x+1)(x-1)$
- C.  $f(x) = x(x+1)(1-x)$
- D.  $f(x) = x(x-1)(x-1)$



### Wiskundige bevoegdheidsvlak

- (ii) **Intermediêr:** Die student behoort oor kennis te beskik t.o.v. die uiteensetting of standaardvorm van 'n derdegraadse vergelyking en die kennis gebruik om die korrekte bypassende vergelyking te kies.

### Kognitiewe vlak

- (1) **Kennis:** *Herroep:* Ken die notasie en standaardvorm van 'n derdegraadse vergelyking en die posisies van die x-afsnitte in 'n vergelyking.

Vraag 17 is 'n voorbeeld van 'n vraag waar die student se **toepassingsvaardigheid** (vlak 2) getoets word. Meer spesifiek moet die student roetineprobleme kan oplos. Die student moet vertrouwd wees met die konteks waarbinne hulle wiskundige kennis toegepas word. Kennis is nodig om algemene berekeninge te doen en te weet wat nodig is om die draaipunte te bepaal. Verdere keuses moet gemaak word na gelang van die uitkoms van stappe.

## VRAAG 17

Die draaipunte van  $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + 4}$  is:

- A.  $(\frac{4}{3}, -\frac{9}{13})$  en  $(-\frac{4}{3}, \frac{9}{13})$
- B.  $(-3, 4)$  en  $(3, -4)$

C.  $(2, -\frac{3}{4})$  en  $(-2, \frac{3}{4})$

D. geen draaipunte

Wiskundige bevoegdheidsvlak

(iii) **Hoog:** Die student behoort wiskundige vaardighede te kan toepas om die draaipunte te kan bepaal van die gegewe vergelyking. Die gegewe vergelyking is 'n vreemde en moeilike vergelyking en insig is nodig om die oplossing te vind.

Kognitiewe vlak

(2) **Toepassing:** *Los roetineprobleme op:*

Moet weet dat draaipunte bepaal word deur  $f'(x)=0$ . Moet  $f(x)$  bepaal, dan  $f'(x)=0$  oplos.

Vraag 9 is 'n voorbeeld van 'n vraag waar die kognitiewe denke van **redenering** (vlak 3) nodig is. Modelling vind plaas waar die student 'n vergelyking moet genereer vir die gegewe situasie. Kennis van absolute waardes en ongelykhede moet geïntegreer word om die oplossing te kan vind. Die wiskundige bevoegdheid is gevorderd tot op 'n vlak waar die student die inligting moet kan organiseer en integreer en dit dan voorstel.

**VRAAG 9**

Gebruik absolute waarde-notasie om die volgende stelling wiskundig uit te druk: “ $k$  is minder as 7 eenhede vanaf 5.

A.  $|x - 7| < 5$

B.  $|7 - x| < 5$

C.  $|x - 5| < 7$

D.  $|x - 5| \leq 7$

Wiskundige bevoegdheidsvlak

(iv) **Gevorderd:** Die student behoort die inligting te kan voorstel op die korrekte manier deur hul kennis van die eienskappe van 'n absolute waarde korrek te kan weergee.

Kognitiewe vlak

(2) **Toepassing:** *Modelleer:* Genereer 'n ongelykheidsvergelyking om gegewe situasie voor te stel.

(3) **Redenering:** *Integreer:* Kombineer die kennis van absolute waardes en ongelykhede en bepaal die verband tussen die gegewe waardes.

In Tabel 3.3 is ‘n opsomming van die gewig wat elke wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlak in die Opknappingskursus dra:

**Tabel 3.3: Opsomming van die Opknappingskursustoets se ontleding**

Wiskundige bevoegdheidsvlakke		Kognitiewe vlakke	
Laag	<b>3%</b>	Kennis	<b>17%</b>
Intermediêr	<b>60%</b>	Toepassing	<b>70%</b>
Hoog	<b>30%</b>	Redenering	<b>13%</b>
Gevorderd	<b>7%</b>		

Tabel 3.3 toon aan dat 60% van die vrae ‘n intermediêre wiskundige bevoegdheidsvlak vereis. Die gevorderde vlak kom slegs in 7% van die vrae voor. Die vraestel bestaan uit 70% toepassingsvrae. Hieruit is dit duidelik dat die student nie die eksamen vraestel kon slaag met net ‘n kognitiewe vaardigheid van kennis nie. Die student se kognitiewe denke moet verder ontwikkel tot by die toepassingsvlak.

### 3.3.5.2 Wiskunde 1- (WISN111) Junie-eksamen vraestel 2011 (Datastel 3)

WISN111 is ‘n vereiste vir alle eerstejaaringenieurstudente. ‘n Paar vrae is geselekteer om die ontleding van die vrae te illustreer. Die volledige ontleding van vraestel WISN111 word uiteengesit in Addendum B.

#### **VRAAG 8**

Definieer die volgende limiet.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**Wiskundige bevoegdheidsvlak**

- (i) **Laag:** Die student behoort 'n wiskundige definisie wat geleer is te kan weergee.

**Kognitiewe vlak**

- (1) **Kennis: Herroep:** Die student behoort die wiskundige definisie van 'n limiet te ken.

**VRAAG 1**

Die volume in desibels, van 'n luidspreker by 'n konsert as funksie van horisontale afstand vanaf die luidspreker word beskryf deur  $V(x) = 39 - |2x - 1|$ . Die verhoog is by  $x = 0$  en die luidspreker by  $x = -5$ . 'n Volume van meer as 30 desibels is skadelik vir die gehoor. Bepaal die veilige gebiede om die luidspreker. Los dus die ongelykheid op.

$$39 - |2x - 1| < 30$$

**Wiskundige bevoegdheidsvlak**

- (ii) **Intermediêr:** Die student behoort sy wiskundige kennis toe te pas om 'n ongelykheid met 'n absolute waarde in die vergelyking op te los. Die wenk aan die einde van die vraag "los dus die ongelykheid op" het die gevolg dat die student nie nodig het om sy kennis te organiseer nie, slegs die toepassing van 'n spesifieke wiskundige prosedure is vereis.

**Kognitiewe vlak**

- (2) **Toepassing: Selekteer:** Die student behoort 'n bekende prosedure te gebruik om die oplossing te vind.

**VRAAG 18**

Die volgende kromme word die heks van Maria Agnesi genoem.

$$y = \frac{1}{(1 + x^2)}$$

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan hierdie kromme in die punt  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
(iii) <b>Hoog:</b> Die student moet die nodige wiskundekennis en begrip kan toepas om die komplekse situasie op te los.	(2) <b>Toepassing:</b> <i>Los roetineprobleme op:</i> gebruik die nodige kennis en toon begrip om die probleem op te los.  (3) <b>Redenering:</b> <i>Analiseer:</i> Die probleem moes ontleed word en 'n besluit moes geneem word oor hoe om te werk te gaan.  <i>Integreer:</i> Gebruik die resultaat sowel as gegewe inligting om die oplossing te vind.

In Tabel 3.4 is 'n opsomming van die gewig wat elke wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlak in die WISN111-vraestel dra:

**Tabel 3.4 : Opsomming van die WISN 111-vraestel se ontleding**

Wiskundige bevoegdheidsvlakke		Kognitiewe vlakke	
Laag	<b>24%</b>	Kennis	<b>29%</b>
Intermediêr	<b>41%</b>	Toepassing	<b>62%</b>
Hoog	<b>33%</b>	Redenering	<b>9%</b>
Gevorderd	<b>2%</b>		

Tabel 3.4 toon aan dat die eerste drie wiskundige bevoegdheidsvlakke, naamlik Laag (24%), Intermediêr (41%) en Hoog (33%), al drie naastenby met dieselfde gewig getoets het. Die kognitiewe vlak Toepassing neem 62% van die toets in beslag. Hieruit is dit duidelik dat die student met die nodige kennis en toepassingsvaardigheid die vraestel kan slaag.

### 3.3.5.3 Rekenaarprogrammering vir Ingenieurs- C++ (ITRW 115) Junie-eksamen vraestel 2011

Rekenaarprogrammering vir ingenieurstudente vereis basiese vaardighede, beide in die verstaan van die onderliggende toepassings en in die fundamentele programmeringsproses. Die toepassing van die kennis van numeriese metings en korresponderende eenhede sowel as die vaardigheid om berekeninge te doen, is 'n vereiste (Bronson, 2009).

In al drie die vrae van die ITRW111-vraestel word die volgende kennisvlakke benodig om die oplossings te vind, herroep, te bereken en te klassifiseer/groeper. Basiese wiskundige kennis is telkens benodig.

#### **VRAAG 1: Beheerstrukture**

Skryf 'n program wat 'n ewekansige waarde tussen 1 en 100 kry en dan die gebruiker vra om die waarde te raai. Daar moet telkens geantwoord word of die waarde groter of kleiner is as die waarde wat die gebruiker raai. Die gebruiker moet aanhou raai totdat hy die regte antwoord kry, of totdat hy 0 insleutel.

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
(ii) <b>Intermediêr:</b> Die student kan begrip en kennis toepas in 'n bekende situasie.	(2) <b>Toepassing:</b> <i>Los roetineprobleme op:</i>  Pas die voorafgeleerde kennis en vaardighede toe in 'n programmeringstaal sodat die program 'n keuse moet maak na gelang van uitkoms van die stappe.

## VRAAG 2: Funksies en rekursie

Skryf 'n rekursiewe funksie wat waardes in 'n reeks vertoon wat kleiner as 'n sekere maksimum waarde is. Gebruik die funksie in 'n program waar die gebruiker 'n maksimum waarde kies.

1, 2, 3, 6, 11, 20 ... ( $L_{n+3} = L_{n+2} + L_{n+1} + L_n$ )

### Wiskundige bevoegdheidsvlak

(ii) **Intermediêr:** Die student kan begrip en kennis toepas in 'n bekende situasie.

### Kognitiewe vlak

(2) **Toepassing:** *Los roetineprobleme op:* Pas die voorafgeleerde kennis en vaardighede oor rekursiewe funksies in 'n programmeringstaal toe om die probleem op te los.

## VRAAG 3: Wiskunde, skikkings en wysers

Skryf 'n funksie (*Create*) om die volgende wiskundige uitdrukking se waardes (vir elke  $i$ ) in 'n skikking te plaas. Die funksie moet die aantal items wat in die skikking is, terugstuur.

1. Skryf 'n funksie (*Search*) om deur 'n skikking vir 'n waarde te soek. Die funksie ontvang die skikking, 'n wyser na die einde van die skikking en 'n waarde om voor te soek, en stuur 'n wyser na die eerste voorkoms van die waarde terug.
2. Kopieer die funksie (*Sort*) in `K:\sort.cpp` na jou program (moenie `sort.cpp` verander of uitvee nie!). Verander die funksie sodat dit van groot na klein sal sorteer.
3. Skryf 'n program wat waardes  $M$  en  $N$  van die gebruiker kry en 'n skikking skep deur *Create* te gebruik. Die program stuur 'n skikking met 10 nulwaardes en die waardes  $M$  en  $N$  na die funksie. Die program moet toets dat  $0 < M < N < 10$ . Die program moet dan die gebruiker vir 'n waarde vra, en vir die waarde soek deur *Search* te gebruik. Vertoon die adres van die waarde en die indeks in die skikking indien die waarde gevind is, of 'n foutboodskap as die waarde nie in die skikking is nie. Sorteer die skikking met *Sort* en vertoon die resultaat.

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
<p><b>(ii) Intermediêr:</b></p> <p>Die student moet wiskundige kennis en begrip toepas in 'n bekende situasie.</p>	<p><b>(2) Toepassing:</b></p> <p><i>Seleksie:</i> Kies 'n toepaslike algoritme.</p> <p><i>Voorstelling:</i> Die data moet in 'n skikking geplaas word, en bewerkings moet daarop gedoen word.</p> <p><i>Implementeer:</i> Die probleem moet geïmplementeer word in C++.</p> <p><i>Los roetineprobleme op:</i> Pas die voorafgeleerde kennis in 'n programmeringstaal toe, los die probleem op en lewer programuitvoer.</p> <p><b>(3) Redenering:</b></p> <p><i>Analiseer:</i> Die gegewe vraag moet ontleed word.</p> <p><i>Integreer:</i> Die gebruik van datastrukture, herhalingstrukture en beheerstrukture moet gekombineer word om programmeeruitvoer te lewer.</p>

In Tabel 3.5 is 'n opsomming van die gewig wat elke hoogste kognitiewe vlak en wiskundige bevoegdheidsvlak dra in die ITRW 115-vraestel:

**Tabel 3.5 : Opsomming van die ITRW 115-vraestel se ontledings**

Wiskundige bevoegdheidsvlakke		Kognitiewe vlakke	
Laag	<b>(\$) 0%</b>	Kennis	<b>(\$) 0%</b>
Intermediêr	<b>100%</b>	Toepassing	<b>66%</b>
Hoog	<b>0%</b>	Redenering	<b>33%</b>
Gevorderd	<b>0%</b>		

(\$) Hoewel suiwer kennis nie as sodanig ingesluit is in 'n spesifieke vraag nie, word dit indirek gebruik in toepassing en redenering.

Tabel 3.5 toon aan dat geen hoë wiskundige bevoegdheidsvlakke vereis is in die vraestel nie, daar is slegs tot op die Intermediêre vlak getoets. Die vraestel vereis dat die student se kognitiewe denke ontwikkel moet wees tot die hoogste vlak van redenering. Al toon die tabel dat die kognitiewe vlak kennis en die bevoegdheidsvlak Laag 0% gewig dra, beteken dit nie dat geen kennis of lae wiskundige bevoegdheid nodig is nie, die 0% is slegs 'n aanduiding dat nie een van die drie vrae in die vraestel *slegs* die vaardigheid van die laagste vlak vereis nie.

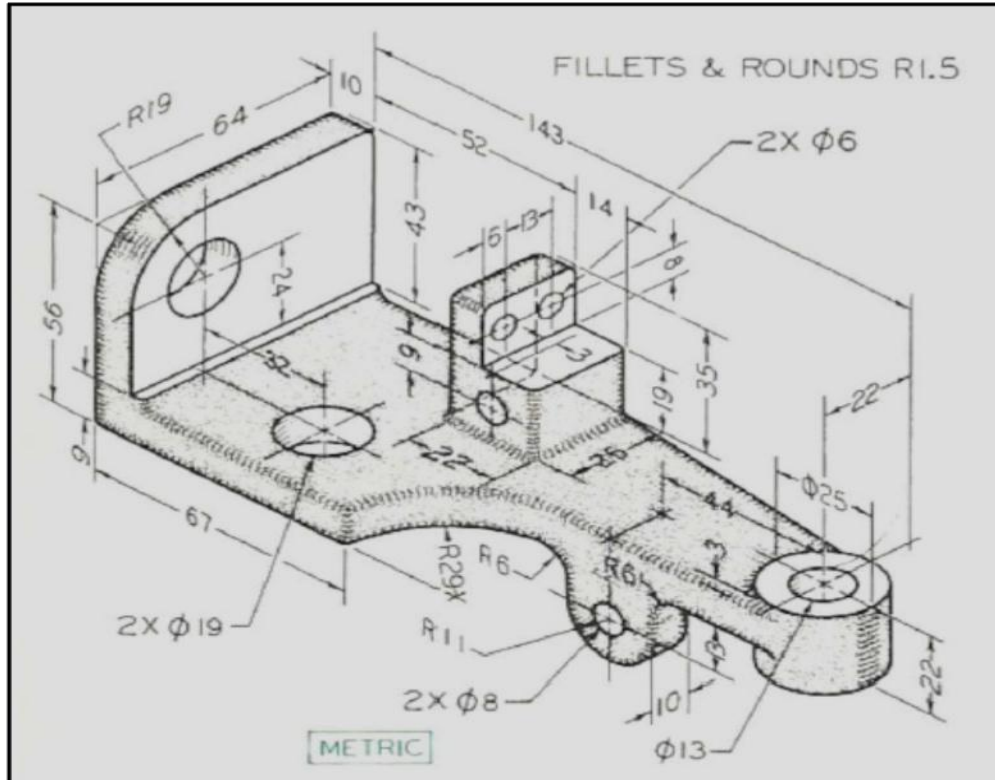
#### 3.3.5.4 Ingenieursgrafika- (INGM 111) Junie-eksamenvraestel 2011

Hierdie vak is deel van die integrasie van die kognitiewe denke en vaardighede wat gebruik word om te ontwerp ten einde 'n produk te vervaardig. Dit is 'n kombinasie van lyne, simbole en grafiese kommunikasie. Die module vereis ruimtelike oriëntasie en grafiese meetkunde sodat die student deur middel van grafiese ontwerp probleme in die siviele, elektriese en meganiese rigtings analities en grafies kan oplos. Ingenieursgrafika ontwikkel hoë kognitiewe denke om probleme analities te kan identifiseer en kreatief te kan oplos.

Die volledige ontleding van die drie vrae van die vraestel INGM111 word vervolgens geïllustreer.

## VRAAG 1

Gebruik die inligting in Figuur 3.2 en skep die model van die **Lokeerhouer** wat vervaardig word van allooï gietstaal (*cast alloy steel*).



**Figuur 3.2:** Die gegewe lokeerhouermodel in vraag 1 van die INGM111 vraestel

Die volgende veranderings moet aangebring word (sien figuur):

- A: die oorspronklike dikte moet 13 wees voordat dit afgemasjineer word na 10.
- B: die afmeting 9 moet vervang word met 13.
- C: die dikte van die onderste basis is 10.
- D: skuif die reghoekige blok 4 mm weg van agterste rand.

**Skep 'n detailtekening** van die model met die nodige aansigte en afmetings sodat dit vervaardig kan word. Druk uit, teken en handig in. Kleur alle geboorde gate **rooi** en alle gemasjineerde vlakke **geel**. Stoor 'n isometriese aansig (slegs **Shaded** voorkoms) van die

Part-lêer (nie van die drawing file) in 'n **JPEG**-formaat en **stoor dit op eFundi** in die **Exam** voulêer by Assignments (Dit lyk soos 'n foto van die part).

