

Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë

ME Pieters

 orcid.org/0000-0002-1525-7170

Proefskrif aanvar ter nakoming vir die graad *Philosophia Doctor*
in *Wiskunde-onderwys* in die Fakulteit Opvoedkunde aan die
Potchefstroomkampus van die Noordwes-Universiteit

Promotor: Dr A Roux
Mede-promotor: Dr T Jordaan

Gradeplegtihheid: Julie 2023
Studentenommer: 20884249

VERKLARING VAN OUTENTITEIT

VERKLARING

Ek, die ondergetekende, verklaar hiermee dat die werk vervat in hierdie proefskrif my eie oorspronklike werk is en dat ek dit nie voorheen, in geheel of gedeeltelik, by enige universiteit ingedien het vir 'n graad nie.

Handtekening

2022-11-24

Datum

Outeursreg © 2018 Noordwes-Universiteit (Potchefstroomkampus)

Alle regte voorbehou

ERKENNINGS

Aan my liefdevolle man en kind, Johann en Neil, baie dankie vir julle ondersteuning en liefde. Sonder my gesin sou ek nie kon funksioneer nie. Dankie vir julle opofferings en die geleentheid om te kan studeer.

Dankie aan my ma, wat my altyd motiveer. Dankie dat Mamma altyd sê Ma is trots op my en baie dankie vir die grondslag wat Ma vir my gelê het. Ma het 'n leergierigheid vanaf kleuterdae by my gekweek.

Dr Annalie en dr Tertia, baie dankie vir raad, leiding, motivering en geduld. Dr Tertia sê altyd ek is 'n droomstudent – dit is omdat ek droomstudieleiers het. Ek kon nie vir beter vra nie.

Tannie Pikkie, Judy en my kerkvriendinne, Lydia en Adele, wat altyd vir my bid, wil ek ook bedank, want gebed is die beste geskenk wat geld nie kan koop nie.

Groot dank aan:

- Die Suid-Afrikaanse Akademie vir Wetenskap en Kuns vir die fondse wat aan my beskikbaar gestel is.
- My sussie, Santie.
- My kollegas wat my deurentyd ondersteun.
- Die beheerliggaam en hoof van Laerskool President Pretorius.

En bo alles, dankie Here Jesus vir al die seëninge wat ek daagliks ervaar. Efesiërs 3:20 (BDV:2020): “Aan Hom wat die mag het oor alle dinge, aan Hom wat deur sy krag wat in ons werk in staat is om oneindig meer te doen as alles wat ons bid of dink, aan Hom kom toe die heerlikheid in die kerk en in Christus Jesus deur alle geslagte heen, vir ewig en ewig. Amen.”

OPSOMMING

RIGLYNE VIR DIE ONTWIKKELING VAN ALGEBRAÏESE DENKE DEUR MIDDEL VAN WISKUNDETAAL EN METAKOGNITIEWE STRATEGIEË

Suid-Afrikaanse leerders word die eerste keer in graad 7 aan algebra blootgestel en daarom speel wiskundetaal 'n kritieke rol in die ontwikkeling van algebraïese denke (Chimoni *et al.*, 2019:58). Algebraïese denke ontwikkel deur vier dimensies, naamlik algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:966). Metakognitiewe strategieë (beplanning, monitering, evaluering en refleksie) dra by tot die ontwikkeling van algebraïese denke omdat dit leerders tot hoërorde-denkvaardighede bemagtig (Molin *et al.*, 2020:3). Om metakognitiewe strategieë prakties aan graad 7-leerders te onderrig, het die navorser 'n metakognitiewe strategiesiel met tien toepaslike metakognitiewe strategieë ontwerp.

In die studie is daar gebruik gemaak van 'n doelgerigte steekproef om te bepaal watter leerders geskik sal wees om as deelnemers gekies te word. Graad 7-leerders moes 'n woordelys voltooi, waar die wiskundeterme in die linkerkantste kolom staan en leerders in die regterkantste kolom skryf wat hulle onder elke term verstaan. Deur middel van die woordelys het die navorser vyf deelnemers met swak wiskundetaal, vyf deelnemers met gemiddelde wiskundetaal en vyf deelnemers met sterk wiskundetaal gekies.

'n Empiriese kwalitatiewe studie is deur middel van 'n ontwerpgebaseerde navorsingmodel gedoen om die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke te ondersoek. Die vier data-insamelingsinstrumente was: 'n woordelys, waarnemings van leerderaktiwiteite, 'n algebrataak en taakgebaseerde onderhoude. Uit die data-ontleding was dit duidelik dat wiskundetaal en metakognitiewe strategieë vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is. Hierdie gevolgtrekking is ook in die literatuur bevestig.

Na afloop van die navorsing is die navorser in staat om effektiewe riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë saam te stel, wat ander graad 7-wiskunde-onderwysers in Suid-Afrika in hulle onderrigpraktyk kan gebruik.

SLEUTELWOORDE

Algebra

Algebraïese denke

Metakognitiewe strategieë

Wiskunde

Wiskundetaal

ABSTRACT

GUIDELINES FOR DEVELOPING ALGEBRAIC THINKING THROUGH MATHEMATICAL LANGUAGE AND METACOGNITIVE STRATEGIES

South African learners are first exposed to algebra in Grade 7 and therefore mathematical language plays a critical role in the development of algebraic thinking (Chimoni *et al.*, 2019:58). Algebraic thinking develops through four dimensions, namely general content strings, algebraic concepts, algebraic processes, and forms of reasoning (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:966). Metacognitive strategies (planning, monitoring, evaluation, and reflection) contribute to the development of algebraic thinking because they empower learners to higher-order thinking skills (Molin *et al.*, 2020:3). In order to practically teach metacognitive strategies to Grade 7 learners, the researcher designed a metacognitive strategy wheel with ten applicable metacognitive strategies.

In the study, purposeful sampling was used to determine which learners would be suitable to be selected as participants. Grade 7 learners had to complete a word list where the mathematical terms were in the left-hand column and learners wrote what they understood under each term in the right-hand column. By means of the word list, the researcher selected five participants with poor mathematical language, five participants with average mathematical language and five participants with strong mathematical language.

An empirical qualitative study was conducted by means of a design-based research model to investigate the development of Grade 7 learners' algebraic thinking. The four data collection tools were a word list, observations of learner activities, an algebra task, and task-based interviews. From the data analysis it was clear that mathematical language and metacognitive strategies are necessary for the development of algebraic thinking. This conclusion has also been confirmed in the literature.

After completing the research, the researcher is able to compile effective guidelines for the development of algebraic thinking by means of mathematical language and metacognitive strategies, which other Grade 7 Mathematics teachers in South Africa can use in their teaching practice.

KEY TERMS

Algebra

Algebraic thinking

Metacognitive strategies

Mathematics

Mathematical language

INHOUDSOPGAWE

VERKLARING VAN OUTENTITEIT	I
ERKENNINGS.....	II
OPSOMMING.....	III
ABSTRACT	V
LYS VAN TABELLE	XIV
LYS VAN FIGURE	XV
LYS VAN AFKORTINGS	XX
HOOFSTUK 1	1
INLEIDING EN PROBLEEMSTELLING	1
.....	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.
1.1 Inleiding	2
1.2 Probleemstelling	2
1.3 Teoretiese en konseptuele raamwerk	4
1.3.1 Algebraïese denke	5
1.3.2 Metakognitiewe strategieë	7
1.3.3 Wiskundetaal	7
1.4 Navorsingsvrae	8
1.4.1 Doelstellings.....	8
1.5 Navorsingsontwerp en -metodologie	9
1.5.1 Navorsingsparadigma	9
1.5.2 Populasie en steekproef	11
1.5.3 Data-insameling (metodes, strategieë en instrumente)	12
1.5.4 Data-ontleding.....	13
1.5.5 Konsekwentheid.....	14
1.5.6 Etiese oorwegings	15

1.6	Bydrae van studie	15
1.7	Ten slote	16
HOOFSTUK 2		17
DIE ONTWIKKELING VAN ALGEBRAÏESE DENKE		17
.....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.		
2	Inleiding	18
2.1	Die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë	18
2.1.1	Inleiding tot graad 7-algebra	19
2.1.2	Algebra in die Suid-Afrikaanse Wiskundekurrikulum	20
2.2	Die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke	21
2.2.1	Algemene inhoudsvelde	23
2.2.1.1	Algemene algoritmes	23
2.2.1.2	Funksionele denke	24
2.2.1.3	Modelleringsaal	26
2.2.2	Algebraïese konsepte wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke	27
2.2.2.1	Gelykheid	28
2.2.2.2	Eienskappe van getalle	29
2.2.2.3	Eienskappe van bewerking	30
2.2.2.4	Onbekende waarde/veranderlikes	31
2.2.2.5	Simbole	31
2.2.3	Algebraïese prosesse wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke	32

2.2.3.1	Waarneming.....	33
2.2.3.2	Veralgemening	34
2.2.3.3	Voorstellings	34
2.2.3.4	Toets vir geldigheid.....	35
2.2.4	Redeneringsvorme	36
2.2.4.1	Abduktiewe redenering	37
2.2.4.2	Induktiewe redenering	38
2.2.4.3	Deduktiewe redenering	40
2.3	Metakognisie	41
2.3.1	Metakognitiewe strategieë	43
2.3.2	Die rol van onderwysers as fasiliteerders van metakognisie, selfgerigte leer en wiskundige bevoegdheid	45
2.3.2.1	Onderwysers as fasiliteerders van metakognisie.....	46
2.3.2.2	Onderwysers as fasiliteerders van selfgerigte leer	46
2.3.2.3	Onderwysers as fasiliteerders van wiskundige bevoegdheid	47
2.4	Die rol van wiskundetaal in die ontwikkeling van algebraïese denke.....	49
2.4.1	Algebrataal	50
2.4.2	Wiskundeterme rakende bewerkings	51
2.4.3	Algemene wiskundeterme	51
2.5	Samevatting.....	52
HOOFSTUK 3		54
NAVORSINGSONTWERP EN -METODOLOGIE.....		54
.....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.		
3.1	Inleiding	55

3.2	Navorsingsparadigma	56
3.3	Navorsingsontwerp	57
3.4	Ontwerpgebaseerde navorsing.....	58
3.5	Fases van OGN	58
3.5.1	Analiseer en exploreer	59
3.5.2	Ontwerp en konstrueer	60
3.5.3	Evalueer en reflekteer.....	60
3.5.4	Implementeer en versprei.....	60
3.6	Ontwerpgebaseerde navorsing om algebraïese denke te ontwikkel	61
3.7	Kwalitatiewe benadering.....	62
3.8	Populasie, steekproefneming en deelnemers	63
3.9	Data-insamelingsmetodes	66
3.9.1	Woordelys (WL)	68
3.9.2	Algebralesse en waarnemings van leerderaktiwiteite (WLA)	69
3.9.3	Algebratake (AT).....	70
3.9.4	Taakgebaseerde onderhoude (TGO).....	70
3.10	Data-ontleding	72
3.11	Die rol van die navorser	76
3.12	Konsekwentheid	77
3.13	Etiese aspekte	79
3.14	Samevatting.....	80
HOOFSTUK 4		81
AANBIEDING VAN RESULTATE		81

.....ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.	
4.1	Inleiding 82
4.2	Data-ontleding 84
4.2.1	Woordelys 84
4.2.1.1	Woordontleding 87
4.2.1.2	Woordelyssamevatting 91
4.2.2	Waarnemings van leerderaktiwiteite (WLA) 91
4.2.2.1	Algemene inhoudsvelde 92
4.2.2.2	Algebraïese konsepte 97
4.2.2.3	Algebraïese prosesse 100
4.2.2.4	Redeneringsvorme 104
4.2.2.5	Metakognitiewe strategieë wat tydens waarnemings van leerderaktiwiteite gebruik is 108
4.2.3	Algebratake (AT)..... 111
4.2.3.1	Algemene inhoudsvelde 112
4.2.3.2	Algebraïese konsepte 117
4.2.3.3	Algebraïese prosesse 124
4.2.3.4	Redeneringsvorme 128
4.2.3.5	Metakognitiewe strategieë in die AT 131
4.2.4	Taakgebaseerde onderhoude (TGO) 132
4.2.4.1	Begrip van gelykheid 133
4.2.4.2	Metodes om onbekende waardes op te los 133
4.2.4.3	Metakognitiewe strategieë 135

4.3	Samevatting.....	136
HOOFSTUK 5	137	
RIGLYNE VIR DIE ONTWIKKELING VAN ALGEBRAÏESE DENKE DEUR MIDDEL VAN WISKUNDETAAL EN METAKOGNITIEWE STRATEGIEË.....	137	
	ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.	
5.1	Opsomming	138
5.1.1	Hoofstuk 1	138
5.1.2	Hoofstuk 2	138
5.1.3	Hoofstuk 3	138
5.1.4	Hoofstuk 4	138
5.2	Beantwoording van subnavorsingsvrae	139
5.2.1	Die eerste subnavorsingsvraag	139
5.2.2	Die tweede subnavorsingsvraag	141
5.2.3	Die derde subnavorsingsvraag	142
5.3	Navorsingsvraag	143
5.3.1	Eerste riglyn: Gebruik dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke.....	144
5.3.2	Tweede riglyn: Onderrig algebrataal	144
5.3.3	Derde riglyn: Onderrig in korrekte wiskundetaal	145
5.3.4	Vierde riglyn: Onderrig eksponente en wortels met konkrete hulpmiddels	146
5.3.5	Vyfde riglyn: Ruim wanbegrippe uit die weg	146
5.3.6	Sesde riglyn: Stel metakognitiewe strategieë bekend	147
5.3.7	Sewende riglyn: Skep 'n “dinkklaskamer”	147
5.3.8	Agtste riglyn: Trek verwantskappe tussen algebra en patrone.....	147
5.4	Gevolgtrekkings en aanbevelings	148

5.5	Beperkings	149
5.6	Bydrae van die navorsing	149
5.7	Aanbevelings vir toekomstige navorsing	150
VERWYSINGSLYS		151
BYLAAG A: ETIEK GOEDKEURING		160
BYLAAG B: BRIEF AAN OUERS VAN DEELNEMERS		161
BYLAAG C: BRIEF AAN DEELNEMERS		167
BYLAAG D: BRIEF AAN SKOOLBEHEERLIGGAAM		172
BYLAAG E: BRIEF AAN SKOOLHOOF		176
BYLAAG F: BRIEF AAN ONDERWYSDEPARTEMENT		180
BYLAAG G: ALGEBRA KLASAKTIWITEITE		183
BYLAAG H: WOORDELYS		185
BYLAAG I : ALGEBRATAAK		186
BYLAAG J: WAARNEMINGSKEDULE		195
BYLAAG K: TAAKGEBASEERDE ONDERHOUDSVRAE		196
BYLAAG L: VERKLARING VAN TAALVERSORGER		198
BYLAAG M: SERTIFIKAAT VAN ETIEKOPLEIDING		199
BYLAAG N: TURNITIN VERSLAG		200

LYS VAN TABELLE

Tabel 1-1:	Meetinstrumente van data-insameling	13
Tabel 3-1:	Fases van ontwerpgebaseerde navorsing om riglyne vir algebraïese denke te ondersoek	61
Tabel 3-2	Uiteensetting van deelnemer inligting	65
Tabel 3-3:	Data-insamelingsmetodes en -instrumente	67
Tabel 3-4:	Struktuur vir data-ontleding.....	75
Tabel 3-5:	Kodering van tegnieke vir metakognitiewe strategieë.....	76
Tabel 4-1:	Ontleding van data van woordelys	86
Tabel 4-2:	Probleem om reël te bepaal.....	103
Tabel 4-3:	Opsomming van data van AT	111

LYS VAN FIGURE

Figuur 1-1:	Vier dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke (Chimoni <i>et al.</i> , 2019)	5
Figuur 1-2:	Diagrammatiese voorstelling van die navorsingsontwerp	9
Figuur 1-3:	Die iteratiewe siklus van OGN (aangepas uit Plomp, 2013: 17)	10
Figuur 2-1:	Ontwikkeling van algebraïese denke vir graad 7-leerders	19
Figuur 2-2:	Die vier dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke (aangepas uit Chimoni, <i>et al.</i> , 2018:61)	22
Figuur 2-3:	Eerste dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke	23
Figuur 2-4:	Voorbeeld van 'n graad 7-oefening met rekursiewe patrone (DvBO-leerderboek 2:110)	25
Figuur 2-5:	Ooreenstemmende verwantskappe (DvBO-leerderboek 2:8)	26
Figuur 2-6:	Tweede dimensie van die ontwikkeling van algebraïese denke	28
Figuur 2-7:	Konsepbeeld van algebrataal (DvBO-leerderboek 2:28)	29
Figuur 2-8:	Derde dimensie van die ontwikkeling van algebraïese denke	33
Figuur 2-9	Voorbeeld van 'n getalpatroon waarvan leerders maklik die patroon identifiseer	34
Figuur 2-10:	Korrekte wiskundetaal (DvBO-leerderboek 2:125)	35
Figuur 2-11:	Vierde dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke	36
Figuur 2-12	Redeneringvorme wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is	37
Figuur 2-13:	Bepaal die n de term (DvBO-leerderboek 2:127)	37
Figuur 2-14:	Patroon van driehoeksgetalle	39
Figuur 2-15:	Oefening van isolasiemetode vir induktiewe redenering (DvBO-leerderboek 2:132)	40

Figuur 2-16:	Voorbeeld van oefening vir deduktiewe denke (DvBO- leerderboek 2:105)	40
Figuur 2-17:	Komponente van metakognisie (aangepas uit Flavell, 1979:909).....	42
Figuur 2-18:	Onderwyser se rol as fasiliteerder	46
Figuur 2-19:	Vyf velde van wiskundebevoegdheid (aangepas uit Kilpatrick <i>et al.</i> , 2002)	47
Figuur 2-20:	Wiskundetaal.....	50
Figuur 3-1:	Visuele voorstelling van hoofstuk 3	55
Figuur 3-2:	Generiese model om ontwerpgebaseerde navorsing uit te voer (McKenney & Reeves, 2021:86).....	59
Figuur 3-3:	Kwalitatiewe navorsingsiklus (aangepas uit Nieuwenhuis, 2020b:59)	63
Figuur 3-4:	Kwalitatiewe navorsingsiklus: data-insameling	64
Figuur 3-5:	Metakognitiewe strategiewiel (eie ontwerp)	71
Figuur 3-6:	Kwalitatiewe navorsingsiklus: Data-ontledingsprosedure	72
Figuur 3-7:	Elemente wat nodig is vir data-ontleding (Nieuwenhuis, 2020a:124).....	73
Figuur 3-8:	Data-ontleding van woordelys (WL)	74
Figuur 3-9:	Oorsig van kristalliseringsproses (aangepas uit Maree, 2020:46).....	79
Figuur 4-1:	Visuele uitbeelding van data-insamelingsinstrumente	83
Figuur 4-2:	Verdeling van woordelys.....	88
Figuur 4-3:	Vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke.....	92
Figuur 4-4:	Deelnemer C3 sukkel met eenvoudige aftreksom	93
Figuur 4-5:	Deelnemer C3 se tweede poging	94
Figuur 4-6:	Deelnemer C3 tel op haar vingers	94
Figuur 4-7:	Deelnemer B5 teken 'n getallelyn bo haar berekening	95

Figuur 4-8:	Opsomming van bewerkings met heelgetalle	95
Figuur 4-9:	Algebraïese vergelykings met heelgetalle	96
Figuur 4-10:	Foutiewe oplossing van probleem met heelgetalle	97
Figuur 4-11:	Voorbeeld van vergelyking met veranderlike aan die linkerkant.....	98
Figuur 4-12:	Deelnemer C5 se konsep van bewerking.....	99
Figuur 4-13:	Derdemagswortels	100
Figuur 4-14:	Deelnemer C5 bepaal die honderdste onewe getal	101
Figuur 4-15:	'n Voorbeeld van 'n invoer-uitvoerdiagram (DvBO- leerderboek 2:25).....	101
Figuur 4-16:	Voorstelling in tabelvorm	102
Figuur 4-17:	Deelnemer C2 bepaal die reël	102
Figuur 4-18:	Deelnemer B3 se berekeningsfout	103
Figuur 4-19:	Deelnemer B5 toets vir geldigheid.....	104
Figuur 4-20:	Improvisasie vir 'n witbord	105
Figuur 4-21:	Deelnemer C1 gebruik honderdkaart vir berekeninge	106
Figuur 4-22:	Deelnemer B5 voorspel 'n patroon	106
Figuur 4-23:	Deelnemer A1 voorspel 'n getalpatroon	107
Figuur 4-24:	Deelnemer B3 bewys hoek A is 60 grade	107
Figuur 4-25:	Deelnemer B3 dink hardop	108
Figuur 4-26:	Beplanning deur modellering en samewerking	109
Figuur 4-27:	Deelnemer A1 se monitering	110
Figuur 4-28:	Evaluering van bewerkingsproses	110
Figuur 4-29:	Twee trapesiumtafels met 8 kinders	112

Figuur 4-30:	Voorbeeld van voorstelling van deelnemer C4	113
Figuur 4-31:	Deelnemer B1 se voorstelling in tabelformaat	114
Figuur 4-32:	Voorbeeld van kovariasie-verwantskappe	114
Figuur 4-33:	Deelnemers brei die patroon uit	115
Figuur 4-34:	Deelnemer A2 maak 'n formuleringsfout	116
Figuur 4-35:	Nie-korrekte modelleringstaal	117
Figuur 4-36:	Deelnemer C3 ondervind nog probleme met persentasie	118
Figuur 4-37:	Twee algebraïese vergelykings	119
Figuur 4-38:	Wanbegrip van eienskappe van nul	120
Figuur 4-39:	Deelnemer se wanbegrip van kommutatiewe eienskap	121
Figuur 4-40:	Deelnemer weet nie wat beteken kommutatiewe eienskap nie	121
Figuur 4-41:	Berekeningsfoute om onbekende waarde te bepaal	122
Figuur 4-42:	Deelnemer C3 se onvermoë om 'n getalpatroon waar te neem	124
Figuur 4-43:	Deelnemer C4 se gedeeltelik korrekte terugvoer	125
Figuur 4-44:	Voorstelling in die vorm van invoer-uitvoerdiagram	126
Figuur 4-45:	Deelnemer C2 se poging om onbekende waardes van voorstelling te bepaal	126
Figuur 4-46:	Toets vir geldigheid	127
Figuur 4-47:	Verkeerde terugvoer op vraag	128
Figuur 4-48:	Deelnemer A3 se verduideliking	129
Figuur 4-49:	Deelnemer A4 se gedeeltelik korrekte antwoord	129
Figuur 4-50:	Korrekte antwoord van deelnemer B4	130
Figuur 4-51:	Deelnemer C3 se verkeerde terugvoer	130

Figuur 4-52:	Modellering as metakognitiewe strategie	132
Figuur 4-53:	Deelnemer C2 maak berekeningsfout.....	135
Figuur 5-1:	Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke	144

LYS VAN AFKORTINGS

Afkorting	Beskrywing
AT	Algebratake
BDV	Bybel direkte vertaling
DvBO	Departement van Basiese Onderwys
JOP	Jaarlikse onderrigplan
KABV	Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsverklaring
MKS	Matakognitiewe strategieë
WLA	Waarnemings van leerderaktiwiteite
OGN	Ontwerpgebaseerde navorsing
SGL	Selfgerigte leer
TGO	Taakgebaseerde onderhoude
WL	Woordelys

HOOFSTUK 1

INLEIDING EN PROBLEEMSTELLING

1.1 Inleiding

Patrone, funksies en algebra is 'n inhoudsarea wat vanaf die Grondslagfase tot Verdere Onderrig en Opleiding deur die Suid-Afrikaanse kurrikulum gedek word. Ten spyte van die belangrikheid van algebra, vind leerders die vakgebied uitdagend (Khalid *et al.*, 2020:4168). Die navorser het graad 7-leerders se algebraïese denke ondersoek om bogenoemde probleem te probeer analiseer. Algebraïese denke is 'n spesifieke tipe redenering wat van bewerkings gebruik maak om 'n onbekende waarde te vind (Demonty *et al.*, 2018:2). 'n Ander definisie van algebraïese denke is 'n spesifieke vorm van refleksie oor veralgemening, voorstelling en bewys van rekenkundige patrone (Stylianou *et al.*, 2019:531). In hierdie studie word algebraïese denke in vier dimensies verdeel: algebraïese inhoudsvelde, basiese algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme (Chimoni *et al.*, 2018:60).

Suid-Afrikaanse leerders vaar nie goed in internasionale wiskundetoetsing nie (Saal *et al.*, 2019:406). Verder het leerders in 'n onvoorspelbare en snelveranderende wêreld kritieke vaardighede nodig om selfgerig te kan leer (Du Toit & Blignaut, 2019:514). Selfgerigte leer ontwikkel deur middel van metakognitiewe strategieë (Breed & Bailey, 2018:3). Die wiskunde-onderwyser speel 'n belangrike rol as bemiddelaar van selfgerigte leer en metakognitiewe strategieë (Molin *et al.*, 2020:1). Flavell (1979:906) beskryf metakognisie as 'n persoon se monitering van hulle kognitiewe prosesse. Verder verdeel Flavell (1979:906) metakognisie in vier kategorieë: metakognitiewe kennis, metakognitiewe ervaring, metakognitiewe doelwitte en metakognitiewe strategieë. In hierdie studie is daar op metakognitiewe strategieë gefokus.

Die Suid-Afrikaanse kurrikulum beskou wiskunde as 'n gespesifiseerde taal (DvBO, 2011:8), waaronder algebrataal 'n gespesialiseerde wiskundetaal is (DvBO, 2011:63). Wiskundetaal, meer spesifiek algebrataal, is vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig (Litke, 2020:5). Ledibane *et al.* (2018:1) stel dit dat wiskunde 'n taal op sy eie is met grammatika, woordeskat, woordorde, idiome, afkortings, akronieme, stamwoorde, voorvoegsels en paragraafstrukture. Wiskunde-onderrig en -leer is kompleks en vereis van onderwysers en leerders om verbale en skriftelike woorde, simbole en visuele aanbiedings te gebruik om in wiskunde te kommunikeer (Wilkinson, 2019:87). Die verstaan van wiskundetaal is 'n groot bydraende faktor tot wiskundeprestasies (Riccomini *et al.*, 2015:235), veral in Suid-Afrika, waar vele leerders in 'n tweede taal onderrig word (Ledibane *et al.*, 2018:1).

1.2 Probleemstelling

Wiskunde is oor die algemeen vir Suid-Afrikaanse leerders 'n uitdaging en nog meer spesifiek is algebraïese denke te ingewikkeld vir leerders. Suid-Afrika het in 2003, 2011 en 2015 aan 'n

internasionale assessering genaamd TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) deelgeneem (Alex & Juan, 2017:4) . In 2007 het die Suid-Afrikaanse Departement van Basiese Onderwys besluit om aan die TIMSS-toetsing te onttrek omdat Suid-Afrika 'n gemiddelde van slegs 33% in 2003 behaal het (Reddy & Hannan, 2018). Suid-Afrika het weer in 2011 en 2015 deelgeneem, maar was weer laaste uit 48 lande op die rangleer. In 2015 het Suid-Afrikaanse leerders in die Intermediêre Fase (graad 4 tot 6) 'n gemiddelde van 37,6% in Wiskunde behaal (Saal *et al.*, 2019:406) .