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
<p>(iii) <b>Hoog:</b> Die ruimtelike oriëntasie van die student moet op 'n komplekse drie-assestelsel toegepas word.</p>	<p><b>(1) Kennis :</b></p> <p><i>Herroep:</i> Herroep die korrekte eienskappe van 'n geboorde gat en gemasjineerde vlak. Die student moet die sagteware ken sodat die programme gebruik kan word om te modelleer.</p> <p><i>Herken:</i> herken wiskundige vorms (vlakke en gate) en getalle wat die afmetings verteenwoordig.</p> <p><i>Bereken:</i> doen berekeninge om die nuwe afmetings in die model in te werk.</p> <p><i>Herwin:</i> herwin inligting (syfers en vorms) vanaf die gegewe figuur om die model te skep.</p> <p><b>(2) Toepassing:</b></p> <p><i>Modelleer:</i> Die gegewe model moet gemodifiseer en gemanipuleer word in die nuwe situasie.</p> <p><i>Voorstel:</i> Skep 'n voorstelling vanuit die instruksies.</p> <p><i>Los roetineprobleem op:</i> Volg roetine om die verkillende funksies van die model te skep deur gebruik te maak van die sagteware.</p>
	<p><b>(3) Redenering:</b></p> <p><i>Analiseer:</i> Interpreteer en ontleed die inligting om te kan besluit byvoorbeeld waar die oorsprong is en watter aansig die mees aanduidende is vir optimale oriëntasie.</p> <p><i>Integreer:</i> Werk met verwantskappe tussen verskillende entiteite (lyne, sirkels, ens).</p> <p><i>Evalueer:</i> Die uitkoms van die student se geskepte model moet soos die gegewe uitkoms lyk.</p> <p><i>Oplos van nie-roetineprobleme:</i> Die volgorde van hoe die aparte funksies geïntegreer moet word, noodsaak nie roetine-aktiwiteite.</p>

## VRAAG 2

Almal moet hierdie vraag doen. Hierdie vraag is opgestel vir die Elektriese ingenieurs-in-opleiding van 2011 wat nie voortgaan met Ingenieursgrafika nie.

‘n Elektriese sok of kragprop (Eng. ”plug”) word gebruik om ‘n elektriese apparaat aan ‘n elektriese kragtoevoer te koppel. Die huishoudelike kragprop kan tot 15 ampère enkelfasestroom konstant deurvoer met die lewendige lyn **L** (bruin draad) die neutraal **N** (blou draad) en vir beskerming die gronddraad **G** (groen/geel). Vir groter strome en veral vir drie-fasekrag wat algemeen in die industrie gebruik word, is ‘n doelontwerpte krag sok nodig. So ‘n sok moet die drie fases **L1** (rooi), **L2** (wit) en **L3** (blou) sowel as ‘n neutraal **N** (swart) en die gronddraad **G** (groen/geel) kan huisves. Die grootte van die penne bepaal die grootte van die stroom wat dit konstant kan deurvoer en word volgens sekere standaarde geklassifiseer. Die groter pen is gewoonlik die grondpen. Elke pen het twee skroefies om die draad vas te hou. Die klemskroef aan die agterkant van die huls druk die klein ribbetjies teen die rubberinsetsel wat die kabel vastrek teen die huls.

Gebruik die inligting in die video en skep die **Elektriese-soksamestelling** met al die gegewe onderdele. **Skep ‘n volledige snit-samestellingstekening** in die lengte van die sok. Druk uit en handig in.

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
<p><b>(iv) Gevorderd:</b> Die student moet ingewikkelde ruimtelike oriëntasie gebruik in ‘n onbekende komplekse situasie. Die gegewe inligting moet georganiseer word en die nodige afleidings en veralgemenings moet gemaak word.</p>	<p><b>(1) Kennis:</b> <i>Herroep:</i> Die student moet die sagteware ken sodat die programme gebruik kan word om te modelleer. Herroep die korrekte eienskappe van die verskillende koppeling vir die kragtoevoer. <i>Herken:</i> herken wiskundige vorms (vlakke en gate) en getalle wat die afmetings verteenwoordig. <i>Herwin:</i> herwin inligting (syfers en vorms) vanaf gegewe figuur om die samestellingsmodel te skep.</p>

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
	<p><i>Klassifiseer:</i> Klassifiseer die sub-samestellings wat moet deel vorm van die hoofsamestelling.</p> <p><b>(2) Toepassing :</b></p> <p><i>Voorstel:</i> Vertoon die inligting in 'n baie spesifieke volledige snit-samestellingstekening.</p> <p><i>Modelleer:</i> Die gegewe model moet gemodifiseer en gemanipuleer word in die nuwe situasie.</p> <p><i>Los roetineprobleme op:</i> Gebruik roetine probleemoplossingsvaardighede om die verskillende elektriese onderdele van die model saam te stel.</p>
	<p><b>(3) Redenering :</b></p> <p><i>Analiseer:</i> Bepaal en gebruik die verbande tussen die veranderlikes en objekte. Maak waardevolle gevolgetrekkings vanaf die gegewe inligting om die oriëntasie tussen die verskillende komponente vas te lê.</p> <p><i>Veralgemening:</i> Daar is sekere inligting wat gedoen moet word, bv. die tekening moet wysnommers hê na die onderskeie komponente en daar moet 'n komponentlys wees wat elke komponent identifiseer en inligting daarvoor vertoon.</p> <p><i>Integreer:</i> Kombineer verskillende komponente en verwantskappe (hoe komponente op mekaar pas) om die eindmodel te skep.</p>

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
	<p><i>Evalueer:</i> Voorsien ‘n snit deur die model om aan te toon of die onderdele en funksies korrek en in die regte volgorde saamgestel is.</p> <p><i>Oplos van nie-roetineprobleme:</i> Roetine word gebruik in die skepproses van die samestelling, maar die saamgestelde eindmodel is ‘n onbekende komplekse konteks.</p>

### VRAAG 3

**Maak ’n vryhandskets in 1e-hoekse ortografiese projeksie** van al die nodige aansigte van die **Hanger** vervaardig van medium koolstofstaal. Kies die grootte van die sketse sodat dit ’n redelike groot gedeelte van ’n A4-bladsy beslaan. Gebruik die laaste bladsy van die vraestel genoem SKETSBLADSY – SKETCH PAGE. Plaas al die nodige afmetings op die skets om die produk te kan vervaardig. “Regdeur” word net gebruik indien geen aansig aantoon dat die gat regdeur is nie, soos in hierdie geval. Teken ook ’n raam en titelblok met die nodige inligting. Die pyl wys die vooraansig VA.

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
<p><b>(iv) Gevorderd:</b> Die student moet ingewikkelde ruimtelike oriëntasie gebruik in ‘n onbekende komplekse situasie. Die gegewe inligting moet georganiseer word en die nodige afleidings en veralgemenings moet gemaak word.</p>	<p><b>(1) Kennis :</b></p> <p><i>Herroep:</i> Herroep die term vooraansig en weet wat dit is.</p> <p><i>Herken:</i> herken wiskundige vorms (vlakke en gate) en getalle wat die afmetings verteenwoordig.</p> <p><i>Herwin:</i> herwin inligting (syfers en vorms) vanaf die gegewe figuur om die model te skep.</p>

Wiskundige bevoegdheidsvlak	Kognitiewe vlak
	<p><i>Meting:</i> Verhoudings moet gehandhaaf word.</p> <p><b>(2) Toepassing :</b></p> <p><i>Voorstel:</i> Teken ‘n 1ste-hoekse ortografiese projeksie vanuit die korrekte aansig en met die korrekte afmetings. <i>Modelleer:</i> Genereer ‘n model met ‘n vryhandskets.</p> <p><i>Los roetine probleme op:</i> Die opdrag om ‘n vryhandskets te maak van ‘n gegewe model vanuit ‘n ander aansig is ‘n roetineprobleem.</p> <p><b>(3) Redenering :</b></p> <p><i>Analiseer:</i> Analiseer gegewe inligting om te bepaal wat die bo- en sy-aansig is.</p> <p><i>Integreer:</i> Aansigte moet geöriënteerd wees. Spasiëring en integrasie moet korrek wees.</p> <p><i>Regverdig:</i> Uit die aansigte wat geteken is, kan getoets word of die aansigte weer die oorspronklike model sal opmaak.</p>

Die verskil tussen ‘n vryhandskets en ‘n rekenaarmodel, is dat jy met ‘n rekenaarmodel met gereedskap skep wat op die ontwerp sageware beskikbaar is. Die model wat geskep is, kan jy sien en as jy dan die tekening vanaf die model maak, is dit eenvoudiger want die rekenaar doen meeste van die aanpassing en veranderinge outomaties. ‘n Vryhandskets daarenteen is meer kompleks omdat die model reeds in die student se denke gevisualiseer moet wees. Die model moet dan in die denke geroteer word na die gekose aansig. Die verskillende aansigte wat die student skets, word sodanig geïntegreer om te verseker dat die inligting op alle vlakke van die model korrek weergegee is.

In Tabel 3.6 is 'n opsomming van die gewig wat elke kognitiewe vlak en wiskundige bevoegdheidsvlak dra in die INGM 111-vraestel:

**Tabel 3.6 : Opsomming van die INGM 111-vraestel se ontledings**

Wiskundige bevoegdheidsvlakke		Kognitiewe vlakke	
Laag	<b>0%</b>	Kennis	<b>(\$) 0%</b>
Intermediêr	<b>0%</b>	Toepassing	<b>(\$) 0%</b>
Hoog	<b>66%</b>	Redenering	<b>100%</b>
Gevorderd	<b>33%</b>		

\$ Hoewel suiwer kennis nie as sodanig ingesluit is in 'n spesifieke vraag nie, word dit indirek gebruik vir toepassing en redenering.

Tabel 3.6 dui duidelik aan dat die student se ruimtelike oriëntasie tot die hoogste wiskundige bevoegdheidsvlak ontwikkel moet wees. In lyn met die wiskundige bevoegdheidsvlakke loop die kognitiewe vlakke. Al drie die vrae vereis die redeneringsvaardighede van analisering, veralgemening, integrering, regverdiging en die oplos van nie-roetineprobleme.

### **3.4 SAMEVATTING**

Die doel van die hoofstuk was om die TIMSS-studie se assesseringsraamwerk vir wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vlakke te gebruik om die studente se bevoegdheids- en kognitiewe vlakke te meet en so insig te verkry in wat vereis word deur die onderskeie ingenieursmodules. Die Opknappingskursustoets (Datastel 2) en die drie Junie-eksamenvraestelle (Datastel 3) is kwalitatief ontleed. Die ontleding van die Opknappingskursus se toets het aangetoon dat die vraestel hoofsaaklik uit vrae bestaan wat die middelste wiskundige bevoegdheidsvlakke, Intermediêr en Hoog en kognitiewe vlak, Toepassing toets (kyk Tabel 3.3). Die WISN 111-vraestel bestaan hoofsaaklik uit die eerste drie wiskundige bevoegdheidsvlakke en die eerste twee kognitiewe vlakke (kyk Tabel 3.4). In die ITRW 115-vraestel is 100% van die vrae op die Intermediêre wiskundige

bevoegdheidsvlak en die twee hoogste kognitiewe vlakke, Toepassing en Redenering is vereis (kyk Tabel 3.5). Die INGM 111-vraestel bestaan slegs uit vroe wat die hoogste wiskundige bevoegdheidsvlakke, Hoog en Gevorderd en kognitiewe vlak, Redenering toets (kyk Tabel 3.6). Die raamwerk is deurgaans gebruik vir al die verskillende toepaslike vraestelle, omdat die wiskunde aspek en die vlak van kennis wat deur wiskunde ontwikkel word, bepaal is. Die raamwerk wat gebruik is, is deur twee onafhanklike kundiges nagegaan en geskik bevind (sien paragraaf 2.2). In Hoofstuk 4 word daar korrelasies en verbande getrek tussen die verskillende datastelle om te bepaal wat nodig is in terme van die wiskundige bevoegdheid en die kennis van die studente om suksesvol te wees in hul eerstejaaringenieurstudie.

## **HOOFSTUK 4**

### **DATA-ONTLEDING EN INTERPRETASIE**

#### **4.1 INLEIDING**

Wiskunde op universiteit is meer teoreties of strenger (“more rigorous”) en van ‘n meer abstrakte aard as die ontdekkende, konkrete benadering van die sekondêre skoolomgewing (Luk, 2005:161). Die studente se kognitiewe ontwikkeling moet in berekening gebring word om ‘n suksesvolle oorgang van skool na universiteit te verseker. Soos wat studente se wiskundige bevoegdheid ontwikkel en hulle gebruik van kognitiewe vaardighede verbeter, sal hulle meer gevorderde bevoegdhede aanleer om op ‘n redeneringsvlak met wiskunde te werk.

Kennis van verskillende kognitiewe ontwikkelingsteorieë bied insig oor hoe ‘n student deur verskillende ontwikkelingsprosesse van leer gaan. Hoofstuk 2 beskryf wiskundige bevoegdheid en die verskillende ontwikkelingsprosesse om wiskunde te kan leer met begrip, visie en insig. Verder is ondersoek ingestel na die kognitiewe ontwikkeling van wiskundige denke van eerstejaarstudente (kyk paragraaf 2.4). TIMSS se raamwerk is geïdentifiseer in Hoofstuk 2 waarvolgens wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vlakke bepaal en ontleed is.

Die oorgang van sekondêre tot tersiêre wiskunde noodsaak ‘n oorgang van elementêre tot gevorderde wiskundige denke (Benade, 2012). Elementêre wiskundige denke fokus op konkrete objekte om verwante konsepte en prosesse te veralgemeen, terwyl gevorderde wiskundige denke verwys na die vlak waarop die student met abstrakte konsepte en deduktiewe of herleidingsbewyse moet werk (Smith, 2006). Leerders word nie op skool genoeg blootgestel aan deduktiewe belewenisse nie, gevolglik toon studente beperkte gevorderde redeneringsvermoëns en sukkel met formele abstrakte in hul eerste jaar op universiteit (Stewart & Thomas, 2009). In Kent en Noss (2002) se studie is aangetoon dat die meeste studente onvoldoende wiskundige bevoegdhede het wanneer hulle tot ingenieursprogramme toetree, as gevolg van probleme wat met die toepassing van kern

wiskundige vaardighede verband hou. Dit kan lei tot probleme in begripsvorming in verskeie modules, soos in wiskunde en in verwante vakke (Carr, Bouwe & Fhloinn, 2010).

Verbetering en bevordering van studente se begrip van wiskundige konsepte asook hulle wiskundige toepassingsbevoegdheid is 'n belangrike aspek vir die universiteitsopleiding in wiskunde, ingenieurswese en natuurwetenskappe. Dit voorsien naamlik 'n stewige basis vir suksesvolle professionele ontwikkeling (Hsien Huang, 2010). Daarom is daar dieper ondersoek ingestel na die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke van die studente om te bepaal op watter vlak hulle bevoegdheid moet wees met toetreding tot die universiteit, om sodoende hulle eerstejaaringenieurswese met sukses te voltooi.

In Hoofstuk 3 is die oorgang van sekondêre tot tersiêre wiskunde ondersoek, deur die studente se wiskundige bevoegdheidsvlakke en kognitiewe vlakke te bepaal deur gebruik te maak van die TIMSS-raamwerk, soos uiteengesit in Hoofstuk 2 (sien paragraaf 2.3.1). In hierdie hoofstuk is die bevindinge van die ontledings van die betrokke vraestelle gekorreleer met die prestasie en die ontwikkeling van die studente se wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke.

Die volgende kwantitatiewe ontledings is gedoen:

- Die Gr 12-punt word gebruik om die korrelasie te bepaal met elkeen van die vereiste wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke in die gekose modules wat deur die betrokke eerstejaaringenieurstudente gevolg is.
- Die Opknappingskursustoets is per vraag ontleed om eerstens 'n duideliker prentjie van die vlakke wat ontwikkel is met toetreding tot ingenieurswese te gee. Tweedens is die sterkte van die korrelasies tussen die bevoegdheidsvlak in terme van Wiskundige bevoegdheid en kognisie met toetreding tot die universiteit en die vlak van prestasie in die eerstejaarsingenieursmodules bepaal.
- Die eerstejaaringenieursmodules is per vraag ontleed om die vlak van prestasie op die onderskeie bevoegdheids- en kognitiewe vlakke te meet en om die verband te bepaal met bevoegdheidsvlakke by toetreding van die eerstejaaringenieurstudente.

Vervolgens is afleidings gemaak uit die betroubaarheidstoetse om te bepaal of die toepassing van die TIMSS-raamwerk betroubaar is vir die ontledings van die betrokke vraestelle.

## **4.2 AFLEIDINGS WAT GEMAAK IS UIT DIE BETROUBAARHEIDSTOETSE**

Die Cronbach  $\alpha$ -koëffisiënt is vir elke vlak in die onderskeie vraestelle bepaal (sien paragraaf 3.3.5). Die  $\alpha$ -waarde dui aan hoe betroubaar die studente se bevoegdheid en die vaardigheid, asook die verskillende wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke in die toets gemeet is. Die  $\alpha$ -waarde dui aan of die studente die vaardigheid van die verskillende wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke bemeester het. Indien die  $\alpha$ -waarde laer as 0.5 is vir 'n spesifieke vlak, is dit 'n aanduiding dat die studente nie die samehang van die vrae wat daardie spesifieke vlak toets, verstaan het nie (Nunnally & Bernstein, 1994; Felder & Spurlin, 2005, p. 107).

Interne-item korrelasies is gebruik om te bepaal of die verskillende vrae wat byvoorbeeld op die kognitiewe vlak 1 lê, met mekaar korreleer. Daar is gemiddeldes vir die items gekry indien die konstruk betroubaar getoets is. Indien 'n spesifieke vlak onbetroubaar getoets is word die interne-item korrelasie van die vrae wat daardie spesifieke vlak meet, bepaal om vas te stel of die vrae onder beskouing die oorsaak is van 'n lae Cronbach  $\alpha$ -koëffisiënt. 'n Vraag is uit die data gehaal as die interne-item korrelasie waarde nie tussen 0.15 en 0.55 is nie (Clark & Watson, 1995). Tabel 4.1 toon die vrae aan in elke vraestel ten opsigte van die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke, wat uitgehaal is as gevolg van 'n interne- item korrelasiewaarde wat buite die grense van 0.15 en 0.55 is. Die vrae wat uitgehaal is, word aangedui in die grys blokke.