Daar word van onderwysers in die 21ste eeu verwag om leerders met selfgerigteleervaardighede te bemagtig om in 'n vinnig veranderende wêreld aan te pas (Van Zyl & Mentz, 2019:67). Selfgerigte leer word aangedryf deur metakognisie, omdat selfgerigte leerders hulle denke deurlopend monitor en reguleer (Van Zyl & Mentz, 2019:73). Refleksie is die doelbewuste interaksie tussen metakognitiewe kennis en selfregulering van die onderrig- en leerproses. Selfregulering is aktiewe beplanning, monitering, regulering en reflektering van denke. Slegs inhoudskennis is nie meer vir leerders genoeg om in wiskunde te presteer nie. Selfgerigte leer ontwikkel kritiese en kreatiewe denke, wat vir probleemoplossing nodig is (Du Toit-Brits, 2018:381). Metakognisie is 'n primêre komponent van selfgerigte leer (Breed & Bailey, 2018:2). Flavell (1979:906), wat as die vader van metakognisie beskou word, onderskei tussen vier afdelings van metakognisie, naamlik metakognitiewe kennis, metakognitiewe ervarings, metakognitiewe doelwitte en metakognitiewe strategieë. Metakognitiewe strategieë sluit beplanning, monitering, evaluering en reflektering in, wat die leerder vir kognitiewe prosesse gebruik (Daher *et al.*, 2018:293). In die studie word metakognitiewe strategieë as 'n moontlike oplossing vir die onderontwikkelde algebraïese denke van graad 7-leerders ondersoek.

Die navorser poog om metakognitiewe strategieë tesame met korrekte wiskundetaal te gebruik om algebraïese denke by graad 7-leerders te ontwikkel. Wiskunde bestaan uit notasies, simbole, terminologie, modelle en uitdrukkings wat die kommunikasieproses in onderrig en leer kompliseer (Ledibane *et al.*, 2018:1). 'n Opvallende wêreldwye kwessie is die belangrikheid van wiskundetaal, wat nodig is vir 'n empiriese grondslag vir die onderrig en leer van wiskunde (Wilkinson, 2019:87). Wêreldwyd is wiskunde-onderrig en -leer kompleks, omdat daar van wiskunde-onderwysers en leerders verwag word om oor wiskundekennis en -taal (verbaal en skriftelik, wat simbole en notasies insluit) te beskik (Wilkinson, 2019:87).

Die ontwikkeling van algebraïese denke is 'n internasionale kwessie wat in vele lande 'n bron van kommer is (Chimoni *et al.*, 2018:57). Algebra word beskryf as die “hekwag” van wiskunde, maar baie leerders sukkel met algebra (Powell *et al.*, 2019:1). Suid-Afrikaanse onderwys is uniek omdat ons so 'n diverse gemeenskap met 'n ryk etniese en kulturele omgewing is. Navorsing is op eie

bodem nodig om kwessies soos die rol wat taal en metakognitiewe strategieë in die ontwikkeling van algebraïese denke speel, te hanteer. Die navorser is 'n onderwyseres en ervaar die uitdagings daaglik en daarom is daar die behoefte om graad 7-leerders se algebraïese denke te ontwikkel.

Ná afloop van elke November-eksamen is dit duidelik dat die leerders nie algebra verstaan nie. Dit lei tot 'n groot bekommernis dat die grondslag van algebra nie stewig genoeg in graad 7 gelê word nie. Die dalende persentasie in algebra is duidelik sigbaar wanneer leerders in graad 9 kom (Pournara, 2020:4). Vele graad 9-leerders wat oor graad 7- tot 9-algebra getoets word, toon teleurstellende uitslae (Pournara, 2020:6). Litke (2020:1) is van mening dat algebraïese denke bevorder kan word indien die wiskunde-onderwyser instruksies in die korrekte wiskundetaal aan leerders gee.

Die gaping wat in die literatuur geïdentifiseer is, is dat daar al heelwat navorsing oor metakognisie en wiskundetaal gedoen is (Biccard, 2017:218), maar die verband tussen die twee konsepte word selde ondersoek. Vorige studies het bewys dat leerders wat oor metakognitiewe strategieë beskik, oor die algemeen beter in wiskunde vaar (Daher *et al.*, 2018:295), maar daar is nie op algebraïese denke gefokus nie. Algebraïese denke word ook nie in die literatuur op die gebruik van korrekte wiskundetaal of metakognitiewe strategieë gebaseer nie.

In hierdie studie is daar op die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë gefokus. Die doel van die navorsing was om deur middel van taal en metakognitiewe strategieë riglyne vir die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke te bied.

In hierdie studie word algebraïese denke van graad 7-leerders onder vier dimensies ondersoek: algebraïese inhoudsvelde, basiese algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme.

1.3 Teoretiese en konseptuele raamwerk

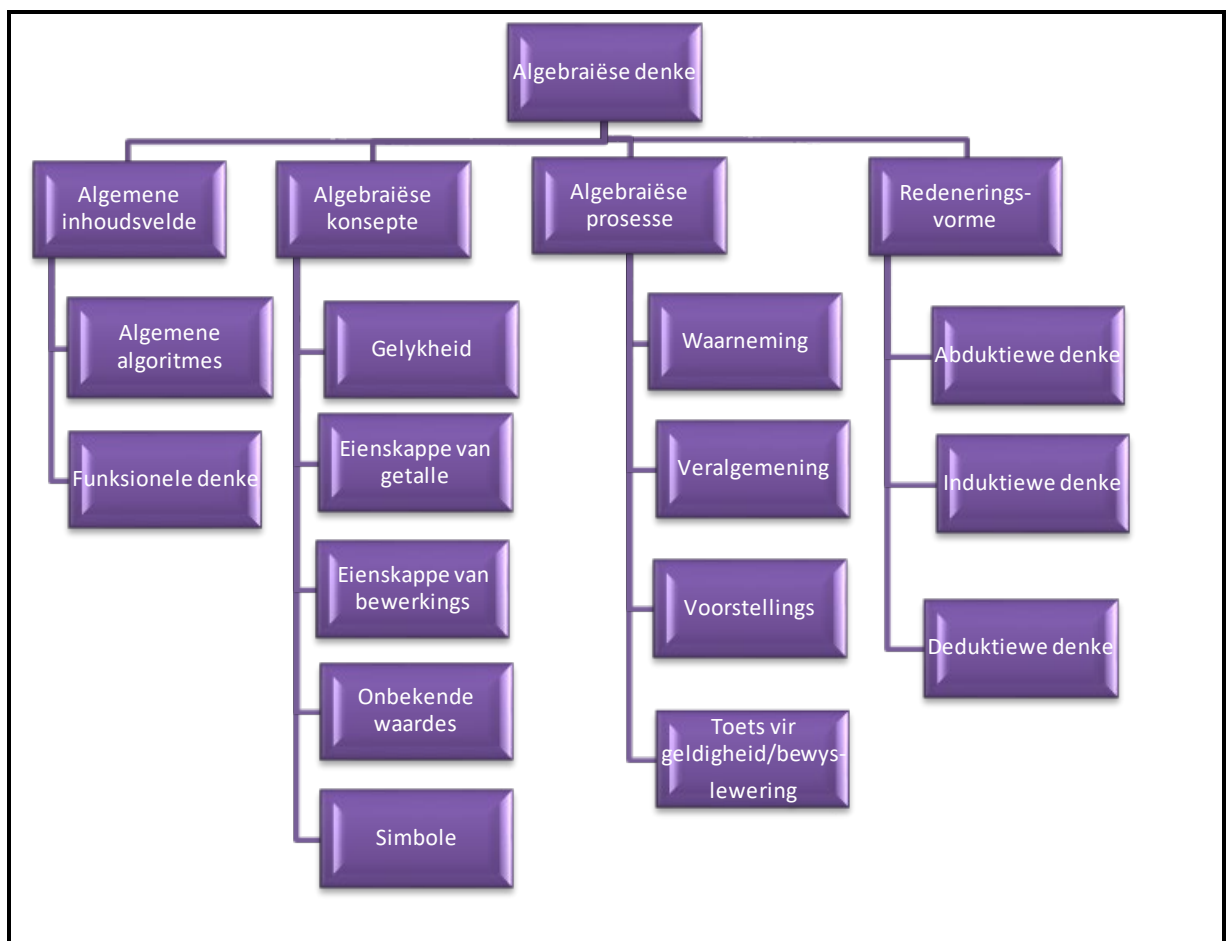
Hierdie studie volg 'n ontwerpgebaseerde navorsingsmetodologie. Die eerste fase van ontwerpgebaseerde navorsing is analiseer en eksploreer. In hierdie fase ondersoek die navorser relevante literatuur om die probleem beter te verstaan (McKenney & Reeves, 2014:7).

Die teoretiese raamwerk van die navorsing is in die vorm van sosiaal-konstruktivisme. Sosiaal-konstruktivistiese benaderings beklemtoon die voorwaardelike aard van kennis en werklikheid, met die argument dat daar geen uiteindelijke objektiewe werklikheid is nie. Hierdie paradigma ondersoek die kennisvormingsprosesse van mense in alledaagse situasies (Leavy, 2017:129).

Die konseptuele raamwerk bestaan uit die volgende konsepte: algebraïese denke, metakognitiewe strategieë en wiskundetaal. Die konseptuele raamwerk word in die volgende gedeelte in detail bespreek.

1.3.1 Algebraïese denke

Algebraïese denke val in vier dimensies, naamlik algemene inhoudsveld, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme (Chimoni *et al.*, 2018:58). Elk van die dimensies word in onderafdelings verdeel, soos uitgebeeld figuur 1-1.



Figuur 1-1: Vier dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke (Chimoni *et al.*, 2019)

1.3.1.1 Algemene inhoudsvelde

Die eerste dimensie van algebraïese denke is algebraïese inhoudsvelde, wat kerninhoud bevat, naamlik algemene algoritmes en funksionele denke. Algemene algoritmes word van jongs af

aangeleer en behels getalle, bewerkings, die gelykaanteken, getalsinne en vergelykings. Funksionele denke is 'n hoër vlak van denke as algemene algoritmes en behels konsepte soos veranderlikes (Chimoni *et al.*, 2018:59). Die feit dat daar verskillende maniere is om probleme op te los, behoort deel te vorm van funksionele denke, sodat daar nie op bepaalde metodes gefokus word nie, maar op wiskundige prosedures.

1.3.1.2 Konsepte wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is

Konsepte is die tweede dimensie wat 'n rol in die ontwikkeling van leerders se algebraïese denke speel. Die konsepte wat nodig is om algebraïese denke te ontwikkel, sluit in gelykheid, eienskappe van getalle, eienskappe van bewerkings, onbekende waardes, simbole en veranderlikes (Chimoni *et al.*, 2018:59). Verder is die verskil tussen gelyk en ongelyk, variasie en kovariasie, diagramme, tabelle, grafieke en simbole deel van die nodige konsepte vir algebraïese denke (Kieran *et al.*, 2016:10). Hierdie konsepte moet in die korrekte wiskundige register aan leerders gekommunikeer word (Wilkinson, 2019:87). Leerders wat algebraïese konsepte verstaan en in staat is om dit te kan toepas, is beter toegegerus om algebraïese prosesse uit te voer.

1.3.1.3 Prosesse van algebraïese denke

Die derde dimensie van algebraïese denke is die uitvoer van spesifieke prosesse. Beide prosesse en wiskundige redenering (die vierde dimensie) is teenwoordig wanneer die leerder 'n wiskundige taak uitvoer (Jeanotte & Kieran, 2017:7). Hierdie dialektiese verband vorm ook deel van korrekte wiskundetaal en daarom moet die onderwyser die prosesse in korrekte wiskundetaal aan leerders verwoord. Waarneming, veralgemening, aanbieding en verduideliking is vier van die prosesse wat vir die uitvoer van wiskundige take nodig is. Die prosesse kan nie sonder die vorige twee dimensies (algemene algoritme en konsepte) uitgevoer word nie. Chimoni *et al.* (2018:58) beskryf wiskundige prosesse asook die inverse prosesse, identifisering van funksies en reëls en onafhanklike denke oor spesifieke getalle as algebraïese gewoontes. Algebraïese gewoontes bemagtig leerders om wiskundige strukture te identifiseer en uit te druk.

1.3.1.4 Redeneringsvorme

Die laaste dimensie is redeneringsvorme. Redeneringsvorme bestaan uit drie afdelings, naamlik abduktiewe, induktiewe en deduktiewe redeneringsvorme. Redeneringsvorme begin vanuit een van drie aspekte: die uitkoms, die reël, of vanuit 'n spesifieke geval, na 'n ander aspek.

Reid (2018:3) stel dit dat **abduktiewe redenering** plaasvind wanneer 'n leerder moontlike resultate van 'n probleem vooruitskat en in staat is om 'n hipotese te toets. Die redeneringsvorm begin by die uitkoms van 'n wiskundige stelling om 'n reël te ontwikkel. Wanneer 'n leerder 'n

verduideliking uit hulle bestaande inligting bied en die gevolgtrekking is onvolledig, dan het abduktiewe redenering plaasgevind (Gilliam, 2019:52). Abduktiewe redenering het twee funksies, naamlik verduideliking van feite en die ontdekking van nuwe inligting.

Induktiewe redenering begin by die leerders se waarnemings oor 'n spesifieke geval en dan maak die leerder 'n algemene stelling wat moontlik is, maar nie verseker is nie. Wasserman en Rossi (2015:25) meen dat induktiewe en deduktiewe redenering saam 'n integrale deel van wiskunde vorm.

Deduktiewe redenering vind in die teenoorgestelde rigting van induktiewe redenering plaas, want deduktiewe redenering beweeg van die algemene reël na die spesifieke toepassing. Deduktiewe redenering vind plaas wanneer 'n leerder die eienskappe van getalle en bewerkings waargeneem het en op probleemoplossing toepas (Gilliam, 2019:52). Redeneringsvorme gaan hand aan hand met reflektiewe denke, wat deel van metakognitiewe strategieë vorm.

1.3.2 Metakognitiewe strategieë

In hierdie studie is daar ondersoek ingestel oor die wyse waarop metakognitiewe strategieë hierdie redeneringsvorme ondersteun om tot die ontwikkeling van algebraïese denke by te dra. Flavell (1979:906) beskryf metakognisie in vier kategorieë: a) metakognitiewe kennis, b) metakognitiewe ervaring, c) metakognitiewe doelwitte en d) metakognitiewe strategieë. Die aanleer van metakognitiewe strategieë het 'n positiewe bydrae tot leerders se redeneringsvermoë, om dat hulle a) kon besluit oor wat nodig is om die taak uit te voer b) die korrekte algoritmes en bewerkings kon identifiseer, c) moontlike resultate kon vooruitskat en d) kon terugkyk of die oplossing vir die taak geskik is (Daher *et al.*, 2018: 293).

1.3.3 Wiskundetaal

Modelleringstaal is van kritieke belang vir die kweek van algebraïese denke. Korrekte wiskundetaal is die sement wat nuwe kennis aan voorkennis vashou (Ledibane *et al.*, 2018:2). In hierdie studie word daar gefokus op die belangrikheid van taal om algebraïese denke te ontwikkel. Taal in wiskunde speel 'n belangrike rol om te kommunikeer, begrippe aan te leer en te verstaan, wankonsepte te diagnoseer en om te assesser (Ledibane *et al.*, 2018:2). Demonty *et al.* (2018:5) is van mening dat wiskunde-onderwysers algebraïese konsepte verbaal aan leerders behoort te verduidelik sodat leerders die verbande kan verstaan. Van der Walt (2009:380) meen dat Suid-Afrikaanse leerders moontlik swakker presteer in wiskunde omdat hulle nie konsepte verstaan nie, maar steeds oor "papegaaikennis" beskik. Sommige leerders kan byvoorbeeld formules opsê en weergee, maar kan nie probleme met die betrokke formule oplos nie. Indien graad 7-

onderwysers die korrekte algebrataal vir leerders leer, word die grondslag vir algebraïese denke gelê. Wanneer wiskunde soos 'n taal aan leerders gebied word, kan Senior en Verdere Onderwys en Opleidingsfase-onderwysers daarop voortbou (Ledibane *et al.*, 2018:11), omdat leerders wiskunde beter verstaan indien hulle die woordeskat verstaan.

Talle leerders (insluitende baie Suid-Afrikaanse leerders) word in 'n tweede taal, soos Engels, onderrig. Niemoedertaalleerders moet die Engelse taal, asook wiskundeterme nuut aanleer (Wilkinson, 2019:88). Tshuma en Le Cordeur (2017:710) verduidelik dat nie alle inheemse tale genoegsaam ontwikkel is om wiskunde-onderrig te steun nie, daarom is Engels 'n beter onderrigtaal. Hierdie taalhindernisse wat tweedetaalleerders beleef, veroorsaak 'n inhoudsgaping in die Grondslag- en Intermediêre Fase, wat tot leerprobleme in die Senior en Verdere Onderwys en Opleidingsfase lei (Tshuma & Le Cordeur, 2017:710). Die inleiding tot formele algebrataal is nuut in die Senior Fase (graad 7) (DvBO, 2011:65). Roos (2019:28) stel dit dat wiskundetaal reg gebruik moet word sodat leerders die korrekte konsepte kan vorm.

1.4 Navorsingsvrae

Die doel van die navorsing was om die volgende primêre navorsingsvraag te beantwoord: ***Watter riglyne kan gebied word vir graad 7-leerders se ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë?***

Die volgende sekondêre navorsingsvrae is geformuleer om die studie te rig en bostaande navorsingsvraag te beantwoord:

1. Wat is graad 7 leerders se ontwikkeling van algebraïese denke aan die hand van die vier dimensies van algebraïese dene ?
2. Watter metakognitiewe strategieë speel 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke?
3. Wat is die rol van wiskundetaal in die leer van algebra in graad 7?

1.4.1 Doelstellings

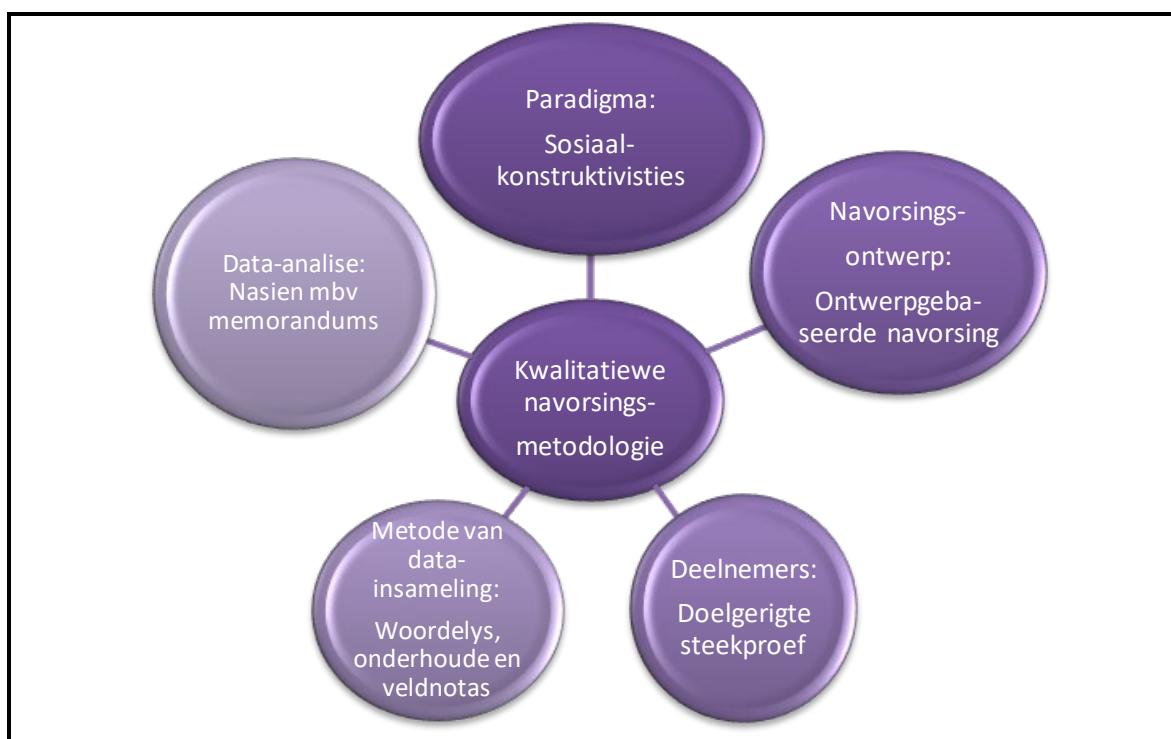
Die doelstelling van die navorsing was om riglyne vir die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë te bied. Met hierdie doelstelling het die navorser gepoog om haar onderrigpraktyk te verbeter en kollegas met riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke te ondersteun. Om die bogenoemde te bereik is daar doelwitte gestel. Die eerste doelwit wou navorser bepaal hoe graad 7-leerders se algebraïese denke ontwikkel. Verder was dit nodig om graad 7-leerders se metakognisie te ondersoek om te bepaal watter metakognitiewe strategieë in die ontwikkeling van algebraïese

denke 'n rol speel. Laastens is wiskundetaal ondersoek in die vorm van algebrataal, wiskundetaal wat verband hou met bewerkings en algemene wiskundetaal, om te bepaal wat die rol van wiskundetaal in die aanleer van algebra in graad 7 is.

1.5 Navorsingsontwerp en -metodologie

Hierdie studie het 'n kwalitatiewe benadering gevolg. Nieuwenhuis (2020a:59) stel dit dat alle kwalitatiewe navorsing naturalisties is omdat daar gefokus word op die natuurlike omgewing waar daar interaksie plaasvind. 'n Kwalitatiewe navorser is geïnteresseerd in hoe mense omgaan met en sin maak van die wêreld waarin hulle leef en ondersoek menslike aktiwiteite (Babbie & Mouton, 2001:270). Al neem die metodologie heelwat tyd in beslag, is dit tog die moeite werd om te volg, want die uitkoms (verstaan) vorm deel van 'n oplossing vir 'n praktiese probleem.

Die studie word onderneem vanuit 'n sosiaal-konstruktivistiese paradigma en die navorsingsontwerp is ontwerpgebaseerde navorsing, soos aangedui in figuur 1-2.



Figuur 1-2: Diagrammatiese voorstelling van die navorsingsontwerp

1.5.1 Navorsingsparadigma

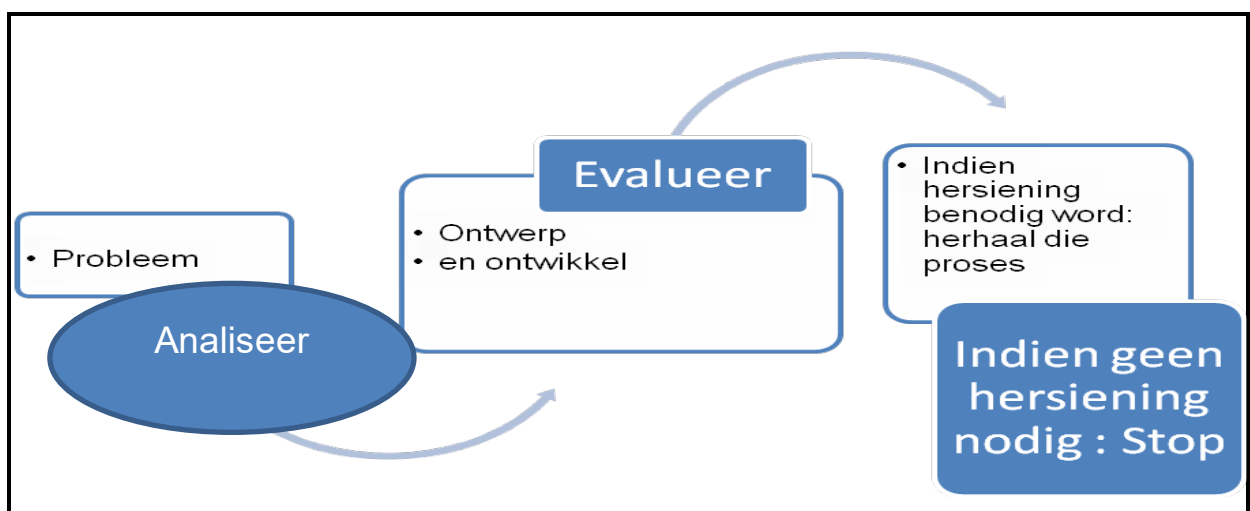
Creswell en Poth (2016:4) onderskei tussen vier filosofiese wêreldbeskouings, naamlik positivisme, sosiaal-konstruktivisme, transformatiewe wêreldbeskouing en die pragmatiese

wêreldbeskouing. Die navorsing vind plaas vanuit 'n sosiaal-konstruktivistiese wêreldbeskouing. Deelnemers het saam met die navorser gewerk om nuwe kennis te konstrueer. In terme van epistemologie is interpretivisme baie na aan konstruktivisme. Epistemologie word deur die navorser se teoretiese kennis bepaal. Die individu is vry om sy/haar eie waarnemings te maak en daarom is epistemologie 'n subjektiewe benadering. Die skepping van nuwe kennis uit ervaring om nuwe leer te bewerkstellig, is 'n fundamentele beginsel van sosiaal-konstruktivisme (Pedro & van der Merwe, 2020:379). Dit wil sê dat sosiaal-konstruktivisme aktiewe leer is, waar die leerder betrokke is by hulle eie kennisvorming en nie net passief wag vir die onderwyser om kennis oor te dra nie.

Om 'n navorsingsontwerp te beplan, is soos om die buitenste dele van 'n legkaart eerste te bou om 'n raamwerk te kry (Nieuwenhuis, 2020b:56). Indien die navorsingsontwerp stewig gevestig is, behoort die navorsing gemaklik te verloop. Die studie is op 'n kwalitatiewe navorsingsontwerp gebaseer.

Ontwerpgebaseerde navorsing in die onderwys is 'n ontwerp wat van verskeie data-insamelingsmetodes gebruik maak. Die literatuur beskryf die metodologie op verskeie maniere, naamlik as ontwerpgebaseerde navorsing, formatiewe navorsing, ontwerp-eksperimente, formatiewe eksperimente en ontwikkelingsnavorsing (McKenney & Reeves, 2014:135). In hierdie studie is die term “ontwerpgebaseerde navorsing” (OGN) gebruik.

'n Sleuteleienskap van OGN is die iteratiewe siklus van analisering, ontwerp, implementering, evaluering en hersiening van intervensies (Gallagher & Fazio, 2019: 30). Die iteratiewe proses kan soos in figuur 1-3 uitgebeeld word:



Figuur 1-3: Die iteratiewe siklus van OGN (aangepas uit Plomp, 2013: 17)

OGN bou 'n brug tussen teorieë en onderwyspraktyk (Bakker & Van Eerde, 2015:430). 'n Onderwyser se onderwyspraktyk kan aangepas word om metakognitiewe strategieë by leerders te kweek om algebraïese denke te ontwikkel. Die doel van OGN is om te beskryf, te vergelyk, te evalueer, te verduidelik en te adviseer (Bakker & Van Eerde, 2015:431).

Volgens McKenney *et al.* (2014:137) bestaan OGN uit (a) 'n probleem, (b) 'n fokus, (c) intervensie wat ontwikkel word, (d) kennis wat gekonstrueer word, (e) navorsingsmetodes, (f) 'n navorsingtydsraamwerk en (g) 'n primêre en praktiese bydrae. In die studie was die probleem die ontoereikende algebraïese denke van graad 7-leerders. Die fokus was wiskundetaal en metakognitiewe strategieë. Intervensies in die vorm van wiskundetaal-oefeninge en algebratake, is deurlopend ontwikkel om metakognitiewe strategieë by leerders te kweek om kennis (algebraïese denke) te konstrueer. As deel van die onderrigplan het alle leerders (nie net slegs die deelnemers nie) intervensie ontvang indien die leerder nie verstaan nie of 'n wanbegrip ontwikkel. Die navorser beoog om 'n praktiese bydrae te lewer deur riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë te ontwerp.