**Tabel 4.1 : Die vrae met 'n interne-item korrelasie buite die grense 0.15 en 0.55**

Vraestelle	Bevoegdheidsvlakke				Kognitiewe vlakke		
	Laag	Intermediêr	Hoog	Gevorderd	Kennis	Toepassing	Redenering
Op-knappings-kurstoets (Datastel 2)	*Geen	# Hoë $\alpha$ -waarde	# Hoë $\alpha$ -waarde	Vraag 12	Vrae 1, 16, 19, 24, 25	# Hoë $\alpha$ -waarde	Vrae 12, 15, 23
WISN 111 (Datastel 3)	# Hoë $\alpha$ -waarde	# Hoë $\alpha$ -waarde	Vraag 17.1	Vrae 16.1, 16.2	# Hoë $\alpha$ -waarde	# Hoë $\alpha$ -waarde	Vrae 4, 16.1, 16.2, 18, 19.2, 20.2
ITRW 115 (Datastel 3)	*Geen	# Hoë $\alpha$ -waarde	Vraag 3	*Geen	*Geen	# Hoë $\alpha$ -waarde	*Geen
INGM 111 (Datastel 3)	*Geen	*Geen	*Geen	Vrae 2, 3	*Geen	*Geen	# Hoë $\alpha$ -waarde

\* Geen vrae word uitgehaal in terme van die betrokke vlak nie aangesien die vlak nie die hoogste vlak is wat getoets is in die vraestel nie.

# Dit is nie nodig om vrae in die betrokke vlakke van die onderskeie vraestelle uit te haal nie, omdat die Cronbach  $\alpha$ -koëffisiënt betroubaar getoets het.

Eerstens is die betroubaarheid van die studente se **wiskundige bevoegdheidsvlakke** geïnterpreteer en tweedens die betroubaarheid van die **kognitiewe vaardigheidsvlakke** van die studente soos gemeet en bepaal in die Opknappingskursus se toets, Wiskunde 1 (WISN 111), Programmering 1 (ITRW 115) en Ingenieursgrafika 1 (INGM 111) (sien paragraaf 3.3.5). Tabel 4.2 dui die Cronbach  $\alpha$ -koëffisiënte vir die verskillende wiskundige bevoegdheidsvlakke van die onderskeie vraestelle aan.

**Tabel 4.2: Die betroubaarheid van die wiskundige bevoegdheidsvlakke in die onderskeie vraestelle (Cronbach  $\alpha$ )**

Wiskundige bevoegdheidsvlakke	Opknappingskursustoets	Wiskunde WISN111	Programmering ITRW 115	Ingenieursgrafika INGM 111
<b>Laag</b>	<sup>+</sup> Kan nie getoets word nie.	* 0.65	#	#
<b>Intermediêr</b>	* 0.69	* 0.82	* 0.72	#
<b>Hoog</b>	* 0.54	* 0.5	#	<sup>+</sup> Kan nie getoets word nie.
<b>Gevorderd</b>	0.05	0.37	#	*0.46

\* Cronbach alfa  $\geq 0.5$

<sup>+</sup> Die vlakke Laag en Hoog in die Opknappingskursustoets, Programmering- en Ingenieursgrafika-vraestel kan nie vir betroubaarheid getoets word nie, aangesien die vlakke net een keer voorkom in die onderskeie vraestelle.

# Die vlak Laag in die Programmering - en Ingenieursgrafika-vraestel word nie gemeet nie, en is dus nie van toepassing nie, so ook die vlak Intermediêr in die Ingenieursgrafika-vraestel en die Vlak Hoog en Gevorderd in die Programmerings-vraestel.

Tabel 4.2 toon aan dat die laagste vlak ‘**Laag**’ van wiskundige bevoegdheid net deur die WISN 111-vraestel getoets is en voldoende betroubaar is met ‘n  $\alpha$ -waarde van 0.65. Die afleiding is gemaak dat die studente die vrae wat die lae vlak van wiskundige bevoegdheid toets, wel kan doen. Die **Intermediêre**-vlak toets voldoende tot hoog betroubaar in die Opknappingstoets (0.69), WISN 111 (0.82) en ITRW 115-vraestel (0.72). Die Programmeringsvraestel het uit drie vrae bestaan (kyk paragraaf 3.3.5.3) waarvan al drie vrae die Intermediêre vlak vereis. In die Ingenieursgrafikavraestel (kyk paragraaf 3.3.5.4) is dié vlak nie as die hoogste vlak getoets nie. Die bevoegdheidsvlak ‘**Hoog**’ toets betroubaar in die Opknappingstoets (0.54), en in die WISN 111 (0.5) vraestel. In die Ingenieursgrafikavraestel kan die wiskundige bevoegdheidsvlak ‘Hoog’ nie getoets word vir betroubaarheid nie, aangesien die vlak net eenkeer voorkom in die vraestel. Dis duidelik aangetoon dat die **Gevorderde** bevoegdheidsvlakke in die

Opknappingskursustoets (0.05) en WISN 111-vraestel (0.37) nie betroubaar gemeet is nie, maar wel betroubaar is in die INGM 111-vraestel. Daaruit is afgelei dat die kombinasie van vrae wat gegropeer is onder Gevorderde bevoegdheidsvlakke in die Opknappingskursustoets en WISN 111-vraestel nie dieselfde patroon getoon het onder al die studente nie, met ander woorde die vrae wat gegropeer is onder 'n spesifieke vlak korreleer nie met mekaar ten opsigte van die suksesvolle of onsuksesvolle beantwoording van die vrae nie. Daar kan nie verdere ontleding gedoen word in terme van die Gevorderde wiskundige bevoegdheidsvlak in die twee vraestelle waar swak betroubaarheid getoon is nie.

In die Ingenieursgrafikavraestel word in al drie vrae (kyk paragraaf 3.3.5.4) die hoogste Gevorderde wiskundige bevoegdheidsvlak vereis. Die vlak is betroubaar gemeet met 'n  $\alpha$ -waarde van 0.46 ( $\alpha \approx 0.5$ ), wat beteken dat die studente die samehang van die vrae kon doen. By ingenieurstekeninge het die student met die toegepaste meetkundige aspekte van wiskunde te doen. Daar word van studente verwag om in meetkundige terme te ontleed en nie-roetineprobleme op te los. By tekeninge is dit 'n spesifieke bevoegdheid ten opsigte van beskrywende meetkunde.

By programmering is daar kognitiewe aspekte van wiskunde nodig, maar daar word nie spesifiek wiskundige bevoegdheid verwag nie. Algemene probleemoplossende vaardigheid, en nie spesifiek wiskundige vaardighede is ter sprake in programmering.

In Tabel 4.3 is die Cronbach  $\alpha$ -koëffisiënte aangetoon vir die kognitiewe vlakke vir die onderskeie vraestelle.

**Tabel 4.3: Die betroubaarheid van die kognitiewe vlakke in die onderskeie vraestelle**

Kognitiewe vlakke	Opknappingskursustoets	Wiskunde WISN111	Programmering ITRW 115	Ingenieursgrafika INGM 111
<b>Kennis</b>	0.42	* 0.79	#	#
<b>Toepassing</b>	* 0.73	* 0.74	* 0.69	#
<b>Redenering</b>	0.22	0.37	<sup>+</sup> Kan nie getoets word nie	* 0.66

\* Cronbach alfa  $\geq 0.5$

+ Die Redeneringsvlak kom net eenkeer voor in die Programmeringsvraestel en kan dus nie vir betroubaarheid toets nie.

# Die Kennisvlak in die Programmerings- en Ingenieursgrafika-vraestel en die Toepassingsvlak in die Ingenieursgrafika-vraestel word nie gemeet nie en is dus nie van toepassing nie.

Die **Kennisvlak** toets met hoë betroubaarheid in die WISN 111-vraestel (0.79) maar met onvoldoende betroubaarheid in die Opknappingstoets (0.42). Die gevolg is dat daar nie verder korrelasies getrek kan word met die kennisvlak van die Opknappingstoets nie. Die kombinasie van vrae wat gegroepeer is onder die Kennisvlak van die WISN111-vraestel toon wel 'n korrelasie met mekaar ten opsigte van die suksesvolle of onsuksesvolle beantwoording onder al die studente en het dus 'n hoë betroubaarheid (0.79) tot gevolg. In die WISN 111 vraestel is definisies en bewyse gevra wat die studente vooraf kon leer, wat 'n hoë betroubaarheid tot gevolg het. In die Opknappingkursustoets is meer algemene wiskundige kennis verwag wat 'n lae interne korrelasie tussen die onderskeie vrae tot gevolg het.

Die betroubaarheid van die **Toepassingsvlak** in die Opknappingskursustoets (0.73), WISN 111 (0.74) en ITRW 115 (0.69) vraestelle het 'n hoë  $\alpha$ -waarde, wat beteken dat die studenteprestasie op die kognitiewe vlak van Toepassing konsekwent voldoende tot hoog betroubaar is. Die **Redeneringsvlak** is in die Opknappingstoets (0.22) en WISN 111 (0.37) nie betroubaar nie. Die studente was onseker oor die benadering en oplossing van die vrae wat Redenering geverg het. Andersins is die Cronbach  $\alpha$ -waarde van die redeneringsvlak (0.66) wat getoets is in die Ingenieursgrafikavraestel in al drie die vrae (sien paragraaf 3.3.5.4) hoog genoeg om voldoende betroubaarheid te bevestig.

### *Sintese van die data-ontleding se betroubaarheid*

In die Opknappingskursustoets is net die wiskundige bevoegdheidsvlakke 'Intermediêr' (0.69) en 'Hoog' (0.54) (kyk Tabel 4.2) en die kognitiewe vlak 'Toepassing' (0.73) (kyk Tabel 4.3) betroubaar gevind. By WISN 111 is die drie lae wiskundige bevoegdheidsvlakke Laag (0.65), Intermediêr (0.82) en Hoog (0.5) en die eerste twee kognitiewe vlakke Kennis (0.79) en Toepassing (0.74) betroubaar gevind. In die ITRW 115-vraestel is die bevoegdheid op Intermediêre vlak (0.72) en die kennis op Toepassingsvlak (0.69) betroubaar getoets. Die hoogste bevoegdheidsvlak, Gevorderd en

die hoogste kognitiewe vlak, Redenering is nie betroubaar gemeet in die Opknappingskursustoets, WISN 111- en die ITRW 115-vraestel nie. Dit beteken dat die kombinasie van vroeë wat gegroepeer is onder die hoogste bevoegdheids- en kognitiewe vlakke nie onderling korreleer nie. In die INGM 111-vraestel het die hoogste wiskundige bevoegdheidsvlak, Gevorderd (0.46) en kognitiewe vlak, Redenering (0.66) wel betroubaar gemeet.

Die bepaling van die korrelasies tussen die toetrepunte van die studente en die punte van die studente vir die Junie-eksamenvraestelle, sal meer duidelikheid gee oor hoe die Gr 12 - Wiskundepunt en Opknappingskursustoets verband hou met die vlak waarop die studente presteer in die ingenieursmodules.

### **4.3 BEVOEGDHEID VAN DIE EERSTE JAAR- INGENIEURSTUDENTE**

Vervolgens is bepaal of die Gr 12-wiskundepunt en Opknappingskursus se punt en gemiddeldes per vlak korreleer met hoe die student op die hoogste denkvlakke gevaar het. Die totale punt en die gemiddeldes per vlak vir die onderskeie modules is vergelyk, om die bevoegdheid van die studente te bepaal. Die bevoegdheid van die studente is beskryf in terme van hulle wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlak. Die Gr 12-wiskundepunt is gekorreleer met elke module se totale punt asook met elke onderlinge bevoegdheids- en kognitiewe vlakke. Dieper insig is verkry deur die bepaling van korrelasies tussen die vlakke van wiskundige bevoegdheid en die kognitiewe vaardighede van die studente met hulle Gr 12-punt en Opknappingskursustoetspunt. Die Opknappingskursustoets is ontleed in terme van wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vaardigheid (sien paragraaf 3.3.5.1) om 'n duideliker prentjie te gee van die bevoegdheid van die student met toetrede tot die universiteit.

Uit die literatuurstudie het dit duidelik na vore gekom dat daar 'n verskuiwing en ontwikkeling van wiskundige denke moet plaasvind, vanaf 'n primêre prosedurele of algoritmiese skoolbenadering tot 'n abstrakte en formele voorstelling van konsepte deur definisies op universiteitsvlak (kyk paragraaf 2.2).

Kreatiewe denke en redenering speel 'n belangrike rol in die oplossing van wiskundige probleme (Benade, 2012). Studente gaan deur verskillende vlakke van kognitiewe ontwikkeling terwyl wiskunde met begrip geleer word. Volgens Van Hiele (2002) en Tall (2010) (kyk paragraaf 2.4.2 en 2.5) begin die verstaan van wiskunde met visualisering. Van Hiele en Tall stem saam dat die ontwikkelingsproses tot by kreatiewe denke en konseptuele begrip by die visuele vlak (beliggaamde wêreld) begin en dan ontwikkel na die beskrywende vlak (simboliese wêreld) tot by die formele vlak (formele wêreld) (Pegg & Tall, 2005). Wanneer studente universiteit toe kom moet sekere kognitiewe vaardighede ontwikkel wees om die betrokke ingenieursmodules met sukses te kan slaag.

In Benade (2012) se studie is aangetoon dat die studente se vlak van kognitiewe ontwikkeling op 'n visuele en teoretiese vlak is, wat 'n aanduiding is dat die studente nie voorbereid is vir die formele wêreld van aksiome, definies en bewyse nie. Hierdie studie se resultate blyk ook, net soos in Benade se studie, dat die studente se gememoriseerde en algebraïese toepassingsvaardighede voldoende ontwikkel is, maar dat hulle sukkel wanneer kreatiewe redenering vereis word (sien paragraaf 4.2). Die studente moet geleenthede hê om hulle kognitiewe vaardigheid van redenering (byvoorbeeld analisering, integrering en oplos van nie-roetine probleme) te ontwikkel en te oefen.

Die gemiddeldes en standaardafwykings (die verspreiding van die data rondom die gemiddeld) van die Gr 12-wiskundepunt, Opknappingskursustoets, Wiskunde, Programmering en Ingenieursgrafika is vervolgens aangetoon in Tabel 4.4. Elke wiskundige bevoegdheidsvlak en kognitiewe vaardigheidsvlak wat betroubaar getoets is, se gemiddeldes en standaardafwykings is ook aangetoon in Tabel 4.4. Sodoende is die wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vlakke van die eerstejaaringenieurstudente by toetreding tot hulle studie vasgestel en dan vergelyk met die studente se punte vir hulle onderskeie eerstejaarmodules.

**Tabel 4.4: Gemiddelde en standaardafwyking van die Gr12-wiskundepunt, Opknappingskursustoets, Wiskunde, Programmering en Ingenieursgrafika**

Datastel		Beskrywende statistiek	
		Gemiddeld (%)	Standaardafwyking
<b>Gr12 Wiskunde-punt</b>		82.29	8.59
<b>Opknappingskursus toets</b>	<b>Totale Punt</b>	<b>64.6</b>	<b>4.43</b>
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 2 (Intermediêr)	87.9	2.91
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 3 (Hoog)	51.0	1.81
	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)	67.2	3.34
<b>WISN 111</b>	<b>Totale punt</b>	<b>50.2</b>	<b>17.76</b>
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 1 (Laag)	39.46	4.51
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 2 (Intermediêr)	60.65	14.93
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 3 (Hoog)	64.78	8.7
	Kognitiewe vlak 1 (Kennis)	50.7	8.56
	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)	55.0	18.48
<b>ITRW 115</b>	<b>Totale punt</b>	<b>69.79</b>	<b>21.54</b>
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 2 (Intermediêr)	69.79	21.54
	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)	83.9	9.09
	Vraag 3 (Redenering)	59.76	10.71
<b>INGM 111</b>	<b>Totale punt</b>	<b>63.5</b>	<b>9.93</b>
	Kognitiewe vlak 3 (Redenering)	63.5	9.93

Die geselekteerde groep studente wat ingeskryf is vir ingenieurswese se gemiddelde Gr 12 -Wiskundepunt (82.29%) (kyk Tabel 4.4) is hoog. Die Opknappingskursustoetspunt se gemiddeld vir dieselfde groep studente het gedaal na 64.6%. Die toetree-inligting van die studente ten opsigte van die vlakke van wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vaardigheid is meer beskrywend en insiggewend as die Gr 12-wiskundepunt. Die studente het gesukkel met die vrae wat die wiskundige bevoegdheidsvlak 'Hoog' (51%) meet, wat 30% van die vraestel uitgemaak het (sien Tabel 3.3). 'n Moontlike rede waarom die gemiddeld afgeneem het vanaf die Gr 12-wiskundepunt na die Opknappingskursustoetspunt is dat daar meer hoëvlak wiskundige bevoegdheid en kognisie verwag is. Wat interessant is, is dat die lae wiskundige bevoegdheidsvlak en die laagste kognitiewe vlak 'Kennis' nie betroubaar getoets is nie, waaruit 'n moontlike gevolgtrekking gemaak is dat die grondslag en basis van wiskundige bewerkings nie vasgelê is by die studente op skoolvlak nie.

Ook by die WISN 111-vraestel behels die vrae wat kennis (50.7%) en die lae wiskundige bevoegdheidsvlak (39.46%) toets, begrip met die herroeping van definisies en bewyse. Byvoorbeeld van die vrae in die WISN 111-vraestel wat as Kennis geklassifiseer is, soos vraag 14, 15 en 27 behels herroeping met begrip (Sien Addendum B). Die gemiddeld vir die WISN 111-vraestel (50.2%) is laag. Die WISN 111-vraestel bestaan uit 24% lae-vlak wiskundige bevoegdheidsvrae (kyk Tabel 3.4) en die vlak se gemiddeld is 'n lae 39.46%. Die kognitiewe vlak 'Kennis' se gemiddeld is 50.7% en beslaan 29% van die vraestel (kyk tabel 3.4). Hieruit kan afgelei word dat die studente nie voldoende begrip het in die gebruik van hul basiese wiskundige bevoegdhede en lae kognitiewe vaardighede. Die hoogste wiskundige bevoegdheidsvlak 'Gevorderd' wat net 2% van die vraestel uitmaak en die hoogste kognitiewe vlak 'Redenering' wat 9% van die vraestel uitmaak is onbetroubaar getoets, en geen verdere afleidings kan oor sodanige denkvlakke gemaak word nie. Uit die ontleding is afgelei dat die studente beter presteer het in die vrae wat die middelste twee wiskundige bevoegdheidsvlakke 'Intermediêr' en 'Hoog' en die middelste kognitiewe vlak 'Toepassing' getoets het, as in die vrae wat die laagste en die hoogste wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke vereis het.

Die gemiddeld vir die Programmeringsvraestel ITRW 115 en die wiskundige bevoegdheidsvlak Intermediêr is 69.76%. Uit die ontleding is aangetoon dat die kognitiewe vlak 'Toepassing' 'n hoë gemiddelde persentasie van 84% gelever het. Al drie die vrae

toets tot op die Intermediêre vlak en 66% van die vraestel bestaan uit Toepassingsvrae (kyk tabel 3.5). Die hoogste kognitiewe vlak 'Redenering' is getoets in vraag 3 (kyk paragraaf 3.3.5.3) en die vraag se gemiddeld is 59.76% (kyk Tabel 4.4). Die gevolgtrekking is gemaak dat die studente oor voldoende wiskundige bevoegdheid beskik tot op die Intermediêre vlak asook tot op die kognitiewe vlak 'Toepassing'. Vraag 3 wat Redenering vereis het kon nie vir betroubaarheid getoets word nie, maar vanuit die daling in die gemiddeld vir daardie vraag is afgelei dat die studente sukkel met dié vraag wat redeneringsvaardighede benodig.

Die Ingenieursgrafikavraestel INGM 111 se ontleding dui 'n gemiddeld van 63.5% aan waarvan al drie die vrae kognitiewe redeneringsvaardighede vereis (kyk tabel 3.6) en wat betroubaar getoets is.

#### **4.4 KORRELASIES MET DIE GR 12-WISKUNDEPUNT EN DIE OPKNAPPINGSTOETSPUNT**

Die stand van wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente by toetreding tot hulle studie is aangetoon deur Tabel 4.4 en bespreek in terme van die gemiddeldes vir die Gr 12-wiskundepunt, die Opknappingstoetspunt en vir die vlakke van wiskundige bevoegdheid en kennis (kyk paragraaf 4.3).

Verdere insig is verkry in wat die bepalingsfaktor is vir die studente se sukses in hul eerstejaaringenieurstudie, deur verbande te trek tussen die studente se wiskundige bevoegdheid waarmee hulle tot ingenieurswese toetree en hul prestasie in eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis. Die verbande is bepaal deur gebruik te maak van 'Spearman Rank Order Correlations'. Die korrelasies wat bepaal is deur 'Spearman Rank Order Correlations' is voorgestel deur r-waardes wat beskou word as riglynwaares en nie afsny punte nie (Steyn & Ellis, 2009). Die sterkte van die korrelasies is soos volg bepaal (Steyn & Ellis, 2009):

- r-waarde = 0.1 dui op 'n klein korrelasie en geen betekenisvolheid tussen die veranderlikes nie.
- r-waarde = 0.3 dui op 'n medium korrelasie met 'n effense verband tussen die veranderlikes maar het geen praktiese betekenis nie.

- $r$ -waarde = 0.5 dui op 'n groot korrelasie tussen die veranderlikes en is prakties betekenisvol. Voorspellings kan gemaak word op die korrelasie tussen die betrokke veranderlikes.

Eerstens is daar bepaal of die aanvangsinligting van die studente se Gr 12-wiskundepunt en hulle Opknappingskursustoetspunt korreleer. Verbande is getrek tussen Datastel 1 (Gr 12-Wiskunde Persentasie) en Datastel 2 (Opknappingskursustoetspunt en die verskillende bevoegdheidsvlakke wat betroubaar getoets is) (kyk paragraaf 3.3.3.1). Tweedens is daar korrelasies bepaal tussen die wiskundige bevoegdheid by toetreding van die studente en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis.

#### **4.4.1 Korrelasie tussen die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoetspunt**

Die korrelasies tussen die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoetspunt asook met die bevoegdheids- en kognitiewe vlakke is aangetoon deur Tabel 4.5. Uit die tabel is dit duidelik dat die aanvangsinligting van die studente sterk korreleer. Die Gr 12-wiskundepunt het 'n groot korrelasie met die totale punt van die studente vir die Opknappingskursustoets (0.51) en die Toepassings-kognitiewe vlak, maar toon 'n klein korrelasie met die wiskundige bevoegdheidsvlak 'Intermediêr' (0.45) en die wiskundige bevoegdheidsvlak 'Hoog' (0.42). Dit beteken dat die Gr 12-wiskundepunt 'n goeie voorspeller is vir die Toepassingselement in die Opknappingskursustoets.

Die totale punt en die verskillende wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke van die Opknappingskursustoets het 'n baie groot onderlinge korrelasie. Die Intermediêre wiskundige bevoegdheidsvlak (0.91) en die Toepassingskognitiewe vlak (0.93) toon albei 'n naby aan ideale korrelasie met die totale punt van die Opknappingskursus, wat beteken dat die tweede vlak van wiskundige bevoegdheid en kennis 'n goeie voorspeller is vir die studente se vlak van prestasie in die Opknappingskursus.

**Tabel 4.5: Korrelasies tussen die Gr12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoetspunt en bevoegdheidsvlakke**

Datastel	Gr12 Wiskunde- punt	Opknappingskursustoets				
		Totaal	Wiskundige Bevoegd- heidsvlak 2	Wiskundige Bevoegdheids- vlak 3	Kognitiewe vlak 2	
Gr12 -Wiskundevlak %	<b>1.00</b>	<b>0.51</b>	0.45	0.42	0.51	
<b>Opknappingskursustoets</b>	<b>Totaal</b>	<b>0.51</b>	<b>1.00</b>	<b>0.91</b>	<b>0.77</b>	<b>0.92</b>
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 2	0.45	<b>0.91</b>	<b>1.00</b>	0.51	0.88
	Wiskundige bevoegdheidsvlak 3	0.42	<b>0.77</b>	0.51	<b>1.00</b>	0.74
	Kognitiewe vlak 2	0.51	<b>0.92</b>	0.88	0.74	<b>1.00</b>

#### **4.4.2 Korrelasie tussen die wiskundige bevoegdheid by toetrede en prestasie in eerstejaarsingenieursvakke.**

Tweedens is daar korrelasies bepaal tussen die wiskundige bevoegdheid van die studente by toetrede en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis. Dit word voorgestel deur Tabel 4.6. Die grys blokke dui die korrelasies aan tussen die veranderlikes wat prakties betekenisvol is.

**Tabel 4.6: Korrelasies met die Gr 12-wiskundepunt en opknappingskursus-toetspunt met die onderskeie Junie-eksamenvraestelle**

Datatstel	Gr12 Wiskunde- punt	OPKNAPPINGSKURSUSTOETSPUNT				
		Totaal	Wiskundige Bevoegdheids- vlak 2 (Inter- mediêr)	Wiskundige Bevoegdheids- vlak 3 (Hoog)	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)	
<b>Totaal</b>	<b>0.55</b>	<b>0.48</b>	<b>0.374</b>	<b>0.466</b>	<b>0.45</b>	
<b>WISN 111</b>	Wiskundige bevoegdheids- vlak 1 (Laag)	0.43	0.40	0.35	0.35	0.39
	Wiskundige bevoegdheids- vlak 2 (Intermediêr)	0.57	0.44	0.33	0.45	0.40
	Wiskundige bevoegdheids- vlak 3 (Hoog)	0.50	0.46	0.35	0.47	0.45
	Kognitiewe vlak 1 (Kennis)	0.42	0.42	0.33	0.40	0.40
	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)	0.56	0.44	0.34	0.44	0.42
	<b>Totaal</b>	<b>0.48</b>	<b>0.58</b>	<b>0.59</b>	<b>0.41</b>	<b>0.54</b>
<b>ITRW 115</b>	* Vraag 3	0.54	0.53	0.55	0.39	0.51
	Wiskundige bevoegdheids- vlak 2 (Intermediêr)	0.48	0.58	0.59	0.41	0.54
	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)	0.58	0.54	0.52	0.37	0.46

Datatstel		Gr12 Wiskunde- punt	OPKNAPPINGSKURSUSTOETSPUNT			
			Totaal	Wiskundige Bevoegdheids -vlak 2 (Inter- mediêr)	Wiskundige Bevoegdheids - vlak 3 (Hoog)	Kognitiewe vlak 2 (Toepassing)
INGM 111	<b>Totaal</b>	<b>0.33</b>	<b>0.28</b>	<b>0.23</b>	<b>0.26</b>	<b>0.28</b>
	* Vraag 2	0.25	0.20	0.13	0.23	0.21
	* Vraag 3	0.23	0.16	0.15	0.12	0.15
	Kognitiewe vlak 3 (Redenering)	0.33	0.28	0.23	0.26	0.28

\* Vraag 3 van die ITRW 115-vraestel is ingesluit in die korrelasietabel aangesien die vraag die enigste vraag in die vraestel is wat die hoogste kognitiewe vlak ‘Redenering’ vereis en betroubaarheid nie getoets kon word nie. Uit die ontleding is dit duidelik dat die Redeneringsvlak wat vereis is in die ITRW 115-vraestel goed korreleer met die toetree-inligting van die studente, behalwe met die studente se wiskundige bevoegdheidsvlak by toetrede ‘Hoog’ (0.39). Vraag 2 en 3 in die INGM 111-vraestel vereis die wiskundige bevoegdheidsvlak ‘Hoog’ en die hoogste kognitiewe vlak ‘Redenering’ wat baie klein korrelasies toon met die toetree-inligting van die studente.

Die bespreking van Tabel 4.6 is in drie beskrywende dele opgedeel.

*Eerstens* is die verband tussen die totale van die toetree-inligting van die studente en die totale van die onderskeie eerstejaarsvakke bespreek. Die Gr 12-wiskundepunt het ‘n groot korrelasie met die totaal vir die WISN 111 ( $r = 0.55$ ) en die ITRW 115 ( $r = 0.48$ ) vraestel, maar ‘n klein korrelasie met die totaal vir die INGM 111 ( $r = 0.33$ ) vraestel. Die Opknappingskursustotaal toon ook ‘n groot korrelasie met die eerstejaarsvak ITRW 115 ( $r = 0.58$ ) en die WISN 111 ( $r = 0.48$ ) se totale punte maar toon ook ‘n klein korrelasie met die INGM 111 ( $r = 0.28$ ) se totale punt. Hieruit is afgelei dat die Gr 12-wiskundepunt en die Totaal vir die Opknappingskursustoets nie ‘n goeie voorspeller is vir die vlak van prestasie in die INGM 111-vraestel nie.

Verdere insigte is verkry deur die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke te korreleer met die studente se toetree-inligting.

*Tweedens* is korrelasies tussen die wiskundige bevoegdheidsvlakke bepaal. Die wiskundige bevoegdheidsvlak 1 ‘Laag’ wat slegs betroubaar getoets is in die WISN 111-vraestel toon ‘n klein korrelasie met die Gr 12-wiskundepunt ( $r = 0.43$ ), die Opknappingskursus se totale toetspunt ( $r = 0.40$ ) en met die Opknappingskursus se vlakke van wiskundige bevoegdheid en kennis. Die gemiddeld vir die vrae wat die laagste wiskundige bevoegdheid ‘Laag’ getoets het, is 39% (sien Tabel 4.4), wat ‘n aanduiding is dat die studente nie die nodige basiese wiskundige vaardighede het om die vrae te beantwoord nie.

In die vraestelle vir WISN 111 ( $r = 0.57$ ) en ITRW 115 ( $r = 0.48$ ) toon die wiskundige bevoegdheidsvlak ‘Intermediêr’ ‘n groot korrelasie met die Gr 12-wiskundepunt. Die Intermediêre vlak in die Opknappingskursus toon geen korrelasie met die vlak van prestasie van die WISN 111-vraestel nie, maar toon ‘n groot korrelasie met die totale punt en al die betrokke wiskundige bevoegdheidsvlakke van die ITRW 115-vraestel.

Die wiskundige bevoegdheidsvlak 3 ‘Hoog’ toon ‘n groot korrelasie tussen die WISN 111 en die Gr 12-Wiskunde-punt (0.50), maar toon geen korrelasie tussen die Opknappingskursustoets en enige van die ander eerstejaarsvakke nie. Dus is die Gr 12-wiskundepunt ‘n goeie voorspeller vir die vlak van prestasie in die vrae wat die wiskundige bevoegdheidsvlak ‘Hoog’ toets in die WISN 111-vraestel.

*Derdens* is die korrelasies tussen die kognitiewe vlakke van die toetree inligting en die eerstejaarsvakke bespreek. In die WISN 111-vraestel korreleer die kognitiewe vlak ‘Kennis’ nie prakties betekenisvol met die Gr 12-wiskundepunt of met die Opknappingskursustoets nie. Die Kennisvlak is onbetroubaar gemeet in die Opknappingskursustoets, en dus is daar nie verdere korrelasies met dié vlak van kennis bepaal nie. Die Gr 12-wiskundepunt toon ‘n groot korrelasie met die tweede kognitiewe vlak ‘Toepassing’ in die WISN 111- ( $r = 0.56$ ) en ITRW 115-vraestel ( $r = 0.58$ ). Die vrae in die Opknappingskursustoets wat die vlak ‘Toepassing’ toets, korreleer ook sterk met die totaal ( $r = 0.54$ ) en Vraag 3 ( $r = 0.51$ ) van die ITRW 115-vraestel.

Die derde kognitiewe vlak ‘Redenering’ wat slegs betroubaar getoets is in die INGM 111-vraestel toon geen korrelasie met die Gr 12-wiskundepunt of die Opknappingskursustoetspunt of vlakke van ontwikkeling nie. Dus is die toetree-inligting van die studente geen voorspeller vir die vlak van prestasie in Ingenieursgrafika nie.

## 4.5 GEVOLGTREKKING

Die empiriese studie het die stand van die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente by toetreding tot hulle studie ondersoek en die verband bepaal met hulle prestasie in eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis.

Die betroubaarheid van die data deur die TIMSS-raamwerk as meetinstrument is gemeet en uit die bevindinge is die volgende afgelei:

- Die hoogste en laagste vlakke toon 'n lae betroubaarheid wat beteken dat hierdie kombinasie van vrae wat gegroepeer is onder die onderskeie lae en hoë vlakke, nie dieselfde patroon getoon het onder al die studente nie. Byvoorbeeld het die korrelasie van individuele studente se prestasie ten opsigte van 'n spesifieke vraag wat geklassifiseer is as 'n Kennisvraag in vergelyking met die ander studente se prestasie ten opsigte van dieselfde vraag en vergelyking met hoe hulle met die ander Kennisvrae gedoen het, nie 'n patroon gevorm nie. Die studente is onseker hoe om die vrae wat gevorderde wiskundige bevoegdheid en redeneringsvaardighede vereis, te benader. Hieruit kan afgelei word dat studente moontlik onvoldoende onderrig is in gevorderde wiskundige bevoegdheid.
- Dit is duidelik dat die ingenieurs wat ingeskryf het in 2011 as eerstejaaringenieurstudente die top van hulle Gr 12-wiskundeklas was met 'n gemiddeld van 82.3% met 'n klein verspreiding rondom die gemiddeld. Die ander deel van die toetree inligting van die studente is die data wat verkry is vanuit die Opknappingskursus. Die gemiddeld vir die Opknappingskursustoets is 64.6% met 'n wyer verspreiding rondom die gemiddeld. Die gemiddeld van die Opknappingskursus- toets gee 'n ander prentjie van die toetree-inligting van die groep eerstejaar ingenieurstudente.
- Die ontleding van die Opknappingskursustoets in terme van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke beskryf die bevoegdheid van die eerstejaaringenieurs duideliker as die Gr 12-wiskundepunt. Uit die vlakontledings van die Opknappingskursustoets is dit duidelik dat die studente se denke wel tot die middelste wiskundige bevoegdheidsvlak 'Intermediêr' ontwikkel is. Die studente se toepassingsvaardighede byvoorbeeld om te kan selekteer, te voorspel, te modelleer, te implementeer en om roetineprobleme op te los waarmee die studente hulle

ingenieurstudie betree, is ook goed ontwikkel. Die Gr 12-wiskundepunt korreleer wel goed met die totale punt vir die Opknappingskursustoets asook met die Toepassingsvaardigheid van die studente, maar toon 'n medium korrelasie met die wiskundige bevoegdheidsvlak 'Hoog'. Geen korrelasies kon bepaal word met die hoogste vlak van wiskundige bevoegdheid of met die hoogste kognitiewe vlak 'Redenering' nie as gevolg van lae betroubaarheid. Hieruit kan afgelei word dat die studente nie genoeg op hierdie vlak uitgedaag is op skool nie en dus nie geleentheid kry om redeneringsvaardighede te ontwikkel nie.

- 'n Moontlike rede hoekom die gemiddeld van die Opknappingskursustoets laer is as die Gr 12-wiskundepunt is omdat daar 'n groter persentasie Gevorderde wiskundige bevoegdheidsvrae en Redeneringsvaardighede vereis is in die Opknappingskursustoets as in die Gr 12-wiskundevraestel.
- Die wiskundige bevoegdheid van die studente by toetree tot hulle studie is goed ontwikkel in terme van hulle Toepassingsvaardighede en wiskundige bevoegdheid van die vlakke 'Intermediêr' en 'Hoog'. Daar is egter 'n bekommernis oor die studente se vlak van ontwikkeling in die laagste kognitiewe vlak 'Kennis' en hoogste kognitiewe vlak 'Redenering' en wiskundige bevoegdheidsvlak 'Gevorderd'.
- Die Gr 12-wiskundepunt toon 'n groot korrelasie met die WISN 111-vraestel en die ITRW 115-vraestel, maar net met die tweede wiskundige bevoegdheidsvlak 'Intermediêr' en die tweede kognitiewe vlak 'Toepassing'. Die Opknappingskursustoets se totale punt, wiskundige bevoegdheidsvlak 'Intermediêr' en die kognitiewe vlak 'Toepassing', toon ook 'n groot korrelasie met die ITRW 115-vraestel se totale punt sowel as met die tweede vlak van wiskundige bevoegdheid en kognisie. Uit die bepaling van die korrelasies is dit duidelik dat die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoets 'n goeie voorspeller is vir die vlak van prestasie van die studente op die Intermediêre en Toepassingsvlak. Die toetree-inligting is nie 'n goeie voorspeller vir die vlak van prestasie op gevorderde wiskundige bevoegdheid en redeneringsvaardighede nie.

Geen korrelasies kon bepaal word tussen die toetree-inligting van die studente op die hoogste wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke in die eerstejaarsvakke nie, aangesien die vlakke onbetroubaar getoets is. Geen korrelasies is gevind tussen die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente by toetree tot hulle studie en die

INGM 111-vraestel nie. Vraag 2 en 3 van die Ingenieursgrafika vraestel vereis die hoogste wiskundige bevoegdheidsvlak 'Gevorderd' en al drie die vrae in die vraestel vereis die hoogste kognitiewe vlak 'Redenering'. Dus toon die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoets geen verband met die vlak van prestasie in die INGM 111 vraestel nie en het dit dus nie betekenisvolle voorspellingswaarde vir sukses in die INGM 111-module nie.