1.5.2 Populasie en steekproef

Die populasie was die skool waar die navorser onderrig gee se graad 7-leerders. Die aantal graad 7-leerders was 100. Die 100 leerders was in vier klasse verdeel, waarvan drie van die vier klasse in Engels onderrig en een klas in Afrikaans onderrig is. Die navorser onderrig Wiskunde aan al vier die graad 7-klasse. Maree en Pietersen (2020:214) stel dit dat dit gewoonlik nie moontlik is om die hele populasie vir die studie te gebruik nie. Tyd is beperk, daarom kan daar nie met al 100 graad 7-leerders onderhoude gevoer word nie. Alhoewel alle leerders onderrig en intervensie oor wiskundetaal en metakognitiewe strategieë ontvang het, is 'n doelgerigte steekproef gebruik. Dus is geen leerder benadeel nie. Deelnemers in 'n spesifieke situasie is vir die steekproef gekies (Maree & Pietersen, 2020:220). In die studie is die steekproef gekies ná die voltooiing van die gegewe woordelys om wiskundetaal te ondersoek. Die woordelys vorm deel van die skoolassesseringsplan en alle leerders het die woordelys voltooi, ongeag of hulle aan die studie deelgeneem het of nie. Die navorser het vyf deelnemers gekies wie se wiskundetaal goed ontwikkel was om oor metakognitiewe strategieë te kommunikeer, vyf deelnemers met gemiddelde taalvaardighede en vyf leerders wat tussen 30% en 40% vir die taaltoets behaal het. Dit wil sê dat daar 15 deelnemers was, maar deelnemer A5 het verhuis en die navorsing het aangegaan met 14 deelnemers.

1.5.3 Data-insameling (metodes, strategieë en instrumente)

Kwalitatiewe studies ondersoek menslike aksies in 'n natuurlike omgewing (Babbie & Mouton, 2001:278). Die navorser het belanggestel in leerders se geskrewe en verbale response om die ontwikkeling van hulle algebraïese denke te ondersoek. Die data-insamelingsproses het met 'n woordelys begin, wat leerders voltooi het. Wiskundeterme, veral algebraterme, is gelys en leerders het langs die woord geskryf wat hulle onder elke term verstaan het. Leerders se wiskundetaal voorkennis is deur middel van dié data-insamelingsmetode getoets.

Ná afloop van die inleidende algebra les, het die deelnemers 'n skriftelike taak met algebraprobleme voltooi om hulle redeneringsvorme te ondersoek. Die algebraprobleme is nie nagesien nie, maar is deur die navorser ontleed en notas ten opsigte van redeneringsvorme is gemaak.

Die derde data-insamelingsmetode was taakgebaseerde onderhoude met die 15 gekose deelnemers. Die betrokke deelnemers se metakognitiewe strategieë is deur middel van toepaslike vrae tydens die onderhoude ondersoek. Onderhoude is op band opgeneem en daarna verbatim getranskribeer en geanaliseer.

Tydens onderrigtyd het die navorser klem gelê op korrekte wiskundetaal en -verbande. Konsepdefinisies is waar moontlik met konsepbeelde aangevul. Lesse is deur visuele en ouditiewe stimuli rakende die betrokke terme ondersteun. Wiskundeterme is herhaal en definisies is in leerders se werkboeke geplak. Klasbesprekings oor die toepaslike onderwerp is gehou sodat leerders die geleentheid kon kry om wiskundetaal te oefen en by mekaar te leer.

Aan die begin van die jaar is metakognitiewe strategieë aan die leerders verduidelik deur gebruik te maak van die metkognitiewe strategiewiel wat die navorser ontwerp het (Sien figuur 3-5). Duidelike kommunikasie oor metakognitiewe strategieë (beplanning, monitering, evaluering en reflektering) het tussen die leerders en die navorser plaasgevind. Terme soos beplanning, monitering, evaluering, refleksie, hardop dink, byhou van 'n joernaal, doelstelling, identifiseer, uitdagings en modellering is as flitskaarte en plakkate in die klas gebruik sodat leerders dit daaglik kon sien.

Nadat algebra onderrig is soos in die kurrikulum voorgeskryf word, is daar weer 'n skriftelike algebrataak aan alle leerders gegee. Spot on Graad 7 Wiskunde, is die voorgeskrewe handboek wat in die klas gebruik is.

Die data-insamelingsmetodes word in tabel 1-1 opgesom.

Tabel 1-1: Meetinstrumente van data-insameling

Metode van data-insameling	Wat behels die metode?	Doel van die metode	Data-ontledingsmetode
Woordelys	Leerders skryf langs elke woord/konsep wat hulle van die woord verstaan. Al die leerders in die graad voltooi die woordelys.	Om voorkennis van wiskundetaal vir verdere navorsingsdoeleindes te evalueer.	Voltooide woordelyste is met behulp van 'n memorandum nagesien.
Waarnemings	Die navorser observeer leerders se gesprekke oor wiskundetake.	Vir diagnostiese assessering.	Waarnemingskedules is gebruik.
Algebrataak	Deelnemers voltooi 'n skriftelike algebrataak.	Om te bepaal hoe algebraïese denke ontwikkel.	'n Memorandum word vir data-ontleding gebruik.
Taakgebaseerde onderhoude	Onderhoude oor 'n spesifieke algebrataak word met die 15 deelnemers gevoer en opgeneem.	Om vlak van algebraïese denke en metakognitiewe strategieë te bepaal en ontleed.	Transkribering van onderhoude.
Joernaal	Die navorser hou 'n joernaal gedurende die ontleding van take asook gedurende onderhoude.	Aanvullende klankopnames voeg detail in wat nie op papier vasgevang is nie.	

1.5.4 Data-ontleding

Volgens Maree (2020:42) maak navorsers binne 'n sosiaal-konstruktivistiese paradigma van induktiewe data-ontleding gebruik.

Die woordelys wat ook vir skoolassessering gebruik word, word ontleed as korrek, gedeeltelik korrek of verkeerd. Die tweede data-insamelingsmetode was die skriftelike algebrataak. 'n Memorandum is gebruik om die taak na te sien. Die nagesiende take is deur middel van 'n rubriek ontleed om data ten opsigte van redeneringsvorme te genereer. Hierdie data-ontleding het ter voorbereiding van die taakgebaseerde onderhoude plaasgevind. Stemopnames van onderhoude met deelnemers oor algebratake is ten opsigte van metakognitiewe strategieë (beplanning,

monitering, evaluering, refleksie en regulering) ontleed. Dieselfde data is 'n tweede keer ontleed, maar dié keer ten opsigte van redeneringsvorme (abduktiewe, induktiewe en deduktiewe redeneringsvorme). Die navorser het van 'n *Excel*-spreiblad met temas (beplanning, monitering, evaluering, refleksie en kontrole) as opskrifte gebruik gemaak.

1.5.5 Konsekwentheid

Soos konsekwentheid en geldigheid sleutelmaatstawwe is vir kwantitatiewe data, so is konsekwentheid belangrik vir kwalitatiewe navorsing (Nieuwenhuis, 2020a:143). Nieuwenhuis (2020a:144) noem dat konsekwentheid uit vier kategorieë bestaan, naamlik **geloofwaardigheid**, **oordraagbaarheid**, **betroubaarheid** en **bevestigbaarheid**. **Geloofwaardigheid** verwys na die waarheid van data en hoe die navorser dit interpreteer. Babbie en Mouton (2001:277) stel dit dat geloofwaardigheid deur volgehoue waarnemings verkry word. Die navorser het deur toepaslike vrae tydens die onderhoude by die deelnemers seker gemaak dat data reg geïnterpreteer is. Regstellings is dan aan getranskribeerde data gemaak.

Oordraagbaarheid word deur twee strategieë verseker. Die eerste strategie is om ryk omvattende beskrywings oor die deelnemers, konteks en die navorsingsontwerp te verskaf. Met genoegsame detail en beskrywing bereik 'n navorser effektiewe oordraagbaarheid (Babbie & Mouton, 2001:277). Die tweede strategie om oordraagbaarheid te verseker, is doelgerigte steekproefneming (Nieuwenhuis, 2020a:145). Die navorser het 'n duidelike agtergrond oor die studie verskaf wat individue in ander kontekste in staat gestel het om met hierdie studie te assosieer.

Daar is 'n nou verband tussen **betroubaarheid** en geloofwaardigheid. Om konsekwentheid te verseker, moet die navorser konsekwent omgaan met data. Om 'n joernaal te hou, help die leser om sin te maak van die navorsingsproses (Nieuwenhuis, 2020a:145). In die studie het die navorser getranskribeerde data aan studieleiers (of promotors) gebied om te verseker dat wat die deelnemers bedoel het, korrek getranskribeer is. Laastens het die navorser data aan toepaslike literatuur gemeet om konsekwentheid te verseker.

Bevestigbaarheid is die navorser se vermoë om deelnemers se standpunt sonder persoonlike motiewe van die navorser weer te gee (Nieuwenhuis, 2020: 145). Die eerste dataklas wat bevestigbaarheid verseker, is *rou data*, wat notas, klankopnames en ander brondokumente insluit. Opgesomde veldnotas is 'n voorbeeld van *gereduseerde data*, wat die tweede dataklas is. Die derde dataklas is *sintetiese produkte*, wat bevindings en gevolgtrekkings insluit. Persoonlike notas word as materiaal wat verband hou met voorneme en ingesteldhede geklassifiseer. Data-

insamelingsinstrumente is ook 'n dataklas om bevestigbaarheid te verseker (Babbie & Mouton, 2001:278). Konsekwenheid gaan gepaard met etiese oorwegings.

1.5.6 Etiese oorwegings

Maree (2020:47) stel dit dat etiese oorwegings op beginsels gegrond is wat deelnemers se identiteit beskerm. Die navorser het op 'n vertroulike en verantwoordbare wyse met data gewerk. Volgens Maree (2020:48) is die verkryging van toestemming vir navorsing die eerste etiese beginsel om met die data-insamelingsproses te kan begin. Geen data mag ingesamel word voordat leerders wat as deelnemers gaan optree, ingelig word oor wat die studie behels en al die belanghebbendes toestemming gegee het nie.

Die nodige etiekaansoek is by die NWU-EMELTEN-REC-etiekkomitee ingedien voordat data ingesamel is. In die studie is daar eerstens toestemming verkry van die Noordwes Departement van Basiese Onderwys (Kenneth Kaunda Distrik). Daarna is die skoolhoof asook die beheerliggaam van die skool vir hulle ingeligte toestemming genader. Nadat die hoof en beheerliggaam toestemming gegee het, is die ouers/voogde van die deelnemers in verband met die toestemming vir die studie gekontak.

Die deelnemers moet in hulle eie taal skriftelike ingeligte instemming aan die navorser gee. Die navorser se kollega in die Grondslagfase, wat nie by die studie betrokke was nie, het die toestemmingsproses as onafhanklike persoon hanteer. Ouers of voogde van die deelnemers moes ook goed ingelig word sodat hulle weet wat die studie behels voordat hulle die toestemmingsbrief onderteken. Die doel van die navorsing sowel as die data-insamelingsmetodes is in diepte aan alle rolspelers, soos die onderwysdepartement en skoolbestuurspan, verduidelik. Ingeligte toestemming is die bousteen van navorsing (Xu *et al.*, 2020:1)

Die volgende etiese beginsel is om deelnemers se data vertroulik te hanteer (Maree, 2020: 48). Data is onder die deelnemers se kodes ontleed omdat die navorser die deelnemers ken en presies weet wie elke deelnemer is. Die onderhoude wat gevoer is, is vir data-ontledingsdoeleindes op band opgeneem. Die navorsing het nie inbreuk op deelnemers se akademiese program gemaak nie. Onderrig het steeds voortgaan soos wat dit in die kurrikulum voorgeskryf word.

1.6 Bydrae van studie

Die doel van die studie was om riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke van graad 7-leerders deur middel van taal en metakognitiewe strategieë te ontwerp. Algebra word die eerste

keer in graad 7 aan leerders bekend gestel en dien as grondslag vir die verdere ontwikkeling van algebraïese denke. Aangesien die resultate van die studie die navorser se onderrigpraktyk behoort te verbeter, kan al die graad 7-leerders en nie net die deelnemers nie by die riglyne as uitkoms van die studie baat vind. Die navorser is 'n departementshoof by die betrokke skool en kon riglyne aan kollegas gee oor metakognitiewe strategieë wat op ander vakke ook van toepassing is. Metakognitiewe strategieë bevorder selfgerigte leer, wat leerders vorm tot lewenslange leerders (Van Zyl & Mentz, 2019:73).

Die riglyne is op korrekte wiskundetaal en metakognitiewe strategieë gebaseer. Die riglyne is so ontwerp dat dit in ander skole met ander omstandighede ook gebruik kan word sodat leerders daarby kan baat.

1.7 Ten slotte

In hoofstuk 1 is die probleemstelling, teoretiese en konseptuele (algebraïese denke, metakognitiewe strategieë en wiskundetaal) raamwerk bespreek. Die navorsingsvrae word gestel en die navorsingsontwerp, insluitend etiese oorwegings, word uiteengesit. Die volgende hoofstuk is 'n uitgebreide literatuurstudie.

HOOFSTUK 2

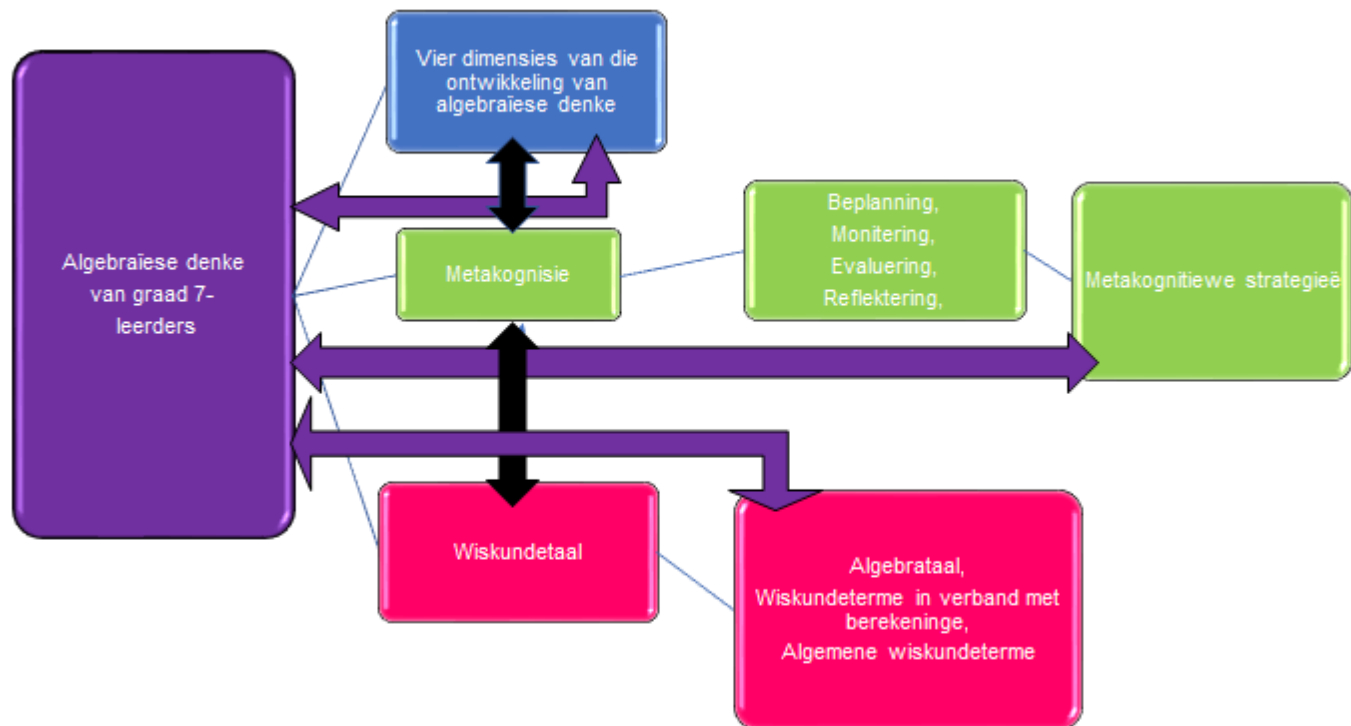
DIE ONTWIKKELING VAN ALGEBRAÏESE DENKE

2 Inleiding

Hierdie studie volg 'n ontwerpgebaseerde navorsing (OGN) om die navorsingsvrae te beantwoord. Die eerste fase van OGN is analiseer en eksploreer (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:7), wat 'n gedetailleerde literatuurstudie insluit. Bestaande navorsing van ander outeurs word ondersoek om die veld beter te verstaan (Maree, 2020:28). Die literatuurstudie wat hier volg, begin met literatuur wat oor die ontwikkeling van algebraïese denke handel.

2.1 Die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë

Die hoofdoel van die navorsing is om riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë te ontwerp. In hierdie hoofstuk word die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke ondersoek. Algebraïese denke kan beskryf word as 'n proses waar leerders vanuit wiskundige idees veralgemenings maak (Glassmeyer & Edwards, 2016:93). Die ontwikkeling van algebraïese denke word aan die hand van vier dimensies (algemene inhoudskennis, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme) bespreek. Metakognisie dra by tot leerders se kognitiewe ontwikkeling en bestaan uit beplanning, monitering, evaluering en reflektoring (Öztürk, 2021:2). Verder is dit nodig om leerders met metakognitiewe strategieë te bemagtig om hulle denke te ontwikkel (Schraw & Moshman, 1995:355). Die rol van wiskundetaal, wat 'n belangrike aspek in die ontwikkeling van algebraïese denke en wiskunde oor die algemeen is, word in die hoofstuk bespreek. Die ontwikkeling van algebraïese denke word in figuur 2-1 uitgebeeld.



Figuur 2-1: Ontwikkeling van algebraïese denke vir graad 7-leerders

2.1.1 Inleiding tot graad 7-algebra

Volgens die Suid-Afrikaanse Wiskundekurrikulum word die inleiding tot algebra in graad 7 onderrig (DvBO, 2011:53). In die inhoudsarea, patrone, funksies en algebra, in die grondslagfase kurrikulum, is algoritmes die hoofokus. In graad 4, word daar gefokus op getalsinne. Numeriese en getal patrone word in graad 5 ondersoek, in die inhoudsarea, patrone, funksies en algebra. In graad 6, word eienskappe van bewerking aan getal sinne gekoppel.

Die doel van die inleiding tot algebra in graad 7 is om die grondslag van algebraïese denke te lê, sodat leerders in staat is om meer gevorderde algebra in die hoërskool te kan doen (Otten *et al.*, 2019:616). Wilkie (2020:317) stel dit dat algebra as die beskrywing en ontleding van verwantskappe gedefinieer kan word. Algebra is verweef met die ontwikkeling en kommunikasie van alle areas van wiskunde (Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017:1186). Tydens die inleiding van algebra word daar van die wiskunde-onderwyser verwag om leerders van konkrete algoritmiese denke na meer komplekse en abstrakte algebraïese denke te lei (Chimoni *et al.*, 2018:1).

Algebraïese denke ontwikkel in drie fases: algoritmes, vroeë algebra en dan algebra (Kızıltoprak & Köse, 2017:131). Algebra is 'n meer abstrakte onderwerp as waaraan die leerders voorheen blootgestel is en daarom kan sommige leerders algebra moeilik vind (Litke, 2020:3). Alhoewel algoritmes deel van algebra is, vind leerders algebra meer abstrak as algoritmes, omdat algebra veranderlikes bevat (Demonty *et al.*, 2018:5). Algebra kan moontlik uitdagend vir leerders wees, omdat hulle blootgestel word aan meer abstrakte voorstellings en meer komplekse verhoudings tussen hoeveelhede, wat tot wanbegrippe kan lei (Khalid *et al.*, 2020:4168). Verder stel Pournara (2020:242) dit dat algebra 'n manier is om te verstaan hoe dele van 'n geheel saamgevoeg word om 'n geheel te vorm en hoe verwantskappe betekenis vorm. Hierdie begrip kan net deur middel van korrekte wiskundetaal ontwikkel (Wilkinson, 2019:88).

2.1.2 Algebra in die Suid-Afrikaanse Wiskundekurrikulum

Die algemene inhoudsfokus vir patrone, funksies en algebra word beskryf as: “Algebra is 'n taal waarin Wiskunde die meeste ondersoek en gekommunikeer word. Algebra kan as 'n veralgemeende rekenkunde beskou word en dit kan na die studie van funksie en ander verwantskappe tussen veranderlikes uitgebrei word. 'n Sentrale deel van hierdie uitkoms is daarop gerig om die leerder doeltreffende hanteringsvaardighede in die gebruik van algebra te laat verwerf” (DvBO, 2011:10). Die fokus van algebra in die kurrikulum is om patrone te beskryf deur van simboliese stellings, grafieke en tabelle gebruik te maak. Variasies en reëlmatigheid van patrone moet geïdentifiseer en geanaliseer word om die leerder in staat te stel om voorspellings te maak en probleme op te los (DvBO, 2011:10).

Meer spesifiek vir die Senior Fase (graad 7–9) fokus die inhoudsarea (patrone, funksies en algebra) op:

- Die ondersoek van numeriese en meetkundige patrone om die verwantskap tussen die veranderlikes te vestig.
- Uitdrukking van reëls wat patrone, in algebrataal of simbole, reguleer.
- Ontwikkeling van algebraïese manipulerende vaardighede wat die ekwivalensie tussen verskillende voorstellings van dieselfde verwantskap herken.
- Analise van situasies in verskeie kontekste om sin daaruit te maak.
- Voorstelling en beskrywing van situasies in algebrataal, formules, uitdrukkings, vergelykings en grafieke (DvBO, 2011:10).

Die KABV (Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsverklaring) verdeel die algebra-afdeling in **algebraïese uitdrukkings** en **algebraïese vergelykings**. In die afdeling vir **algebraïese uitdrukkings** is die fokus vir graad 7 op algebrataal. Daar word van graad 7-leerders verwag om

reëls of verwantskappe wat in simboliese vorm is, te herken en te interpreteer. Verder behoort graad 7-leerders veranderlikes en konstantes in gegewe formules te kan identifiseer en vergelyk.

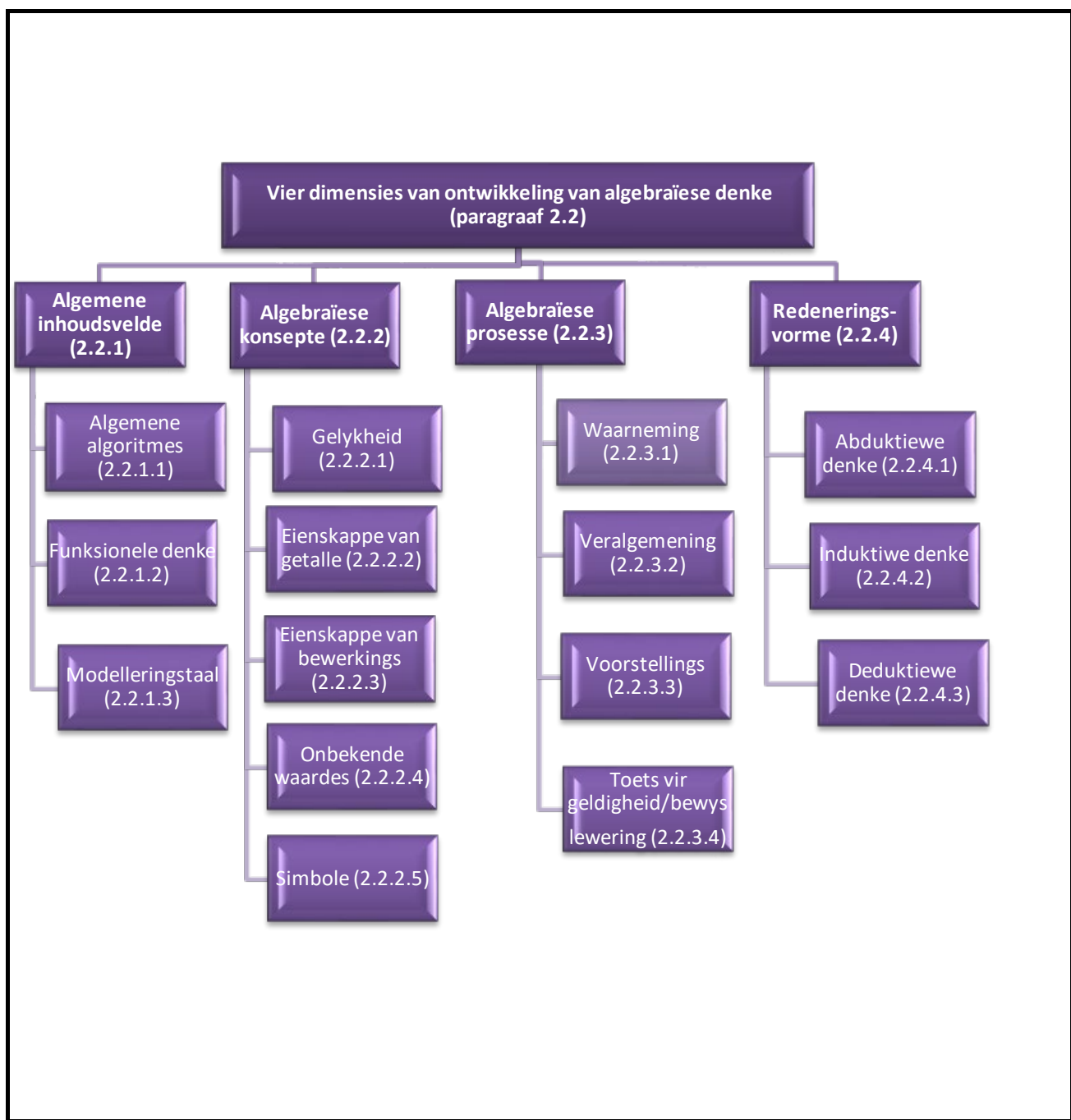
Onder die afdeling **algebraïese uitdrukkings** word die volgende van graad 7-leerders verwag:

- Die skryf van getalsinne om probleemsituasies te beskryf.
- Die analisering en interpretasie van getalsinne wat 'n gegewe situasie beskryf.
- Oplossing en voltooiing van getalsinne deur inspeksie, probeer en verbeter.
- Bepaling van die numeriese waarde van 'n uitdrukking deur middel van substitusie.
- Identifisering van veranderlikes en konstantes in gegewe formules of vergelykings (DvBO, 2011:23).

2.2 Die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke

Die ontwikkeling van algebraïese denke word beskryf as 'n proses om wiskundige uitdrukkings en uitdrukkings oor die algemeen te ontdek (Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017:1186). Dit is uitdagend om 'n eenvoudige definisie vir algebraïese denke uiteen te sit, omdat algebra met verskeie wiskundige kenmerke geassosieer word (Chimoni *et al.*, 2018:58). Algebraïese denke kan beskryf word as 'n "gewoonte" wat leerders moet aanleer. Hierdie "gewoonte" bestaan uit die uitvoer van wiskundige prosesse (par. 2.2.3), identifisering van funksionele reëls (par. 2.2.1) en om na te dink oor berekenings sonder om dit aan 'n spesifieke getal te koppel (Chimoni *et al.*, 2018:58).