Aannames met betrekking tot studente se (verwagte) hoëvlak sukses in hulle eerstejaaringenieurmodules word gemaak op grond van die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoets se resultate, maar dit toon geen verband met die student se verwagte hoë-vlak wiskundige prestasie aan die einde van die eerste semester van hulle eerstejaar nie. Sodanige aannames mag dus op wanvoorstellings van die werklikheid dui. Beter gronde vir meer geldige aannames wat tot meer betekenisvolle optrede ten opsigte van die ondersteuning en ontwikkeling van studente kan lei, behoort verder ondersoek te word.

In Hoofstuk 5 is die studie se bevindinge saamgevat en is gevolgtrekkings gemaak waarvolgens aanbevelings gemaak is ten opsigte van ondersteuning vir eerstejaaringenieurstudente met toetreding tot hulle universiteitstudie.

# **HOOFSTUK 5**

## **SAMEVATTING, GEVOLGTREKKINGS EN AANBEVELINGS**

### **5.1 SAMEVATTING**

Die studie het gepoog om nuwe kennis te identifiseer wat gebruik kan word om die probleme ten opsigte van die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente in die hoër onderwyssektor aan te pak. Vanuit die literatuurstudie blyk dit dat wiskundige bevoegdheid 'n goeie basis vorm vir 'n suksesvolle universiteitstudie in ingenieurswese (kyk paragraaf 1.2, 2.2). Volgens Artique et al. (2007, p. 1014) en beaam deur dié studie (kyk paragraaf 4.3) beskik studente egter dikwels by toetrede tot hul studie nie oor voldoende wiskundige bevoegdhede nie, en ondervind gevolglik probleme om die vereiste wiskundige vaardighede toe te pas wat hul prestasie in ingenieurswese negatief beïnvloed.

Uit die literatuur het geblyk dat die gegewe werkbare definisie vir wiskundige bevoegdheid die volgende is: *Wiskundige bevoegdheid is die vermoë om wiskundige konsepte te herken, te gebruik en toe te pas in relevante kontekste en situasies ten einde bepaalde take uit te voer* (kyk paragraaf 2.2). Ondersoek is ingestel en agt verskillende wiskundige bevoegdhede is geïdentifiseer (kyk tabel 2.1).

Verskillende ontwikkelingsteorieë en taksonomieë is bestudeer om insig te kry oor die ontwikkelingsprosesse van leer- en kognitiewe ontwikkeling (kyk paragraaf 2.4). Vanuit die literatuurstudie is 'n raamwerk geïdentifiseer, naamlik die TIMSS-assesseringsraamwerk wat gebruik is in dié studie om die sekondêre data te ontleed in terme van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke (kyk paragraaf 2.6). Die TIMSS-assesseringsraamwerk is gebruik om die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente met aanvang tot hulle universiteitstudie te bepaal asook aan die einde van hulle eerste semester.

In hierdie studie is die volgende vrae ondersoek:

1. Wat is die wiskundige bevoegdheid van eerstejaaringenieurstudente by toetreding tot hulle studie?
2. Watter verband bestaan tussen eerstejaaringenieurstudente se wiskundige bevoegdheid by toetreding en hulle prestasie in sekere eerstejaarsvakke wat wiskundige bevoegdheid vereis?
3. Watter riglyne kan op grond van dié verband gestel word ten einde geskikte studie-ondersteuningsadvies aan eerstejaaringenieurstudente en die betrokke akademiese personeel te gee en geldige en betroubare keuringsitems met die oog op ingenieurstudie te formuleer?

Om die **eerste navorsingsvraag** te beantwoord is ondersoek ingestel na die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoets. Die Gr 12-wiskundepunt gee 'n totale gemiddelde punt van 82.29% wat 'n praktiese betekenisvolle korrelasie toon met die totale gemiddelde punt van 64.6% van die Opknappingskursustoetspunt. Verdere inligting oor die studente se bevoegdheid by toetreding is verkry deur die Opknappingskursustoets se vraestel per vraag te ontleed volgens wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke. Die ontleding het die volgende getoon: Die Gr 12-wiskundepunt korreleer slegs met die vrae van die Opknappingskursustoets wat die tweede kognitiewe vlak, 'Toepassing' meet. Die Toepassingsvlak het 'n gemiddeld van 67.2% en maak 70% van die totale toets uit. Die vrae van die Opknappingskursustoets wat die wiskundige bevoegdheidsvlak, 'Intermediêr' getoets het, het 'n gemiddeld van 87.9% en die vrae wat die vlak 'Hoog' getoets het, het 'n gemiddeld van 51% maar toon geen korrelasie met die Gr 12-wiskundepunt nie. Uit die ontleding is aangetoon dat slegs die twee wiskundige bevoegdheidsvlakke, 'Intermediêr' en 'Hoog' betroubaar getoets is asook die kognitiewe vlak 'Toepassing'. Dus is die studente se bevoegdheidsvlakke, 'Intermediêr' en 'Hoog' en die kognitiewe vlak 'Toepassing' ontwikkel tot op 'n vlak waar die studente hulle vaardigheid op daardie spesifieke vlakke met redelike sukses kan gebruik.

Die laagste en hoogste kognitiewe vlakke, 'Kennis' en 'Redenering' het nie betroubaar getoets nie en geen verdere afleidings kan gemaak word oor die toetreevaardighede van die studente op daardie twee vlakke nie.

Die antwoord op die **tweede navorsingsvraag** is benader deur eerstens korrelasies te bepaal met die Gr 12-wiskundepunt en die punte wat die studente behaal het in hulle Junie-eksamen asook met elke afsonderlike wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlak wat vereis is in die afsonderlike modules. Tweedens is verder ondersoek ingestel deur die Opknappingskursustoets se totale punt sowel as die ontleding van die vraestel in die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke te korreleer met die Junie-eksamen se punte in terme van die verskillende vlakke vir die onderskeie modules.

Die ontleding het die volgende getoon: Die Gr 12-wiskundepunt toon 'n groot korrelasie met die WISN111- en ITRW 115-vraestelle se totale punte, maar meer spesifiek net met die middelste twee wiskundige bevoegdheidsvlakke, 'Intermediêr' en 'Hoog' en met die middelste kognitiewe vlak, 'Toepassing'. 'n Medium korrelasie is gevind tussen die Gr 12-wiskundepunt en die WISN111-vraestel se eerste wiskundige bevoegdheidsvlak, 'Laag' en kognitiewe vlak, 'Kennis'. 'n Klein korrelasie is getoon tussen die Gr 12-wiskundepunt en die hoë kognitiewe vlak, 'Redenering' van die INGM111-vraestel. Die Opknappingskursustoets toon slegs met die ITRW115-vraestel se totale punt en met die Intermediêre wiskundige bevoegdheidsvlak en kognitiewe Toepassingsvlak 'n groot korrelasie, maar toon ook 'n medium tot klein korrelasie met die laagste en hoogste vlakke van wiskundige bevoegdheid en kognisie.

Die **derde navorsingsvraag** is beantwoord deur oor die voorspellingswaarde van die toetree-inligting vir sukses in eerstejaaringenieurstudie te herbesin deur die leemtes te bepaal vanuit die korrelasies tussen die Gr 12-wiskundepunt en Opknappingskursustoets met die onderskeie Junie-eksamenvraestelle. Daar is nie genoeg inligting versamel oor die studente se lae- en hoë wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke nie, as gevolg van lae betroubaarheid. Die toetree-inligting fokus nie op die totale spektrum van die raamwerk wat gebruik is om wiskundige bevoegdheid en kognisie van studente te meet nie. 'n Keuringstoets moet die hele spektrum van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke bevat sodat die kwaliteit van die studente se vlakke van bevoegdheid bepaal kan word. Meer spesifiek moet keuringsitems vir ingenieurswese en die inhoud van die

Opknappingskursus fokus op die hoë wiskundige bevoegdheidsvlakke, ‘Hoog’ en ‘Gevorderd’ asook die hoogste kognitiewe vlak, Redenering, aangesien die eerstejaaringenieurmodules die hoogste vlakke vereis.

Saamgevat, die antwoorde op die drie vrae waartoe gekom het, is dus:

- Daar kan met sekerheid afgelei word dat wiskundige bevoegdheidsvlakke van eerstejaaringenieurstudente by toetreding tot hulle studie ‘Intermediêr’ en ‘Hoog’ en kognitiewe vlak ‘Toepassing’ ontwikkel is tot op ‘n vlak waar die studente hulle vaardigheid op daardie spesifieke vlakke met redelike sukses kan gebruik. Daar kan egter geen afleidings gemaak word oor die laagste, ‘Kennis-’ en hoogste, ‘Redeneringsvlakke’ nie as gevolg van lae betroubaarheid.
- Die wiskundige bevoegdheid by toetreding van die eerstejaaringenieurstudente toon ‘n groot verband met die studente se prestasie in hulle eerstejaarsvakke, Wiskunde en Programmering op die wiskundige bevoegdheidsvlak ‘Intermediêr’ en met die kognitiewe vlak, ‘Toepassing’. Daar is egter geen verband tussen die wiskundige bevoegdheid by toetreding en die laagste en hoogste vlakke van wiskundige bevoegdheid en kennis nie.
- Riglyne wat op grond van dié verband gestel is ten einde geskikte studie-ondersteuningsadvies aan eerstejaaringenieurstudente en die betrokke akademiese personeel te gee en geldige en betroubare keuringsitems met die oog op ingenieurstudie te formuleer, is volledig bespreek in paragraaf 5.3

Figuur 5.1 gee ‘n samevatting van die kwantitatiewe bevindinge. Figuur 5.1 is ‘n voorstelling en opsomming van die voorspellingswaarde van die toetree-inligting van die eerstejaaringenieurstudente en die korrelasie met die studente se eerstejaarsvakke ten opsigte van wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke.



## 5.2 GEVOLGTREKKING

Vanuit die ontledings is die gevolgtrekking gemaak dat die wiskundige bevoegdheid van die eerstejaaringenieurstudente met toetreding tot die universiteit redelik voldoende ontwikkel is op die vlakke ‘Intermediêr’ en ‘Hoog’ en op die kognitiewe vlak ‘Toepassing’. Dit is dus duidelik dat die geleentheid gegee is aan studente om wiskunde te kan toepas op roetineprobleme. Daar kan egter nie verder afleidings gemaak word oor die studente se laagste en hoogste wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke met die aanvang van hulle studie nie, aangesien die vlakke nie betroubaar getoets het nie.

Uit die bevindinge in terme van die verband tussen die toetree-inligting van die eerstejaaringenieurstudente en hulle prestasie in eerstejaarsvakke, is daar nie ‘n duidelike prentjie van die mate van hoëvlak en laevlak prestasiesukses van die studente in hulle eerstejaarsvakke nie. Dié gevolgtrekking is gemaak aangesien die Gr 12-wiskundepunt asook die Opknappingskursustoets ‘n redelike tot ‘n klein verband toon met die hoogste en laagste wiskundige bevoegdheidsvlak en kognitiewe vlak.

In die WISN 111-vraestel is die gemiddeld vir die wiskundige bevoegdheidsvlak ‘Laag’ ‘n skamele 39.46% en die gemiddeld vir die laagste kognitiewe vlak ‘Kennis’ 50.7%. Dit beteken dat die studente nie oor parate kennis beskik nie. In die Opknappingskursustoets en WISN 111-vraestel is relatief min hoogste-vlak vrae getoets en die hoë vlakke het ook onbetroubaar getoets. Vanuit die ontleding van die ITRW 115-vraestel kan die afleiding gemaak word dat die derde vraag wat die hoogste kognitiewe vlak vereis het, die gemiddelde punt vir die vraestel as geheel afgebring het van 83.9% tot 69.79% (kyk paragraaf 3.3.5.3) wat beteken dat die studente nie oor die nodige redeneringsvaardighede beskik het om die vraag met sukses te kon beantwoord nie. In die INGM 111-vraestel is die hoogste wiskundige bevoegdheid en kognitiewe vaardighede verwag, en in teenstelling met die uitslae van die WISN 111- en ITRW 115-vraestel was die studente relatief suksesvol met die beantwoording van die vraestel.

Uit bogenoemde kan die gevolgtrekking gemaak word dat die studente goed ondersteun is in die INGM 111-module op die hoë-vlakke van wiskundige bevoegdheid en kennis, maar dat daar leemtes voorkom ter ondersteuning van die studente se laevlak en hoëvlak denke in die ander betrokke modules.

### 5.3 AANBEVELINGS

Verbetering en bevordering van studente se begrip van wiskundige konsepte asook hulle wiskundige toepassingsbevoegdheid op die hoogste denkvlakke is 'n belangrike aspek vir suksesvolle universiteitsopleiding in ingenieurswese.

Dit is dus belangrik om kennis te dra van die studente se wiskundige bevoegdheid en vlak van kognisie met toetrede tot die univeristeit om ingeligte besluite te kan neem oor die samestelling van die inhoude van ondersteuningsprogramme soos Opknappingskursusse. Binne die konteks van die studie, is dit relevant om die beroemde woorde van John F Kennedy, 'n vorige president van die Verenigde State van Amerika aan te haal "*Let us think of education as the means of developing our greatest abilities, because in each of us there is a private hope and dream which can be translated into benefit for everyone and greater strength for our nation.*" (<http://www.quoteopia.com>).

Aangesien die nodige wiskundige bevoegdhede en kognitiewe vlakke ontwikkel moet word vir ingenieurswese, word vervolgens 'n paar voorstelle gemaak om hierdie doel te probeer verwesenslik.

Die volgende voorstelle is gebaseer op die literatuurstudie en die resultate van die empiriese ontledings.

1. Uit die betroubaarheidstoetse is aangetoon dat die hoogste wiskundige bevoegdheidsvlak en kognitiewe vlak asook die laagste kognitiewe vlak onbetroubaar getoets het. Daar kan dus nie betroubaar afleidings gemaak word vanuit die ontleding van die Opknappingskursustoets beter as die Gr 12-wiskundepunt oor die stand van die eerstejaaringenieurstudente se wiskundige bevoegdheid in terme van die laagste en hoogste wiskundige bevoegdhede- en kognitiewe vlakke nie. Daar is nie in die gebruikte datastelle voldoende inligting om akkuraat aan te toon in terme van die gebruikte raamwerk wat die studente se bevoegdhede is nie. Dus om die student se toetreebevoegdheid te meet en met betroubaarheid daarop te kan beplan en hulle te ondersteun is meer inligting nodig.

Wat wel betroubaar getoets het, is die tweede wiskundige bevoegdheidsvlak 'Intermediêr' en tweede kognitiewe vlak 'Toepassings'.

Daar is ook vanuit die verbande wat getrek is tussen die toetree-inligting van die studente met hulle prestasievlakke in die Junie-eksamenvraestelle aangetoon dat daar geen korrelasie is met die laagste en hoogste wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke nie, maar wel 'n groot korrelasie met die middelste vlakke. Hieruit kan afgelei word dat die inligting wat verkry is vanuit die Gr 12-wiskundepunt en die Opknappingskursustoets nie voldoende is ter voorspelling van die laevlak en hoëvlak prestasie van die studente aan die einde van hulle eerste semester nie.

'n Aanbeveling is dus dat daar na 'n raamwerk of instrument gesoek sal word wat die toetree-inligting van die studente met betroubaarheid kan meet sodat daar ingeligte besluite geneem kan word oor die inhoud van keuringstoetse en Opknappingskursusse ter ondersteuning van die eerstejaaringenieurstudente met die aanvang van hulle ingenieurstudie.

2. 'n Tweede aanbeveling is dat daar 'n aksie onderneem word om die studente te ondersteun op die lae en hoë vlakke van wiskundige bevoegdheid en kognisie om sodoende die studente te begelei om voldoende vaardighede aan te leer om hulle ingenieurstudie met sukses en selfvertroue aan te pak en te voltooi. In hierdie verband verdien die volgende op grond van hierdie studie aandag en verdere ondersoek:

### **5.3.1 Studie-ondersteuningsadvies om 'n suksesvolle oorgang van sekondêre tot tersiêre onderrig te ondersteun.**

- Die gebruik van wiskunde gaan oor verwantskappe en reeds bestaande kennis en prosedures wat geïntegreer moet word om oplossings te vind. Dié eienskap van wiskunde lei tot die ontwikkeling van die hoogste kognitiewe vlak, naamlik Redenering. Redenering is nodig om in ingenieurswese modelle te kan bou en gegewe inligting te kan interpreteer sodat voorspellings gemaak kan word. Studente moet begelei word deur betrokke dosente om in wiskunde die konsepte en prosesse te verbind met bestaande netwerke om sodoende redeneringsvaardigheid aan te leer en die denkvlakke te ontwikkel wat nodig is in ingenieurswese.

- Studente moet die teoretiese aspekte goed leer, maar met begrip leer. In die Wiskunde 1-vraestel is daar baie definisies en bewyse gevra. Die studente kan die teorie gaan leer, maar as dit gedoen is sonder begrip en verstaan, dien dit geen doel in die ontwikkeling van die regte kognitiewe vaardighede wat nodig is vir sukses in verdere ingenieurstudie nie.
- Die ontwikkeling na die formele wêreld bou op die ervarings van die beliggaamde en simboliese/proseptuele wêreld. Studente moet nuwe materiaal so aanleer en toepas.

Students learn mathematics better when visual representations are used during verbal explanations. If the focus is on symbolism and not on related embodiments then the vision of the students will be limited to performing a procedure, but they will not be able to compress it into thinkable concepts to be used flexibly for more sophisticated thinking (Benade, 2011, p. 123).

- Vestig 'n beter dialoog tussen wiskundiges (wiskunde-onderwysers op skool en dosente van die fakulteit Wiskunde op universiteit) en die gebruikers van wiskunde (byvoorbeeld ingenieurs). Die geval waar wiskunde onderrig word as 'n toepassingsvak benodig spesiale aandag. Wiskunde moet sodanig onderrig word sodat die rol wat wiskunde speel in ingenieurswese verstaan word en verbande getrek kan word tussen wiskunde en die belangstellings van die studente. Die benadering sal die redeneringsvaardigheid ontwikkel wat nodig is om wiskunde te kan toepas in onbekende situasies.

### **5.3.2 Formulerings van 'n geldige en betroubare opknappingskursustoets en keuringsitems**

Die volgende voorstelle is gebaseer op die literatuurstudie en die resultate van die empiriese ontledings.