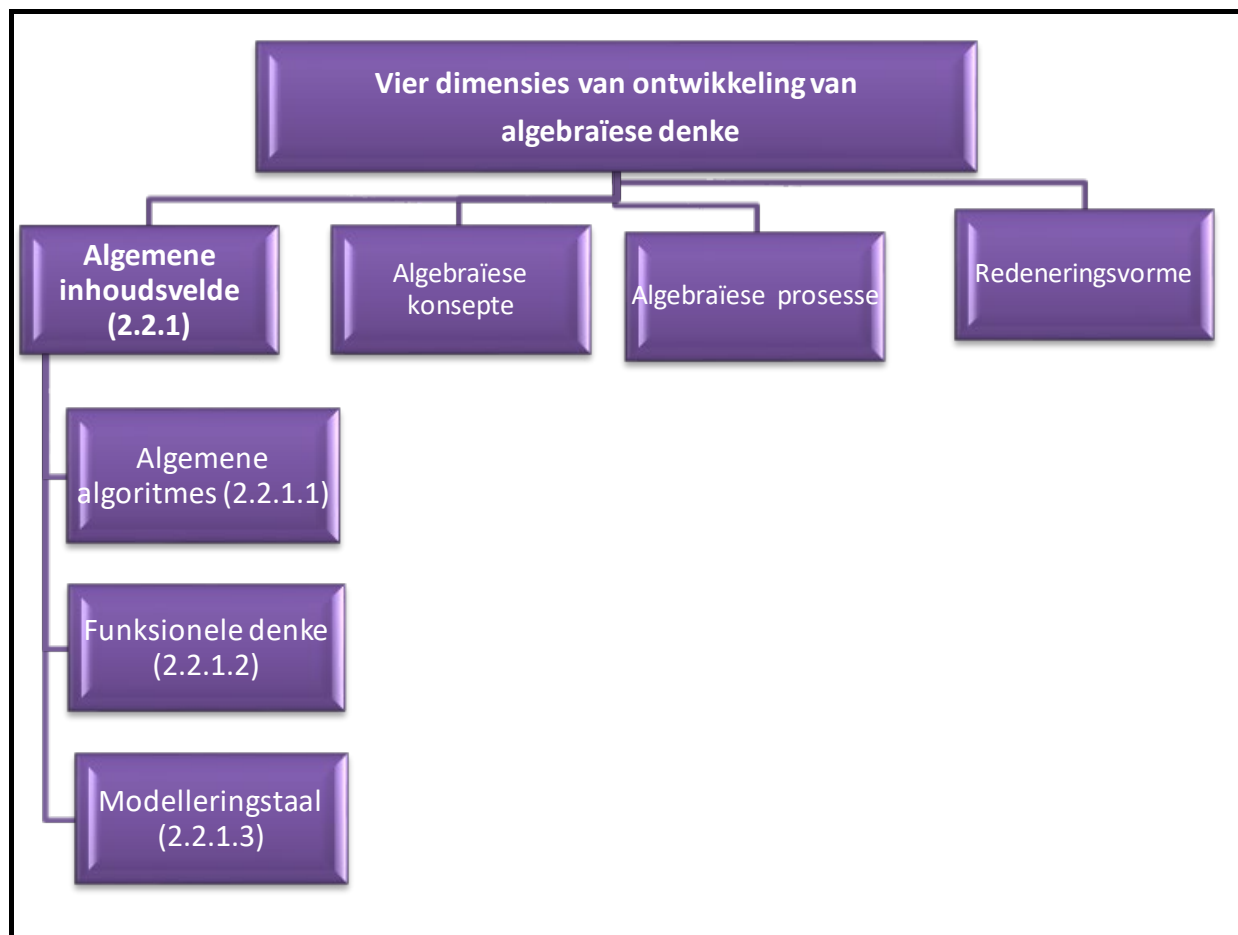
In hierdie studie word algebraïese denke van leerders ondersoek deur van vier dimensies gebruik te maak: algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme (Chimoni *et al.*, 2018:58) (sien figuur 2-2). Die vier dimensies wat deur Chimoni en kollegas ontwikkel is 'n geskikte model om graad 7 leerders se algebraïese denke te ondersoek. Die model skakel goed in met die kurrikulum wat gebruik word.



Figuur 2-2: Die vier dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke (aangepas uit Chimoni, *et al.*, 2018:61)

2.2.1 Algemene inhoudsvelde

Die eerste dimensie van algebraïese denke is algemene inhoudsvelde. Algebraïese denke bevat kerninhoude, naamlik algemene algoritmes, funksionele denke en modelleringstaal (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:966). Algemene inhoudsvelde se kerninhoude word in figuur 2-3 uitgebeeld.



Figuur 2-3: Eerste dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke

2.2.1.1 Algemene algoritmes

'n **Algemene algoritme** is 'n bousteen van algebraïese denke, maar die skoolkurrikulum behandel algoritmes en algebra as twee afsonderlike onderwerpe (Stephens *et al.*, 2017:143). Algemene algoritmes word van jongs af aangeleer en behels getalle, bewerkings, die gelykaanteken, getalsinne en vergelykings (Chimoni *et al.*, 2018:59). Die konsep van 'n onbekende is deel van algemene algoritmes. Navorsing toon dat baie leerders in staat is om die waarde van die onbekende in 'n algoritmiese probleem te vind sonder om 'n alfabetiese simbool in die plek van

die onbekende te plaas, byvoorbeeld: $14 - _ = 5$ (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:967). Goeie vaardighede in hoofrekene dra by tot die ontwikkeling van algemene algoritmes. Hoofrekene behels die oplos van probleme deur leerders, sonder pen en papier of 'n sakrekenaar. Hoofrekene help leerders om hoërordedenkvaardighede, redeneringsvermoë en kritiese denke te ontwikkel (Pourdavood *et al.*, 2020:243).

2.2.1.2 Funksionele denke

Funksionele denke word gedefinieer as die proses van beskrywing en redenering oor funksies (Stephens *et al.*, 2017:144). Funksionele denke is 'n hoër vlak van denke as algemene algoritmes en behels konsepte soos veranderlikes (Chimoni *et al.*, 2018:59). Die Wiskundekurrikulum bestaan uit vyf inhoudsareas: a) getalle, bewerkings en verwantskappe, b) patrone, funksies en algebra, c) ruimte en vorm (meetkunde), d) meting en e) datahantering. In die tweede inhoudsarea, patrone, funksies en algebra, word formele algebra nie in die Intermediêre Fase onderrig nie, maar vroeë algebra word in die vorm van onder andere rekursiewe patrone onderrig. Die feit dat daar verskillende maniere is om probleme op te los, behoort deel van funksionele denke te vorm sodat daar nie op bepaalde metodes gefokus word nie, maar op wiskundige prosedures. Daar word beweer dat funksionele denke die ingangspunt van algebra is, omdat dit algemene verwantskappe tussen hoeveelhede behels. Hierdie verwantskappe word weergegee in natuurlike taal, formele algebraïese notasie, tabelle en grafieke om funksionele gedrag te voorspel en te interpreteer (Stephens *et al.*, 2017:144). Funksionele denke word hoofsaaklik in drie hoofmodusse geklassifiseer: rekursief, kovariasie en ooreenstemming.

Rekursiewe patrone beskryf 'n variasie in 'n enkele reeks waardes, wat aandui hoe om deur middel van die vorige getalle wat gegee word 'n getal in 'n getallery te skryf. 'n Voorbeeld van 'n rekursiewe patroon is 5, 11, 17, 23, ... (Stephens *et al.*, 2017:147). Nog 'n voorbeeld is 'n algemene reël soos, $\{T_n = T_{n-1} + 6; T_1 = 5; n \in \mathbb{N}\}$.

Rekursiewe patrone is nie nuut in graad 7 nie, omrede dit deel vorm van die Grondslagfase en Intermediêre Fase Wiskundekurrikulum. Wanneer leerders in staat is om rekursiewe patrone uit te brei, ontwikkel hulle insig om die reël te bepaal (Biza *et al.*, 2019:1107), wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke, soos aangetoon in figuur 2-4.

1. Beskryf die patroon en maak 'n skets om die waarde van elke term te toon.

Voorbeeld: 15, 22, 16, 21, 17

+ 7 - 6 + 5 - 4

Eke getal van die getalpatroon word 'n term genoem.

a. -4, 1, 5, 8, 10	b. 8, 10, 13, 17, 22
c. 2, -2, -8, -16, -26	d. -11, -12, -10, -13, -9
e. -7, -1, 11, 29, 53	f. 5, -3, -10, -16, -21

Figuur 2-4: Voorbeeld van 'n graad 7-oefening met rekursiewe patrone (DvBO-leerderboek 2:110)

Kovariasieverwantskappe beskryf hoe twee hoeveelhede in 'n verhouding tot mekaar wissel (Stephens *et al.*, 2017:146). Indien die verandering in die afhanklike veranderlike met die onafhanklike veranderlike geassosieer word, is dit 'n kovariasieverwantskap (Biza *et al.*, 2019:1107). Die kovariasieverwantskap word nie in die Intermediêre Fase beklemtoon nie, maar ondersteun leerders se funksionele denke. Die skuif van kovariasie na 'n ooreenstemmingsbeskouing word ondersteun deur die leerder se vermoë om inligting oor getalpatrone te ondersoek. 'n Voorbeeld van 'n kovariasieverwantskap aktiwiteit is om die verwantskap tussen die oppervlakte van reghoeke te ondersoek, byvoorbeeld as die lengte en breedte van 'n reghoek verdubbel, hoeveel keer groter is die oppervlakte van die vergrote reghoek? (Stephens *et al.*, 2017:146).

Indien die onafhanklike veranderlike geassosieer word met die afhanklike veranderlike, is die verhouding 'n ooreenstemmende verwantskap (Biza *et al.*, 2019:1107). 'n *Ooreenstemmingsverwantskap* tussen die afhanklike en onafhanklike veranderlike beskryf die funksie van die reël. Die verband tussen die pare veranderlikes beskryf die reël om die waarde van die onbekende te bepaal (Wilkie, 2020:317). Tabelle, invoer-/uitvoerreeks en lineêre uitdrukkings in woorde of visuele patrone word gebruik om 'n ooreenstemmingsverwantskap aan leerders uit te beeld (Stephens *et al.*, 2017:145-146). 'n Voorbeeld waar algemene taal aan algebra gekoppel word, is woordsomme soos "die ouer suster is 9 jaar ouer as die jonger sussie ($y = x + 9$)". Funksionele denke ontwikkel slegs wanneer leerders gepaste algebratake voltooi en wanneer daar in korrekte wiskundetaal aanwysings gegee word. Tabelle, prente, simbole, geskrewe en verbale taal word gebruik om funksionele denke te ondersteun (Stephens *et al.*, 2017:146) en word modelleringstaal genoem. Verder is dit nie net nodig vir leerders om

berekeninge van links na regs te kan doen nie, maar moet leerders ook in staat wees om die inverse van regs na links te kan doen, sodat funksionele denke kan ontwikkel (Khalid *et al.*, 2020:4169). Sonder voldoende funksionele denke kan leerders se algebraïese denke nie ontwikkel nie (Moss *et al.*, 2019). Figuur 2-5 is 'n voorbeeld van oefeninge waarmee leerders ooreenstemmende verwantskappe inoefen.

1. Beskryf die patroon en teken 'n getallery om elkeen te wys.

Voorbeeld:

Posisie in die ry	1	2	3	4		10
Waarde van term	3	6	9	12		30
	1×3	2×3	3×3	4×3		10×3

a.

Posisie in die ry	1	2	3	4		10
Waarde van term	4	8	12	16		

b.

Posisie in die ry	1	2	3	4		10
Term	8	16	24	32		

Figuur 2-5: Ooreenstemmende verwantskappe (DvBO- leerderboek 2:8)

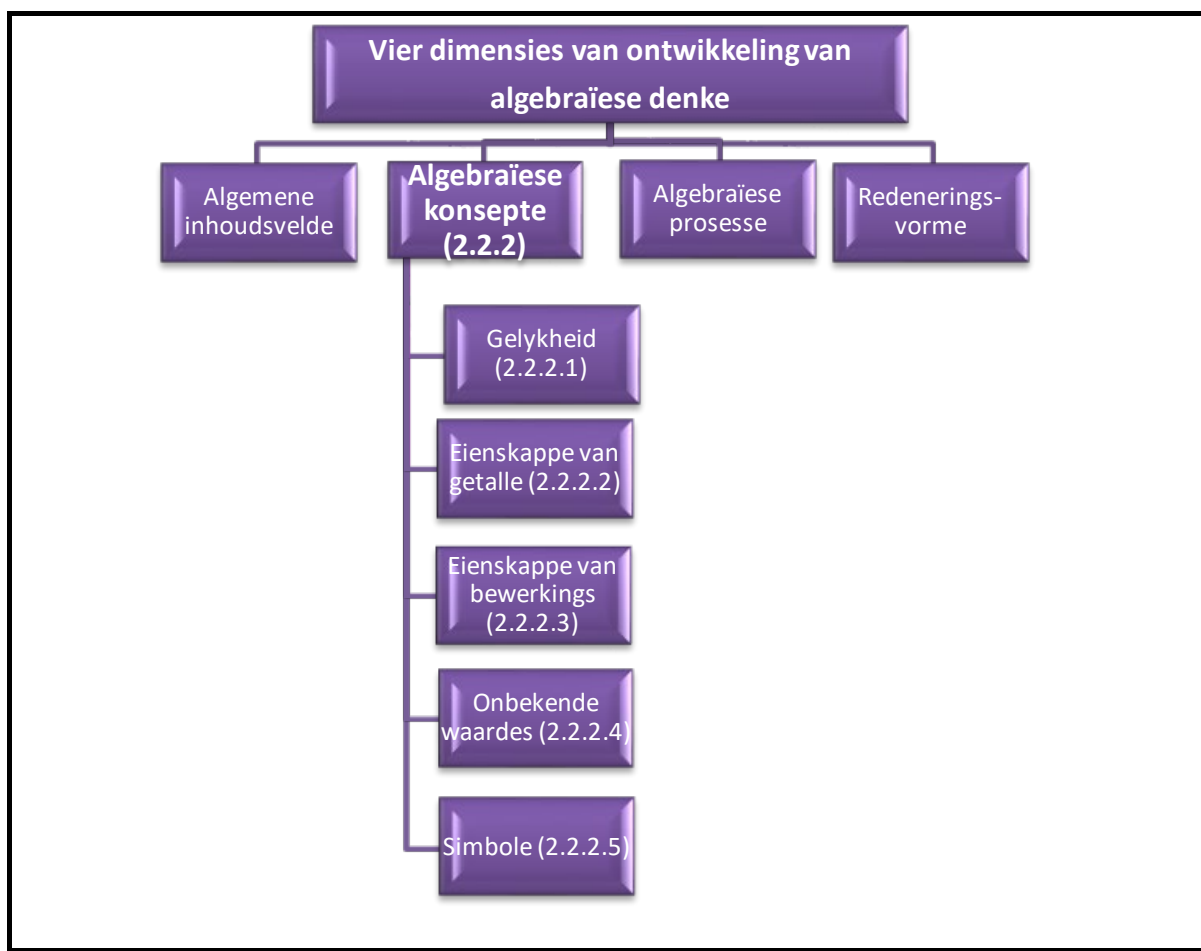
2.2.1.3 Modelleringsstaal

Modelleringsstaal word gebruik om algebraïese reëls te beskryf. Modelleringsstaal transformeer lewenswerklike probleme in wiskundeprobleme wat geanaliseer kan word (Czocher & Maldonado, 2015:332). Dit is eerstens nodig om die model (tabelle, prente, simbole, ens.) te interpreteer, daarna word die getalle in konteks geplaas, waarna verbande getrek word (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:968). Die vertaling van gesproke algebrataal na simboliese algebrataal help leerders om beter te verstaan (Florio, 2020:2). Czocher en Maldonado (2015:333) brei die modelleringsproses uit na ses fases: **verstaan**, **vereenvoudig of struktureer**, **skryf in wiskundetaal**, **werk wiskundig**, **interpreteer** en **verifieer**. Om te **verstaan**, moet die leerder die probleem lees en bepaal wat gevra word. Metakognitiewe strategieë soos hardop dink, vrae vra, samewerking en modellering moet gebruik kan word om te verstaan. Daarna (die tweede fase) **vereenvoudig of struktureer** die leerder die probleem deur kritiese komponente te identifiseer. Die derde fase van die modelleringsproses is om die probleem in **wiskundetaal te skryf** (Czocher & Maldonado, 2015:333). Met ander woorde, die woordprobleem word in 'n algebraïese uitdrukking geskryf. Daarna word daar **wiskundig gewerk** (vierde fase van die