- Kennis van die verskillende kognitiewe ontwikkelingsvlakke en wat die vereiste kognitiewe en wiskundige bevoegdheidsvlakke in eerstejaaringenieursvakke is, bied ondersteuning om insig te gee in die samestelling van 'n opknappingskursus en keuringsitems vir ingenieurswese.

- Konsensus moet bereik word oor die gewig wat elke kognitiewe vlak in 'n opknappingskursus- en keuringstoets moet dra, met ander woorde wat die persentasie 'Kennis-', 'Toepassing-' en 'Redeneringsvrae' moet wees.
- Die aantal vrae wat die vaardigheid 'Redenering' toets moet in verhouding wees met die noodsaaklikheid van die vlak in die studente se ingenieursvakke en die geleentheid wat aan studente gegee is om die vlak te kan ontwikkel.
- Die Opknappingskursus- en keuringstoets moet vooraf opgedeel word in die verskillende vlakke van wiskundige bevoegdheid en kennis om sodoende 'n duidelike prentjie te skets van die eerstejaarstudente se vlak van bevoegdheid en dan kan daar ook beter ondersteuning gebied word om die tekortkominge te hanteer.
- Verminder die hoeveelheid inhoud in die module, en verseker dat die studente meer betrokke is by 'n dieper en meer akkurate begrip van die inhoud.

## 5.4 SLOTWOORD

'n Goeie begrip van wat wiskunde beteken in 'n ingenieursomgewing en 'n bevoegdheid om wiskunde toe te pas in die uitdagings wat vereis word in ingenieursverwante vakke sal lei tot 'n realistiese en ondersteunende gesindheid vir 'n professionele ingenieur. Elke ingenieurskursus maar ook wiskunde as vak op skool, moet aktiwiteite inkorporeer wat studente kan help om analitiese, kritiese en probleemoplossende vaardighede te ontwikkel, sodat die studente tot op die hoogste kognitiewe vlak kan ontwikkel. *“Analysis of student feedback indicates that support given at first year level can be regarded as an important contributor to both competence in mathematics as well as the successful completion of engineering study”* (Steyn & du Plessis, 2007, p. 882).

Studente betree die universiteit met vaardigheid om roetineprobleme op te los. Ingenieurstudie op eerstejaarsvlak vereis egter van die studente dat hulle basiese wiskundige kennis moet hê, maar dat die kennis met begrip toegepas kan word. Toepassing van wiskundige kennis met begrip ontwikkel redeneringsvaardighede wat dit vir studente moontlik maak om probleme op te los in onbekende en vreemde situasies. Eerstejaaringenieurmodules vereis redeneringsvaardighede, en daarom is dit belangrik dat die studente reeds op skool en in Opknappingskursusse ondersteun word om die nodige vaardigheid aan te leer.

Onderwysers en dosente moet besef dat die insigte nie outomaties en vanself gaan ontwikkel deur kwantitatiewe probleme op te los nie, maar dat daar 'n bewusmaking en geleentheid vir inoefening moet plaasvind van hoe om probleme op te los in nie-roetinesituasies. Daar moet kennis geneem word van die wye spektrum van die wiskundige bevoegdheids- en kognitiewe vlakke waaroor studente moet beskik om wiskunde met sukses te kan gebruik binne die konteks van hulle eerstejaaringenieursmodules.

## **BRONNELYS**

Verwysings wat met 'n asterisk gemerk is, dui studies in die meta-analise aan.

Anderson, C. K. (1983). *The architecture of cognition*. London: Harvard University Press.

Artique, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 1011-1044). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Aydin, N. & Halat, E. (2009). The impacts of undergraduate mathematics courses on college students' geometric reasoning stages. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(1&2), 151-164. Retrieved from [http://www.math.umt.edu/tmme/vol6no1and2/TMME\\_vol6nos1and2\\_article13\\_pp.151\\_164.pdf](http://www.math.umt.edu/tmme/vol6no1and2/TMME_vol6nos1and2_article13_pp.151_164.pdf)

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 843-903.

Beatty, A. (1997). *Learning from TIMMS: Results of the Third International Mathematics and Science Study*. Washington, DC: National Academic Press.

Benade, C. G. (2012). *The transition from secondary to tertiary mathematics: Exploring means to assist students and lecturers* (Unpublished doctoral thesis). North-West University, Potchefstroom.

Biggs, J. B. (2003). *Teaching for quality learning at university*. Maidenhead, England: Open University Press.

Binet, A. (1975). *Modern ideas about children*. (S. Heisler, Trans.). Menlo Park, CA: Suzanne Heisler. (Original work published 1909).

- Bloom, B. S., Hastings, J. T. & Madaus, G. (1971). Handbook on formative and summative evaluation of student learning. New York, NY: McGraw-Hill.
- Brabrand, C. & Dahl, B. (2008). Constructive alignment and the SOLO taxonomy: A comparative study of university competences in computer science vs. mathematics. In R. Lister and Simon (Eds.). Conferences in Research and Practice in Information Technology, 88: Seventh Baltic Sea Conference on Computing Education Research (Koli Calling 2007), Koli National Park, Finland. Sydney, Australia: Australian Computer Society. Retrieved from <http://itu.dk/people/brabrand/koli-2007-keynote.pdf>
- Brijlall, D., & Maharaj, A. (2008). Applying APOS theory as a theoretical framework for collaborative learning in teacher education. Retrieved from <http://tsg.icme11.org/document/get/857>
- Bronson, G. J. (2009). C++ for engineers and scientists (3rd ed.). Retrieved from [http://books.google.co.za/books?id=5-WDYaUQV1UC&dq=programming+for+engineers+with+c%2B%2B&source=gbs\\_navlinks\\_s](http://books.google.co.za/books?id=5-WDYaUQV1UC&dq=programming+for+engineers+with+c%2B%2B&source=gbs_navlinks_s)
- Calkins, M. W., & Skelton, I. B. (1894). A study of the mathematical consciousness. Educational Review, 8, 269-283. Retrieved from <http://psycnet.apa.org/psycinfo/1894-10064-001>
- Callingham, R. & Griffin, P. (2000). Towards a framework for numeracy assessment. In J. Bana, & A. Chapman (Eds.), Mathematics education beyond 2000: Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Fremantle (pp. 134-141). Retrieved from [http://www.merga.net.au/documents/RR\\_Callingham&Griffin.pdf](http://www.merga.net.au/documents/RR_Callingham&Griffin.pdf)
- Callingham, R. & Griffin, P. (2005). Measuring mathematical competence: A developmental approach. Shanghai, ECNU (pp.1-8). Retrieved from [www.math.ecnu.edu.cn/earcome3/TSG6/2-Callingham%20R\(\).doc](http://www.math.ecnu.edu.cn/earcome3/TSG6/2-Callingham%20R().doc)

- Carr, M., Bouwe, B. & Fhloinn, E. N. (2010). Improving core mathematical skills in engineering undergraduates. DIT Teaching Fellowship Reports (pp.51 – 81). Retrieved from <http://www.dit.ie/lttc/media/ditlttc/documents/teachingfellowships/CE%20Teaching%20Fellowship%20Reports%20200910jan18.pdf#page=52>
- Chan, C. C., Tsui, M. S., Chan, M. Y. C. & Hong, J. H. (2002). Applying the Structure of the Observed Learning Outcomes (SOLO) taxonomy on student's learning outcomes: An empirical study. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 27(6), 511-527. doi:10.1080/0260293022000020282
- Clark, L. A. & Watson, D. 1995. Constructing validity: Basic issues in objective scale development. *Psychological Assessment*, 7(3), 309-319.
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-465). New York, NY: Macmillan.
- Collis, K. & Biggs, J. (1991). Developmental determinants of qualitative aspects of school learning. In G. Evans (Ed.), *Learning and teaching cognitive skills* (pp. 185-207). Hawthorn, VIC.: ACER.
- Conzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D. & Brenwald, S. (2008). Highlights from TIMSS 2007: Mathematics and Science achievement of U.S. fourth- and eighth-grade students in an international context. (NCES 2009–001). National Center for Education Statistics, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Washington, DC. Retrieved from <http://eric.ed.gov/PDFS/ED503625.pdf>
- Cooley, L., Martin, W., Vidakovic, D. & Loch, S. (2011). Learning theory and linear algebra. Retrieved from <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/cooley.pdf>
- Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage

- Creswell, J. W. & Garrett, A. L. (2008). The “movement” of mixed methods research and the role of educators. *South African Journal of Education*, 28, 321-333. Retrieved from [http://www.scielo.org.za/scielo.php?pid=S0256-01002008000300003&script=sci\\_arttext&tIng=pt](http://www.scielo.org.za/scielo.php?pid=S0256-01002008000300003&script=sci_arttext&tIng=pt)
- Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Dahl, B. (2009). Commentary on the fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In Sriraman, B. & English, L. (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 193-205). Heidelberg, Germany: Springer. doi:10.1007/978-3-642-00742-2.
- Dohn, N. B. (2007). Knowledge and skills for PISA. *Journal of Philosophy of Education*, 41, 1-16.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275-282). Retrieved from <http://www.springerlink.com/content/v213717886v31357.pdf>
- Felder, R. M. & Brent, R. (2004). The ABC’s of engineering education: ABET, Bloom’s Taxonomy, cooperative learning, and so on. In *Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition, Salt Lake City, Utah*. Retrieved from [http://aucache.autodesk.com/au2011/sessions/5091/additional\\_materials/v2\\_ED5091\\_Miller\\_AdditionalMaterials.pdf](http://aucache.autodesk.com/au2011/sessions/5091/additional_materials/v2_ED5091_Miller_AdditionalMaterials.pdf)
- Felder, R. M. & Spurlin, J. (2005). Applications, reliability and validity of the index of learning styles. *International Journal of Engineering Education*, 21(1), 103-112.
- Field, A. (2009). *Discovering statistics using SPSS* (3rd ed.). London, England: Sage.

- Fleischman, H. L., Hopstock, P. J., Pelczar, M. P. & Shelley, B. E. (2010). Highlights from PISA 2009: Performance of U.S. 15-year-old students in reading, mathematics, and science literacy in an international context. Retrieved from <http://nces.ed.gov/pubs2011/2011004.pdf>
- Fourie, M. (2001). Riglyne vir meetkunde-onderrig in sekondêre skole en die implikasies daarvan vir die opleiding van wiskunde-onderwysers (Ongepubliseerde verhandeling). Noordwes-Universiteit, Potchefstroom.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8. Retrieved from <http://www.jstor.org.nwulib.nwu.ac.za/stable/10.2307/3481973>
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435. Retrieved from <http://www.jstor.org.nwulib.nwu.ac.za/stable/10.2307/3482035>
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Fuller, M. (2002). The role of mathematics learning centres in engineering education. *European Journal of Engineering Education*, 27(3), 241-247.
- Gray, E. M., Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D. 1999. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 111-133.
- Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65-72). Utrecht, The Netherlands.

- Green, W., Hammer, S. & Star, C. (2009). Facing up to the challenge: Why is it so hard to develop graduate attributes? *Higher Education Research & Development*, 28, 17-29. Retrieved from [http://eprints.usq.edu.au/4824/1/Green\\_Hammer\\_Star\\_Author\\_version.pdf](http://eprints.usq.edu.au/4824/1/Green_Hammer_Star_Author_version.pdf)
- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2-3), 27-46. Retrieved from <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf>
- Hilbert, D. (1901). "Mathematische Probleme". *Archiv der Mathematik und Physik*, v. 3 n. 1, pp. 44–63 and 213–237. English translation, Maby Winton, *Bulletin of the American Mathematical Society* 8 (1902), 437–479. Retrieved from <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>
- Hsien Huang, C. (2010, September). Conceptual and procedural abilities of engineering students in integration. Paper presented at the Joint International IGIP-SEFI Annual Conference, Trnava, Slovakia. Retrieved from <http://www.sefi.be/wp-content/papers2010/abstracts/116.pdf>
- Husén, T. (1967). *International study of achievement in mathematics (Vol. 1 & 2)*. Stockholm, Sweden: Almqvist and Wiksell.
- Jennings, M. (2009). Issues in bridging between senior secondary and first year university mathematics. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1)*. Retrieved from [http://www.merga.net.au/documents/-Jennings\\_RP09.pdf](http://www.merga.net.au/documents/-Jennings_RP09.pdf)
- Jensen, T. H. (2007). *Assessing mathematical modelling competency*. Copenhagen, Denmark: The Danish University of Education. Retrieved from <https://pure.au.dk/portal/files/224/THJ07-ICTMA12-paper.pdf>
- Kent, P. & Noss, R. (2002, September 5). Should we reassess the role of mathematics in engineering education? Presentation given at the LTSN Engineering Conference on

“Learning and Teaching Support and Resources for Engineers”, Loughborough University. Retrieved from <http://www.lkl.ac.uk/research/REMIT/LTSN-presentation.pdf>

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Laia, K., Nakervisa, S., Story, M., Hodgson, W., Lewenberg, M. & Ball, M. M. (2008). Providing transparency and credibility: The selection of international students for Australian universities: An examination of the relationship between scores in the International Student Admissions Test (ISAT), final year academic programs and an Australian university's foundation program. *Higher Education Research & Development*, 27(4), 331-344. doi:10.1080/07294360802406809

Lawson, D. (2003). Changes in student entry competencies 1991-2001. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22(4), 171-175.

Lee, P. Y. [Moderator] & De Lange, J. & Schmidt, W. [Panelists]. (2006). What are PISA and TIMSS? What do they tell us? In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, Panel B* (pp. 1663-1665). Retrieved from [http://www.icm2006.org/proceedings/Vol\\_III/contents/ICM\\_Vol\\_3\\_80.pdf](http://www.icm2006.org/proceedings/Vol_III/contents/ICM_Vol_3_80.pdf)

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2, pp. 763-799). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Luk, H. S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 161-174.

Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras: Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 71, 41-52.

- Mouton, J. (2001). How to succeed in your master's and doctoral studies: A South African guide and resource book. Pretoria: Van Schaik.
- Mullis, I. V. S. & Martin, M. O. (2006). TIMSS in perspective: Lessons learned from IEA's four decades of international mathematics assessments. Retrieved from [http://www.brookings.edu/gs/brown/irc2006conference/MullisMartin\\_paper.pdf](http://www.brookings.edu/gs/brown/irc2006conference/MullisMartin_paper.pdf)
- Mullis, V. S., Martin, M. O. & Foy, P. (2005). IEA's TIMSS 2003 International report on achievement in the mathematics cognitive domains: findings from a developmental project, Chapter 1: The developmental project to report TIMSS 2003 mathematics achievement in cognitive domains (pp. 3-13). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. Retrieved from [http://timssandpirls.bc.edu/pdf/t03\\_download/t03mcogdrpt.pdf](http://timssandpirls.bc.edu/pdf/t03_download/t03mcogdrpt.pdf)
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A. & Erberber, E. (2007). TIMSS 2007 assessment frameworks. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Mustoe, L. (2002). Mathematics in engineering education. *European Journal of Engineering Education*, 27(3), 237-240.
- Näsström, G. & Hendriksson, W. (2008). Alignment standards and assessments: A theoretical and empirical study of methods for alignment. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 6(3), 667-690. Retrieved from [http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/16/english/Art\\_16\\_216.pdf](http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/16/english/Art_16_216.pdf)
- Nieuwoudt, S. M. (2003). *Srategiee onderrig en leer van skoolwiskunde in 'n videoklasstelsel* (Ongepubliseerde proefskrif). Noordwes-Universiteit, Potchefstroom.
- Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(9),

13-24. Retrieved from <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/672/661>

Noordwes-Universiteit, Statistiese Konsultasiediens (SKD). (s.d.) Handleiding: Bepaling van effekgrootte-indekse en praktiese betekenisvolheid. Potchefstroom: Noordwes-Universiteit. Onttrek vanaf [http://www.nwu.ac.za/p-stats/index\\_a.html](http://www.nwu.ac.za/p-stats/index_a.html)

Nunnally, J. & Bernstein, I. H. (1994). *Psychometric theory* (3rd ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD). (2009). *PISA 2009 assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. Retrieved from [www.oecd.org/dataoecd/11/40/44455820.pdf](http://www.oecd.org/dataoecd/11/40/44455820.pdf)

Palm, T., Boesen, J. & Lithner, J. (2011). Mathematical reasoning requirements in Swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), 221-246.

Pegg, J. (1997). Broadening the descriptors of Van Hiele's levels 2 and 3. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in mathematics education* (pp. 391-396). Rotorua, New Zealand: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Pegg, J. & Tall, D. O. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education*, 37(6), 468-475.

Piaget, J. (1963). *The origins of intelligence in children*. New York, NY: W.W. Norton

Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S., McKnight, C., Britton, E. & Nicol, C. (1993). *Curriculum frameworks for mathematics and science*. Vancouver, Canada: Pacific Educational Press.

Roux, A. (2004). *Die invloed van taalvaardigheid op die meetkundedenke van graad 8 en 9 leerders (Meesterskripsie)*. Noordwes-Universiteit, Potchefstroom.

- Roux, A. (2009). 'n Model vir die konseptuele leer van wiskunde in 'n dinamiese tegologies-verrykte omgewing by voorgraadse wiskunde-onderwysstudente (Ongepubliseerde proefskrif). Noordwes-Universiteit, Potchefstroom.
- Ryan, A. B. (2006). Post-positivist approaches to research. Retrieved from [http://eprints.nuim.ie/874/1/post-positivist\\_approaches\\_to\\_research.pdf](http://eprints.nuim.ie/874/1/post-positivist_approaches_to_research.pdf)
- Schagen, I. & Hutchison, D. (2007). Comparisons between PISA and TIMSS: We could be the man with two watches. *Education Journal*, 101, 34-35. Retrieved from <http://web.ebscohost.com.nwulib.nwu.ac.za/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=4&hid=123&sid=2f67aaa-27ec-4dbf-af22-4af28dead6e1%40sessionmgr110>
- Seitzer, D. (2011). European Society for Engineering Education, SEFI: Framework for mathematics curricula in engineering education. doi:10.1080/03043798308903550
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.
- Sharp, J. M. & Zachary, L. W. (2004). Using the van Hiele K-12 geometry learning theory to modify engineering mechanics instruction. *Journal of STEM Education*, 5(1/2), 35-41.
- Shorser, L. (2005). Bloom's taxonomy interpreted for mathematics. Retrieved from <http://www.math.toronto.edu/writing/BloomsTaxonomy.pdf>
- Smith, E. 2006. Using secondary data in educational and social research. Maidenhead, England: Open University Press.
- South Africa. Dept. of Education. (2011). National Curriculum and Assessment Policy Statement (CAPS): Mathematics. Retrieved from <http://www.education.gov.za/Curriculum/CurriculumAssessmentPolicyStatements/ta/bid/419/Default.aspx>

- Sternberg, R. J. (2006). *Cognitive psychology* (4th ed.). Belmont, CA: Thomson Wadsworth.
- Sternberg, R. J. & Sternberg, K. (2012). *Cognition* (6th ed.). Belmont, CA: Wadsworth/Cengage Learning.
- Stewart, S. & Thomas, M. O. J. (2009). A framework for mathematical thinking: The case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 951-961.
- Steyn, H. S., Jr. & Ellis, S. M. (2009). Estimating an effect size in one-way multivariate analysis of variance (MANOVA). *Multivariate Behavioural Research*, 44, 106-129.
- Steyn, T. & Du Plessis, I. (2007). Competence in mathematics: More than mathematical skills? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(7), 881-890.
- Sugrue, B. (2002). Problems with Bloom's taxonomy. Retrieved from [http://eppicinc.files.wordpress.com/2011/08/sugrue\\_bloom\\_critique\\_perfxprs.pdf](http://eppicinc.files.wordpress.com/2011/08/sugrue_bloom_critique_perfxprs.pdf)
- Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. Retrieved from <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999c-apos-in-amt-pme.pdf>
- Tall, D. (2006). Thinking through three worlds of mathematics. In M. J. Hoines, & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288). Retrieved from [http://scholar.google.co.za/scholar?q=Tall,+D.+\(2006\).+Thinking+through+three+worlds+of+mathematics&hl=en&as\\_sdt=0&as\\_vis=1&oi=scholart&sa=X&ei=s9lGUqiSEPPB7Aai8IHODA&ved=0CCgQgQMwAA](http://scholar.google.co.za/scholar?q=Tall,+D.+(2006).+Thinking+through+three+worlds+of+mathematics&hl=en&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart&sa=X&ei=s9lGUqiSEPPB7Aai8IHODA&ved=0CCgQgQMwAA)
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24. Retrieved from [http://www.merga.net.au/documents/MERJ\\_20\\_2\\_Tall.pdf](http://www.merga.net.au/documents/MERJ_20_2_Tall.pdf)

- Tall, D. (2010). Perceptions, operations and proof in undergraduate mathematics. *Community for Undergraduate Learning in the Mathematical Sciences Newsletter*, 2, 21-28.
- Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowan, M., . . . Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1(1), 81-104.
- Tall, D. & Mejia-Ramos, J. P. (2007). The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. Paper presented at the Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Essen, Germany. Retrieved from <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2006g-mejia-tall.pdf>
- Teppo, A. (1991). Van Hiele levels of geometrical thought. *Mathematics Teacher*, 84(3), 210-221.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1),9-35. Retrieved from <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=EJ757813>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FA: Academic Press.
- Van Hiele, P.M. (2002). Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. In D. Tall, & M. O. J. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding: A tribute to Richard Skemp* (pp. 27-47). Flaxton, Australia: Post Pressed.
- Vilkomir, T. & O'Donoghue, J. (2009). Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 183-199.

- Watson, A., Spirou, P. & Tall, D. O. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, 1(2), 73-97.
- Weyer, S.R. (2010). APOS theory as a conceptualization for understanding mathematical learning. Ripon, WI: Ripon College. Retrieved from <http://www.learningace.com/doc/377374/b820000ac4f275d4e7519bdd4cd74c4e/s-weyer-apos-theory>
- Wu, M. (2010). OECD Education Working Papers, no. 32: Comparing the Similarities and Differences of PISA 2003 and TIMSS. doi:10.1787/5km4psnm13nx-en

## ADDENDUM A

### WISKUNDE OPKNAPPINGSKURSUSSTOETS VIR EERSTEJAARSTUDENTE VIR 2011 MET ONTLEDING

#### VRAAG 1

$60^\circ$  omgesit in radiale is ...

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D. 1,047

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student kan basiese wiskundige kennis toepas in 'n direkte toepassing.	(1) Kennis: <i>Berekening</i> : Dra kennis van hoe jy grade kan omskakel in radiale.

#### VRAAG 2

Die booglengte wat 'n omtrekshoek van  $60^\circ$  onderspan as die radius van die sirkel 4 cm is, is ...

- A. 240 cm      B. 15 cm      C. 4,2 cm      D. 1,3 cm

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student kan kennis toepas van hoe om 'n booglengte te bereken met 'n omtrekshoek en gegewe radius.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Gebruik 'n toepaslike prosedure om die probleem op te los.

VRAAG 3

Watter een van die volgende vergelykings is 'n identiteit?

- A.  $\sin x \csc x = 2$
- B.  $\sin x + 1 = 2$
- C.  $\frac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \sin^2 x$
- D.  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet die trigonometriese identiteit kan herken nadat bewerkings gedoen is en identiteite gebruik is in 'n onbekende situasie	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleem op</i> : Maak die korrekte keuse na gelang van uitkoms van stappe en herken dan die korrekte vergelyking.

VRAAG 4

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \dots$$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       D.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die identiteit kan herken, korrek kan toepas en 'n algebraïese berekening uitvoer in die bekende situasie	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Herken die identiteit en selekteer 'n toepaslike algebraïese prosedure om die oplossing te vind.



VRAAG 8

Los op vir  $x$  indien  $|x - 2| < -3$ :

- A.  $-1 < x < 5$     B.  $x < -1$  of / or  $x > 5$     C.  $5 < x < -1$     D. Geen oplossing

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet kennis hê van absolute waardes asook die prosedure ken en kan toepas om die oplossing te vind van 'n ongelyke vergelyking.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op</i> : Die prosedure om absolute waardes te gebruik moet toegepas word om 'n bekende ongelykheids probleem op te los.

VRAAG 9

Gebruik absolute waarde-notasie om die volgende stelling wiskundig uit te druk: “ $k$  is minder as 7 eenhede vanaf 5.

- A.  $|x - 7| < 5$     B.  $|7 - x| < 5$     C.  $|x - 5| < 7$     D.  $|x - 5| \leq 7$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iv) Gevorderd: Die student moet die inligting kan voorstel op die korrekte manier deur hul kennis van die eienskappe van 'n absolute waarde korrek te kan weergee.	(2) Toepassing: <i>Modelleer</i> : Genereer 'n ongelykheids vergelyking om gegewe situasie voor te stel. (3) (3) Redenering: <i>Integreer</i> : Kombineer die (4) kennis van absolute waardes en (5) ongelykhede en bepaal die verband tussen (6) die gegewe waardes.

VRAAG 10

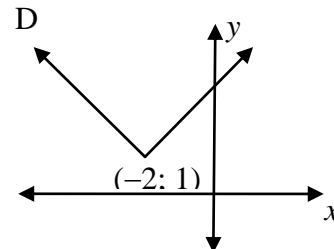
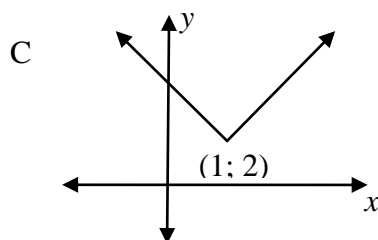
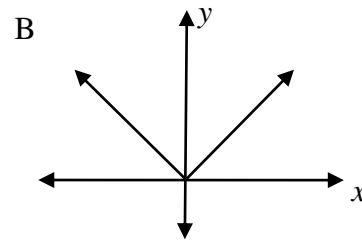
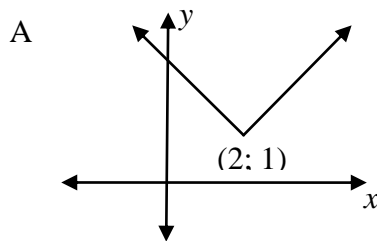
$$|-x-3| = \dots$$

- A.  $-|x+3|$  B.  $-x-3$  C.  $|x-3|$  D.  $|x+3|$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die eienskappe van 'n absolute waarde ken en kan gebruik om die korrekte oplossing te vind.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Selekteer 'n prosedure om die absolute waarde te bereken.

VRAAG 11

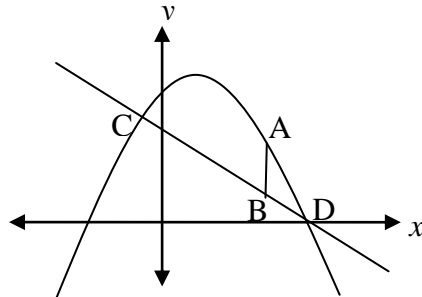
Die grafiek van  $y = |x-2| + 1$  is:



Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet insig toon om die regte voorstelling vir die gegewe vergelyking te kan kies.	(2) Toepassing: <i>Voorstel</i> : Die korrekte voorstelling vir die gegewe wiskundige vergelyking moet gekies word.

VRAAG 12

Beskou die grafieke van 'n parabool en 'n reguitlyn soos in die skets aangedui, met AB parallel aan die y-as.



Die maksimum lengte van AB word verkry as AB:

- A. die simmetrie-as van die parabool is.
- B. halfpad tussen die sny punte C en D van die twee grafieke lê.
- C. nader aan C as aan D lê.
- D. nader aan D as aan C lê.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iv) Gevorderd: Moet wiskundige kennis kan toepas in onbekende situasie met die gebruik van redenering en veralgemening.	(3) Redenering – <i>Veralgemening</i> : Veralgemening van maksimum lengte tussen 'n parabool en reguitlyn wat dit sny - halfpad tussen sny punte.

VRAAG 13

Beskou die funksie  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Die vertikale asimptoot van  $g(x)$  is by:

- A.  $x = 1$
- B.  $x = -1$
- C.  $x = 0$
- D. geen vertikale asimptoot

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet sy kennis oor hoe om n asimptoot te bepaal kan toepas deur gebruik te maak van kennis oor onreële uitdrukkings.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kies 'n prosedure oor hoe om die vertikale asimptoot te bepaal van gegewe funksie.

VRAAG 14

Beskou die funksie  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ .

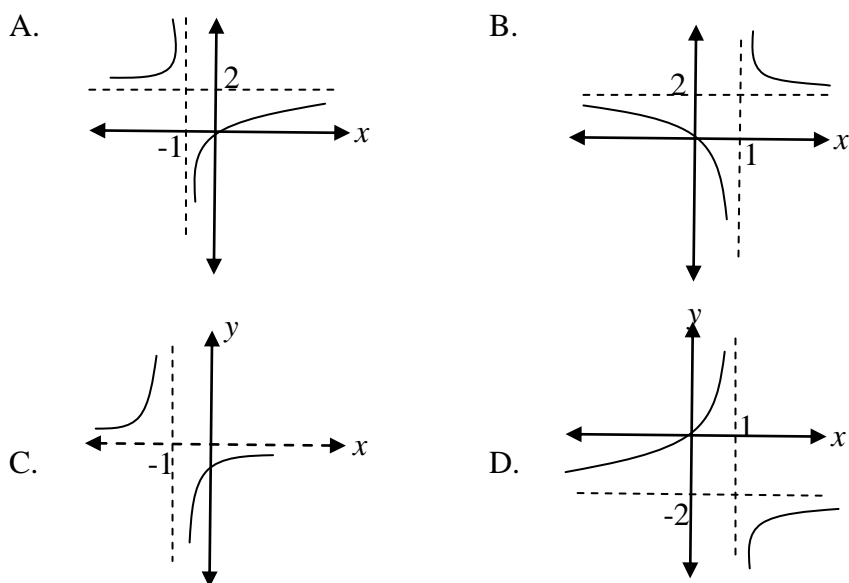
Die horisontale asimptoot van  $f(x)$  is by:

- A.  $y=1$       B.  $y=2$       C.  $y=0$       D. geen horisontale asimptoot

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet die kennis oor hoe om n asimptoot te bepaal kan toepas deur gebruik te maak van algebraïese berekenings.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Volg die prosedure om die horisontale asimptoot te bepaal van gegewe funksie.

VRAAG 15

Die grafiek van  $h(x) = \frac{2x}{x+1}$  is:

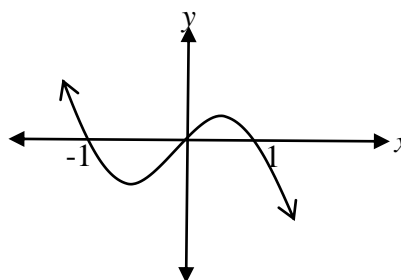


Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet die asimptote van die gegewe vergelyking kan bereken en dan die ooreenstemmende grafiek bepaal.	(3) Redenering: <i>Integreer</i> : Kombineer verskillende wiskundige prosesse om die korrekte grafiek te kies. Byvoorbeeld die verstaan van asimptote en die berekening daarvan.

### VRAAG 16

'n Moontlike vergelyking vir die funksie in die skets is:

- A.  $f(x) = -x(x-1)(x-1)$
- B.  $f(x) = x(x+1)(x-1)$
- C.  $f(x) = x(x+1)(1-x)$
- D.  $f(x) = x(x-1)(x-1)$



Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet kennis hê oor die uiteensetting/standaard-vorm van 'n derdegraadse vergelyking en die kennis gebruik om die korrekte bypassende vergelyking te kies.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Ken die notasie en standaard vorm van 'n derdegraadse vergelyking en die posisies van die x-afsnitte in 'n vergelyking.

### VRAAG 17

Die draaipunte van  $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + 4}$  is:

- A.  $(\frac{4}{3}, -\frac{9}{13})$  en  $(-\frac{4}{3}, \frac{9}{13})$
- B.  $(-3, 4)$  en  $(3, -4)$
- C.  $(2, -\frac{3}{4})$  en  $(-2, \frac{3}{4})$
- D. geen draaipunte

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet wiskundige vaardighede kan toepas om die draaipunte te kan bepaal van die gegewe vergelyking.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op</i> : Moet weet dat draaipunte bepaal word deur $f'(x)=0$ . Moet $f'(x)$ bepaal, dan $f'(x)=0$ oplos.

VRAAG 18

$$\lim_{2h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} =$$

- A. 0            B. 1            C.  $\infty$             D. bestaan nie

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet wiskundige vaardighede kan toepas om gegewe limiet te kan oplos in roetine probleem.	(2) (2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Gebruik 'n (3) bekende limiet-identiteit wat vooraf (4) aan hulle bekend was.

VRAAG 19

Die lyn  $x = a$  is 'n vertikale asimptoot van die grafiek van  $f(x)$  as:

- A.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$     B.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a$   
C.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$     D.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet sy/haar wiskundige kennis oor vertikale asimptote kan weergee van die roetine situasie.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Herroep die definisie van 'n vertikale asimptoot en hoe dit in 'n funksie format voorgestel moet word.

VRAAG 20

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \dots$$

- A.  $\infty$       B.  $-\infty$       C. 0      D. bestaan nie

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student kan basiese kennis oor limiete toepas in gewone reguit situasie.	(5) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Gebruik die eienskappe van limiete om die oplossing te vind.

VRAAG 21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{3x + 2} =$$

- A.  $\frac{2}{3}$       B. 0      C.  $\infty$       D.  $\frac{5}{2}$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student kan basiese kennis oor limiete toepas in bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Gebruik die eienskappe en gepaardgaande prosedures van limiete om die oplossing te vind.

VRAAG 22

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)} =$$

- A. 0      B. 1      C. -2      D. bestaan nie

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student kan kennis van limiete gekombineer met kennis oor getalstelsels gebruik om die oplossing te vind.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Gebruik die eienskappe van limiete en getalstelsels om die oplossing te vind.

VRAAG 23

Beskou die funksie:  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{as } x \neq 1 \\ 2 & \text{as } x = 1 \end{cases}$

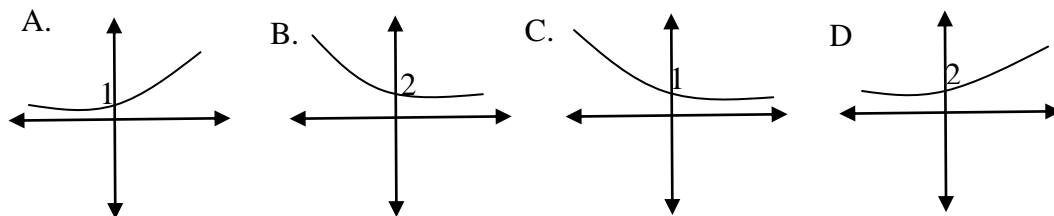
$f(x)$  is nie kontinu in die punt  $x = 1$  nie, omdat ...

- A.  $f(1)$  nie bestaan nie      B.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$   
 C.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$       D.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet goeie begrip en kennis bevat van funksies om die komplekse situasie reg te interpreter.	(3) Redenering: <i>Analiseer</i> : Bepaal en gebruik kennis oor kontinuïteit van funksies om die gegewe situasie te analiseer.

VRAAG 24

Die grafiek van  $f(x) = 2^{-x}$  is:

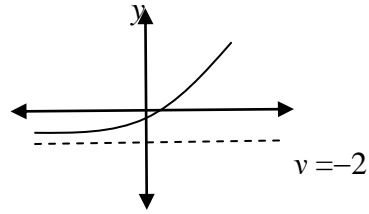


Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet basiese kennis hê oor die voorstellings van eksponensiële funksies.	(1) Kennis: <i>Berekening</i> : Bereken die y-afsnit en herken die grafiek wat die gegewe eksponensiële funksie korrek weergee.

VRAAG 25

‘n Moontlike vergelyking vir die grafiek is:

- A.  $f(x) = 2 \cdot 3^x$
- B.  $f(x) = 3^x - 2$
- C.  $f(x) = 3^{-x} - 2$
- D.  $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$



Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet basiese kennis hê oor die voorstellings van eksponensiële funksies. Is ‘n verskuiwing.	(1) Kennis: <i>Berekening</i> : Bereken die y-afsnit en ken die posisie van die asimptoot vanuit ‘n gegewe funksie vergelyking en kies dan die bypassende grafiek.

VRAAG 26

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5^{2x-1} \times 9^{x-2}}{15^{2x-3}} = \dots$$

- A.  $\frac{25}{3}$
- B.  $3^x$
- C.  $15^{8x-11}$
- D.  $\frac{26}{3}$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die prosedure van hoe om eksponente te vereenvoudig kan kombineer, met die prosedure om ‘n limiet op te los in ‘n bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op</i> : Kies ‘n toepaslike strategie om die gegewe eksponent uitdrukking te vereenvoudig en pas dan die limiet toe op die oplossing van die eksponent uitdrukking.

VRAAG 27

Los op vir  $x$  indien  $(2^x)^{x+1} = 4$ :

- A.  $x = 1$       B.  $x = -2$       C.  $x = 2$  of  $x = -1$       D.  $x = -2$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet kennis bevat van hoe om die $x$ waarde te bepaal in 'n vergelyking maar wanneer die $x$ in 'n eksponent posisie gegee word.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kies 'n toepaslike prosedure om die $x$ -waarde in die eksponent posisie te kan bepaal.

VRAAG 28

$$\log_2(4\sqrt[3]{2})^3 = \dots$$

- A. 7      B. 21      C. 6      D. 9

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet sy/haar kennis van logs kan toepas in bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kies 'n prosedure om die logaritme op te los.

VRAAG 29

Los op vir  $x$  indien:  $\log_2(1-x) + \log_2(5+x) = 3$ :

- A.  $x = -3$       B.  $x = -1$  of  $x = -3$       C.  $x = -1$       D.  $x = 3$  of  $x = 1$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet sy/haar kennis van logs kan toepas.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Die vaardigheid en kennis van logs moet toegepas word om die probleem te kan op te los.

VRAAG 30

$$\frac{\log 2a}{\log a} = \dots$$

- A. 2            B.  $\log 2$         C.  $\log 2a - \log a$     D. nie een van bogenoemde  
nie

<b>Bevoegdheidsvlakke</b>	<b>Kognitiewe vlakke</b>
(ii) Intermediêr: Die student moet sy/haar kennis van logs kan toepas.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Die vaardigheid en kennis van logs moet toegepas word om die probleem te kan op te los.

## ADDENDUM B

### WISKUNDE 1 (WISN111) JUNIE EKSAMEN VRAESTEL 2011 MET ONTLEDING

#### VRAAG 1

Die volume in decibels, van 'n luidspreker by 'n konsert as funksie van horisontale afstand vanaf die luidspreker word beskryf deur  $V(x) = 39 - |2x - 1|$ . Die verhoog is by  $x = 0$  en die luidspreker by  $x = -5$ . 'n Volume van meer as 30 decibels is skadelik vir gehoor. Bepaal die veilige gebeide om die luidspreker. Los dus die ongelykheid op.

$$39 - |2x - 1| < 30$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet hulle wiskundige kennis toepas om 'n ongelykheid met 'n absolute waarde in die vergelyking op te los. Die wenk aan die einde van die vraag "los dus die ongelykheid op" het die gevolg dat die student nie nodig het om sy/haar kennis te organiseer nie, slegs die toepassing van 'n spesifieke wiskundige prosedure is vereis.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Die student moet 'n bekende prosedure gebruik om die oplossing te vind.

## VRAAG 2

Definieer die begrip radiaalmaat en teken 'n skets om die definisie toe te lig.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student het basiese wiskundige kennis nodig gehad.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die student moet die definisie en die bykomende skets van die begrip wat vooraf geleer is weergee.

## VRAAG 3

Definieer die funksies  $\tan x$  en  $\tan^{-1} x$  en teken beide funksies saam met die lyn  $y = x$  op dieselfde assestelsel.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Laag: Die student het basiese wiskundige kennis nodig gehad.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Geleerde funksies moet gedefinieer word.

## VRAAG 4

Vir die gegewe funksies, bepaal  $f \circ g$  en  $D_{f \circ g}$ .

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in [1,5]$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet die vaardigheid hê om begrip te toon van hulle kennis deur die oplossing te vind van 'n komplekse situasie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Die oplossing van $(f \circ g)(x)$ en om die $D_{f \circ g}$ te bepaal is 'n bekende prosedure  (3) Redenering : <i>Integreer</i> : Losstaande wiskundige tegnieke moes gekombineer word.

### VRAAG 5

Skryf l'Hospital se reël VOLLEDIG neer.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet n basiese wiskundige reël wat geleer is weergee.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die student moet die wiskundige term en die toepaslike reël ken.

### VRAAG 6

Die lugdruk as funksie van hoogte bo seevlak, word beskryf deur  $P(h) = (1 + 10/h)^{2h}$ . Bepaal die lugdruk baie hoog bo seevlak. Bepaal dus

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{h}\right)^{2h}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Hoog: Die student moet die geleerde prosedure met begrip kan weergee.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleem op</i> : Voer bekende prosedure uit en maak dan keuse na gelang van uitkoms.

### VRAAG 7

Die amplitude van 'n golf as funksie van afstand vanaf die golfgenerator, word beskryf deur

$A(x) = \csc x - \cot x$ . Bepaal die amplitude by die generator. Bepaal dus

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intemediêr: Die student moet die wiskundige kennis van limiet oplossing en die definisies van trigonometriese funksies kan gebruik in 'n gewone reguit situasie. Die komplekse situasie word veralgemeen deur die wenk wat gegee is naamlik, "bepaal dus".	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleem op</i> : Voer bekende prosedure uit en maak dan keuse na gelang van uitkoms.

### VRAAG 8

Definieer die volgende limiet.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet n wiskundige definisie wat geleer is weergee.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die student moet die wiskundige definisie van 'n limiet ken.

### VRAAG 9

Bewys die bestaan van die volgende limiet deur van die definisie van 'n limiet gebruik te maak.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet die	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Die

definisie van 'n limiet kan toepas om die gegewe onbekende limiet te bewys.	definisie en eienskappe van 'n limiet moet gebruik word om 'n vergelyking te bewys.
---	---

#### VRAAG 10

Voltooi die volgende definisie van kontinuïteit:

'n Funksie  $f$  is kontinu op  $\mathbb{R}$  as  $\forall a \in \mathbb{R}$  geld dat:

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet n wiskundige definisie wat geleer is voltooi.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die student moet die wiskundige definisie van kontinuïteit ken.

#### VRAAG 11

Laat die funksie  $f$  gedefinieer word deur

$$f(x) = \cos x$$

Bewys dat  $f(x)$  kontinu is op  $\mathbb{R}$ .

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die wiskundige kennis oor kontinuïteit kan toepas.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleem op</i> : Die student moet die kennis oor kontinuïteit kan gebruik en implimenter om 'n stelling te bewys.

#### VRAAG 12

Maak gebruik van die definisie van regs-kontinuïteit en die eienskappe van limiete en bewys dat  $f(x)$  regs kontinu is in die punt  $x = -1$ .

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die definisie van regscontinuïteit kan toepas in.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Daar is 'n bekende algoritme wat toegepas moet word.

### VRAAG 13

Bewys die produkreël vir differensiasie.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die produkreël vir differensiasie se bewys ken.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die produkreël vir differensiasie moet herroep word.

### VRAAG 14

Bewys

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet 'n voorafgeleerde bewys weergee.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die voorafgeleerde bewys moet herroep word.

### VRAAG 15

Bewys

(3)

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet basiese kennis kan toepas in bekende situasie.	(1) Kennis: <i>Herroep</i> : Die voorafgeleerde situasie moet herroep word.

#### VRAAG 16

Dui aan of die volgende stellings WAAR of VALS is.

16.1 As  $f(x)$  diskontinu is in die punt  $a$ , is  $f$  nie differensieerbaar in die punt  $a$  nie.

16.1.1 As  $f(x)$  kontinu is in die punt  $a$ , is  $f$  differensieerbaar in die punt  $a$ .

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iiii) Gevorderd: Die student moet die gegewe inligting organiseer en die korrekte afleidings maak.	(3) Redenering: <i>Analiseer</i> : Gebruik kennis en verbande van wiskundige situasies om waardevolle gevolgtrekkings te maak.

#### VRAAG 17.1

Die volgende stelling stel dat 'n snylyn van 'n kromme  $y = f(x)$  die raaklyn aan die kromme nader soos wat die inkrement  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Voltooi die stelling en die bewys.

As die funksie  $y = f(x)$  waar  $\Delta x$  'n inkrement in  $x$  is, differensieerbaar is in die punt  $a$ , geld dat

.....

en  $\epsilon$  'n kontinue funksie van  $\Delta x$  is.....Dan is.....

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student benodig begrip om die stelling en bewys te voltooi.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Daar is een bekende prosedure om die stelling en bewys te voltooi maar benodig begrip van wat geleer is.

### VRAAG 17.2

Teken 'n skets om die stelling te verduidelik.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student benodig begrip om die stelling korrek voor te stel.	(2) Toepassing: <i>Voorstel</i> : Die gegewe stelling moet voorgestel word.

### VRAAG 18

Die volgende kromme word die heks van Maria Agnesi genoem.

$$y = \frac{1}{(1 + x^2)}$$

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan hierdie kromme in die punt

$$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet die nodige wiskunde kennis en begrip kan toepas om die komplekse situasie op te los.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op</i> : gebruik die nodige kennis en toon begrip om die probleem op te los.  (3) Redenering: <i>Analiseer</i> : Die probleem moes uitmekaar getrek word en 'n besluit moes geneem word oor hoe om tewerk te gaan.

	(3) Redenering: <i>Integreer</i> : Gebruik resultaat sowel as gegewe inligting om oplossing te vind.
--	--

VRAAG 19

Die stroom  $I$  wat benodig word om drywing  $P$  in 'n sekere resistor te ontwikkel, word gegee deur

$$I = \sqrt{\frac{P}{51}}$$

19.1 Bepaal die tempo waarteen die stroom verander soos wat die drywing verander.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet begrip toon om die toepaslike wiskundige kennis te kan toe pas om die probleem op te los.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Gebruik 'n bekende prosedure om die oplossing te vind.

19.2 Verduidelik wat met die tempo van verandering gebeur wanneer  $P = 0$ .

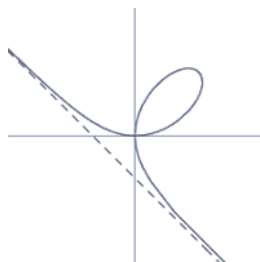
Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet begrip hê die korrekte verduideliking te kan gee van die gegewe situasie.	(3) Redenering: <i>Analiseer</i> : Maak waardevolle gevolgtrekking van die verband tussen die tempo van verandering en wanneer $P=0$ .

(1)

VRAAG 20

Die grafiek van die folium van Descartes word gegee deur:

$$x^3 + y^3 = 6xy$$



$y$  word implisiet gedefinieer as 'n funksie van  $x$ .

20.1 Bepaal  $\frac{dy}{dx}$ .

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student se kennis oor differensiasie moet toegepas kan word in die gegewe vergelyking.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op:</i> gebruik die nodige kennis van differensiasie om die vergelyking te kan differensieër.

20.2 Hoe kan die helling van die stippellyn in die skets bepaal word?

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet sy kennis kan toepas in komplekse situasie.	(3) Redenering: <i>Analiseer:</i> Los die probleem op, deur verbande te bepaal binne die wiskundige situasie.

20.3 Wat is die helling van die stippellyn in die skets?

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet voldoende begrip toon in die onbekende situasie.	(3) Redenering: <i>Analiseer:</i> Bepaal die gradient van die stippellyn deur verbande te trek,

VRAAG 21

Bepaal die afgeleides van die volgende funksies. [MOENIE VEREENVOUDIG NIE]

21.1 (3)

$$G(t) = t \sin^{-1}\left(\frac{t}{4}\right) + \sqrt{16 - t^2}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet sy kennis oor afgeleides kan kombineer met die korrekte gebruik van die produkreël	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op:</i> Die student moet 'n strategie kies na gelang van die uitkoms van die stappe en

binne 'n reguit situasie	die korrekte gebruik van die produkreël.
--------------------------	--

21.2

(4)

$$f(\theta) = (\sin \theta)^{-\tan \theta}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student kan sy kennis en begrip oor afgeleides gebruik in die komplekse situasie.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op:</i> Die student moet die korrekte metode kies na gelang van die uitkoms van die stappe.

VRAAG 22

Definieer die begrip onbepaalde integral

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet die definisie en terminologie van n onbepaalde integraal kan weergee.	(1) Kennis: <i>Herroep:</i> Die definisie van die begrip onbepaalde integraal moet geleer word en weergegee word.

VRAAG 23

Bepaal die volgende onbepaalde integrale

23.1  $\int (6q^4 + 4\sqrt{q} + 9) dq$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die kennis van integrale kan toepas op 'n bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer:</i> Kennis en begrip van 'n effektiewe strategie moet toegepas kan word om die onbepaalde integraal te bepaal.

23.2  $\int \frac{\sin^{-1} r}{\sqrt{1-r^2}} dr$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet sy kennis en bergip kan toepas op onbekende situasie.	2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kennis en begrip van 'n effektiewe strategie moet toegepas kan word om die onbepaalde integraal te bepaal. Die student moet die korrekte substitusie uitvoer.

23.3  $\int (x^5 + 5^x) dx$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet die kennis van integrale kan toepas op 'n bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kennis en begrip van 'n effektiewe strategie moet toegepas kan word om die onbepaalde integraal te bepaal.

23.4  $\int \frac{1}{\sqrt{4-m^2}} dm$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet sy kennis en bergip kan toepas op onbekende situasie.	2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kennis en begrip van 'n effektiewe strategie moet toegepas kan word om die onbepaalde integraal te bepaal. Die student moet die korrekte substitusie uitvoer.

23.5  $\int \frac{\csc^2 y}{1+\cot y} dy$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(iii) Hoog: Die student moet sy kennis en	2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kennis en

bergip kan toepas op onbekende situasie.	begrip van 'n effektiewe strategie moet toegepas kan word om die onbepaalde integraal te bepaal.
--	--

#### VRAAG 24

Definieer die komplekse getalstelsel volledig.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet die definisie van 'n komplekse getalstelsel volledig ken en kan weergee.	(1) Kennis : <i>Herroep</i> : Die definisie van die begrip komplekse getalstelsel moet geleer word en weergegee word.

#### VRAAG 25

Definieer die begrippe komplekse toegevoegde en modulus van 'n komplekse getal.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(i) Laag: Die student moet die definisies van die begrippe komplekse toegevoegde en modulus van n komplekse getal weergee.	(1) Kennis : <i>Herroep</i> : Die definisies van die begrippe komplekse toegevoegde en modulus van n komplekse getal moet geleer word en weergegee word

#### VRAAG 26

Vereenvoudig die volgende en laat jou antwoord in standaardvorm.

$$\frac{(6 + 5i)}{(2 - i)}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student moet sy kennis van komplekse getalle kan toepas om 'n uitdrukking te kan vereenvoudig.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op</i> : Gebruik die eienskappe van 'n komplekse getal om die gegewe uitdrukking te vereenvoudig. Skryf in standaardvorm na gelang van uitkoms van die stappe.

VRAAG 27

As  $r$  en  $s$  komplekse getalle is, bewys dat  $|r + s| \leq |r| + |s|$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student se begrip en kennis oor komplekse getalle moet gebruik word in 'n bekende situasie.	(1) Kennis : <i>Herroep</i> : Die bewys is vooraf geleer.

VRAAG 28

Skets die versameling  $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2 + i| \leq 2\}$  in die komplekse vlak.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student se kennis moet voorgestel word in 'n bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Voorstel</i> : Die student moet die inligting kan voorstel om begrip te toon.

VRAAG 29

Die komplekse getal  $1 - 3i$  is 'n wortel van die vergelyking  $x^3 - x^2 + 8x + 10 = 0$ . Bepaal die ander twee wortels.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student se kennis en begrip van komplekse getalle wat wortels van 'n vergelyking is word toegepas op 'n bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op</i> : Gebruik die eienskappe van komplekse getalle gegee as 'n wortel en gebruik 'n toepaslike vergelyking om die oplossing te vind.

VRAAG 30

Beskou die funksie  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$

30.1 Toon aan dat  $-1$  'n nulpunt is van  $f(x)$ .

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(1) Laag: Die student moet basiese wiskundige kennis hê, deur te weet dat om die nulpunt te bewys moet die x waarde in die funksie in vervang word.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Kies 'n toepaslike vergelyking om aan te toon dat die spesifieke x waarde n nulpunt vorm van die vergelyking.

30.2 Ontbind  $f(x)$  vervolgens volledig in reële priemfaktore.

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Student kan basiese kennis toepas om die reële priemfaktore te vind van die funksie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Selekteer een bekende prosedure.

### VRAAG 31

Beskou die funksies

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 7x + 20 \text{ en } g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 8$$

31.1 Gebruik die Euklidiese algoritme en bepaal die grootste gemeenskaplike faktor (GGF).

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student gebruik vaste patrone wat met herhaling ingeoefen is.	(2) Toepassing: <i>Selekteer</i> : Selekteer een bekende prosedure

31.2 Skryf nou hierdie gemeenskaplike faktor in die vorm  $u(x) f(x) + v(x) g(x)$ .

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Die student kan moet kennis toepas in 'n bekende situasie.	(2) Toepassing: <i>Selekteer:</i> Die delingsalgoritme moet toegepas word.

VRAAG 32

Ontbind die volgende rasionale funksie volledig in partiële breuke. (8)

$$\frac{2x^2 + 2x}{x^3 - 8}$$

Bevoegdheidsvlakke	Kognitiewe vlakke
(ii) Intermediêr: Student kan sy wiskundige kennis toepas om die gegewe rasionale funksie volledig te ontbind in partiële breuke.	(2) Toepassing: <i>Los roetine probleme op:</i> Maak 'n keuse van prosedure na gelang van uitkoms van stappe.

## ADDENDUM C

### TOESTEMMING VAN KAMPUSREGISTRATEUR

**Epos van (wnd) Kampusregistrator, dr Tom Larney; 5 Desember 2012**

**Re: Versoek: Gebruik van studente-data vir navorsingdoeleindes**

Middag (soos dit ondertussen geword het) Hercules,

Eweneens baie dankie vir ons gesprek en vir die uiteensetting van die versoek. Ek het tydens ons gesprek van jou verstaan dat die inligting alles by Wiskunde en Ingenieurswese te kry is, dat hulle daartoe bereid is, en dat dit daarom geen groot sentrale verwerking of programmering gaan vereis nie. In die lig daarvan, en ook van die oordeel van die Etiekkomitee, gee ek daarom graag hiermee die gevraagde toestemming.

Groetnis.

Tom

**Tom Larney**

Waarnemende Kampusregistrator

Potchefstroomkampus

018-299-2604 (T)

082-711-2502 (S)

[www.nwu.ac.za](http://www.nwu.ac.za)



**Tom Larney**

Acting Campus Registrar

Potchefstroom Campus

27-18-299-2604 (T)

27-82-711-2502 (M)

[www.nwu.ac.za](http://www.nwu.ac.za)