modelleringsproses) om die algebraïese uitdrukking op te los en te interpreteer. Wanneer dit **geverifieer** is, word 'n antwoord gebied. 'n Voorbeeld van so 'n probleem is: “Sarie het die helfte soveel doele soos Katrein in 'n netbalwedstryd aangeteken. Indien Katrein 6 doele aangeteken het, hoeveel doele het hulle vir die wedstryd aangeteken?” Eers moet die leerders die probleem in 'n algebraïese vergelyking skryf en dit dan bereken. Wiskunde-onderwysers moet bewus wees van modelleringsstaal om die modelleringsproses te fasiliteer (Czocher & Maldonado, 2015:337). Semiotiek en wiskundetaal help leerders om algebra beter te verstaan en daarom dra dit tot die ontwikkeling van algebraïese denke by (Ansald-Leyva *et al.*, 2019:98).

2.2.2 Algebraïese konsepte wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke

Algebraïese konsepte is die tweede dimensie wat 'n rol in die ontwikkeling van leerders se algebraïese denke speel en sluit **gelykheid, eienskappe van getalle, eienskappe van bewerkings, onbekende waardes/veranderlikes** en **simbole** in (Chimoni *et al.*, 2018:59), soos uitgebeeld in figuur 2-6.



Figuur 2-6: Tweede dimensie van die ontwikkeling van algebraïese denke

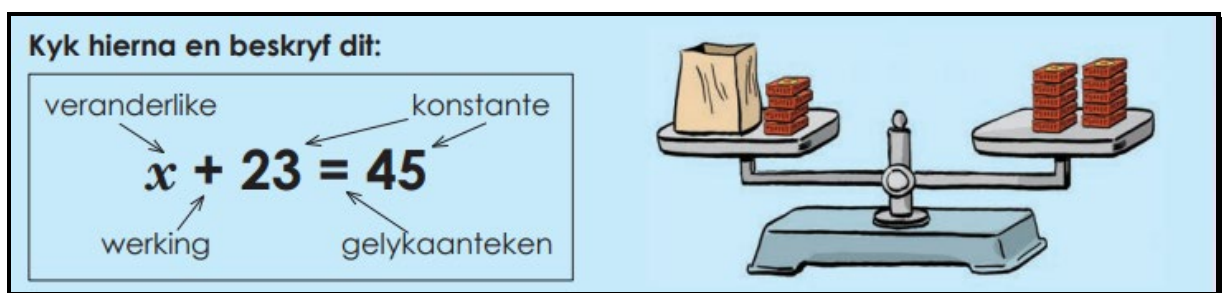
2.2.2.1 Gelykheid

Die “=”-teken het in 1557 ontstaan toe Robert Recorde ’n simbool gesoek het om nie dieselfde getalle oor en oor te skryf nie (Madej, 2022:323). Gelykheid is ’n fundamentele konsep van Wiskunde (Radford, 2022:1151). Onderwysers mag dalk dink dat die betekenis van die **gelykaanteken** eenvoudig is, maar verskeie wanopvattinge oor die gelykaanteken bestaan (Knuth *et al.*, 2016:67). Wanopvattinge van die gelykaanteken belemmer leerders se wiskundige denkontwikkeling (Fyfe *et al.*, 2020:65).. Hierdie wanopvattinge is idees soos dat die gelykaanteken ’n “doen iets-simbool”, “kry die antwoord-simbool” of “tel alles by mekaar-simbool” is. Leerders met hierdie wanopvattinge verstaan slegs vergelykings soos $a + b = c$ en sukkel met vergelyking soos $a = b + c$, omdat hulle dink die gelykaanteken is ’n aankondiging van ’n antwoord (Fyfe *et al.*, 2020:66)..

Verder kan leerders met 'n wanopvatting redeneer dat $2 + 3 = 5 + 4$ korrek is, want $2 + 3 = 5$ en dan neem hulle nie die res van die vergelyking in ag nie. Vergelykings soos $10 = 10$ beskou leerders met wanopvatting as onwaar, want daar is nie iets om te bereken nie. Hierdie leerders vind oop spasies in vergelykings, soos $4 + 5 = _ + 2$ moeilik en vergelykings soos $_ = 7 - 2$ as te uitdagend, omdat hulle die bewerking aan die linkerkant van die gelykaanteken verwag (Knuth *et al.*, 2016:67). Die wanopvatting aangaande die gelykaanteken vorm 'n kognitiewe gaping in leerders se ontwikkeling van algebraïese denke (Fyfe *et al.*, 2020:66). Trouens, daar is gevind dat leerders met 'n goeie begrip van die gelykaanteken baie beter vaar met algebraïese denke (Fyfe *et al.*, 2020:67).

Wanopvattinge kan deur middel van korrekte wiskundetaal herstel word deur aan leerders te verduidelik dat die waarde aan die linkerkant van die gelykaanteken dieselfde moet wees as die waarde aan die regterkant van die gelykaanteken om die vergelyking waar te maak (Florio, 2020:2). Wanneer leerders in staat is om 'n konsepbeeld aan 'n konsepdefinisie te kan heg, ontwikkel hulle insig. 'n Konsepbeeld kan 'n simbool, 'n prent, 'n bewerking of enige abstrakte beeld wees wat 'n persoon in sy gedagtes vorm. Leerders vergeet soms 'n konsepdefinisie, maar dan onthou hulle nog die konsepbeeld (Tall & Vinner, 1981:152). Die gelykaanteken kan met 'n weegskaal vergelyk word om die konsep van gelykheid aan leerders te verduidelik (Powell *et al.*, 2020:153).

In figuur 2-7 word 'n algebraïese vergelyking met 'n weegskaal vergelyk en die veranderlike word as 'n onbekende waarde voorgestel.



Figuur 2-7: Konsepbeeld van algebrataal (DvBO- leerderboek 2:28)

2.2.2.2 Eienskappe van getalle

Eienskappe van getalle, veral 0 en 1, is belangrik vir die ontwikkeling van algebraïese denke. Nul is 'n komplekse dog interessante konsep wat nodig is om wiskunde te verstaan. Die Suid-Afrikaanse Wiskundekurrikulum maak voorsiening vir die onderrig van 0 as identiteitselement van

optelling en 1 as identiteitselement van vermenigvuldiging in die eerste kwartaal van graad 7 (DvBO, 2011:40). Die konsep van deling deur 0 veroorsaak struikelblokke in die ontwikkeling van wiskundige notasie (Karakus, 2018:90). Vele goed opgeleide onderwysers leer steeds vir leerders dat 0 gedeel deur 'n getal ongedefinieer is, terwyl die korrekte antwoord 0 is (Karakus, 2018:93). Byvoorbeeld $0 \div 3 = 0$, maar $3 \div 0$ is ongedefinieerd. Leerders sal dan in staat wees om $2a + a = 3a$ te verstaan. Onderwysers moet aan leerders verduidelik dat as daar slegs 'n veranderlike is, dan is dit 1 vermenigvuldig met die spesifieke veranderlike, byvoorbeeld $y = 1y$. Om te verstaan dat enige getal of veranderlike vermenigvuldig met 1 dieselfde bly, sal bydra tot die konsep van 'n veranderlike wat alleen staan byvoorbeeld $1 \times a = a$ (DvBO, 2011:63). Verder is onderwysers nie in staat om aan leerders te verduidelik waarom $a^0 = 1$ is nie (Karakus, 2018:93). Eienskappe van getalle moet deur middel van korrekte wiskundetaal aan leerders gekommunikeer word sodat leerders 'n konsepbeeld aan 'n konsepdefinisie kan koppel om sin te maak van die eienskappe van getalle (Sebsibe & Feza, 2019:4).

Konsepbeelde is 'n kognitiewe struktuur of denkbeeldige prente wat aan 'n konsep gekoppel word. Konsepdefinisies is woorde of 'n beskrywing wat gebruik word om 'n konsep te verduidelik (Tall & Vinner, 1981:152). Hierdie konsepbeelde is nie altyd 'n korrekte beeld van die toepaslike konsep nie en nie alle konsepbeelde word aan 'n geformuleerde konsepdefinisie gekoppel nie (Tall & Vinner, 1981:152). Konsepbeelde en konsepdefinisies wat nie korrek is nie (wankonsepte), belemmer die ontwikkeling van algebraïese denke (Sebsibe & Feza, 2019:1).

2.2.2.3 Eienskappe van bewerking

Een van die eerste stappe om algebraïese denke te ontwikkel, is om die fundamentele **eienskappe van bewerkings** te ken (Kızıltoprak & Köse, 2017:131). Leerders moet bekend wees met die kommutatiewe ($a \times b = b \times a$), assosiatiewe ($(a + b) + c = a + (b + c)$) en distributiewe $a(b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ eienskappe van bewerkings om algebra beter te verstaan. Onderwysers neem die eienskappe van bewerkings – veral die kommutatiewe eienskap – as vanselfsprekend aan (Knuth *et al.*, 2016:66). Hunter (2015:60) meen dat daar nie genoeg klem op die kommutatiewe eienskap gelê word nie.

Die Suid-Afrikaanse kurrikulum vir graad 7-Wiskunde maak aan die begin van die jaar tydens die onderrig van telgetalle melding van eienskappe van bewerkings, maar algebra word eers in die derde kwartaal onderrig (DvBO, 2011:38). Die distributiewe eienskap is die moeilikste eienskap van bewerking, maar is van kritieke belang om vermenigvuldiging te verstaan (Kızıltoprak & Köse, 2017:132). In meetkunde is die formule vir die omtrek van 'n reghoek $2(l + b)$, wat ook in die distributiewe vorm bereken kan word: $(2 \times l) + (2 \times b)$. Eienskappe van bewerking moet nie net tydens algebralesse aan leerders onderrig word nie, maar oor tydens meetkunde lesse,

byvoorbeeld met die area-model (Smith *et al.*, 2020:3). Leerders gebruik l vir lengte en b vir breedte as veranderlikes om die oppervlakte van reghoeke te bereken. Die volgorde van bewerkings word deur die jaar onderrig en verskyn in verskeie assesseringsinstrumente.

2.2.2.4 Onbekende waarde/veranderlikes

In Ayieko (2018) se studie oor die verband tussen algebra leergeleenthede en algebraprestasie het sy vasgestel dat lande wat beter in die algebra-afdeling van die TIMSS-toetsing vaar, fokus op die **onderrig van veranderlikes** (Ayieko, 2018:32). Singapoer vaar gewoonlik die beste in die TIMSS-toetsing omdat hulle reeds vanaf graad 1 leergeleenthede vir leerders skep om onbekende waardes in veranderlike notasie voor te stel (Ayieko, 2018:33). Veranderlikes is vir leerders aanvanklik 'n uitdagende konsep en sommige leerders ignoreer die veranderlike geheel en al en bereken slegs die konstante waardes (Moss *et al.*, 2019:3).

Algebraïese strategieë wat wiskunde-onderwysers moontlik vir graad 7-leerders kan onderrig, is vereenvoudiging/isolasie- of vervangings/substitusiemetodes (Otten *et al.*, 2019:617). Die eerste stap van die isolasiemetode is herstrukturering. Herstrukturering word deur leerders gebruik wanneer die leerder die struktuur van die algebraïese uitdrukking herstruktoreer, byvoorbeeld wanneer $a + a$ geskryf word as $2a$. 'n Lineêre vergelyking kan deur middel van vereenvoudiging of isolasie opgelos word wanneer dieselfde element weerskante van die gelykaanteken afgetrek word totdat die veranderlike alleen staan. In hierdie studie word die term isolasiemetode gebruik. Die hoofdoel van 'n algebraïese vergelyking is om die onbekende waarde te vind (Otten *et al.*, 2019:617). Byvoorbeeld as $x + 4 = 10$, dan is $x + 4 - 4 = 10 - 4$, met die gevolg dat $x = 6$. Die isolasiemetode kan met behulp van die weegskaalles verduidelik word. Die substitusiemetode word aan leerders onderrig om die oplossing van die vergelyking te toets en seker te maak dat die regte waarde vir die veranderlike bepaal is.

2.2.2.5 Simbole

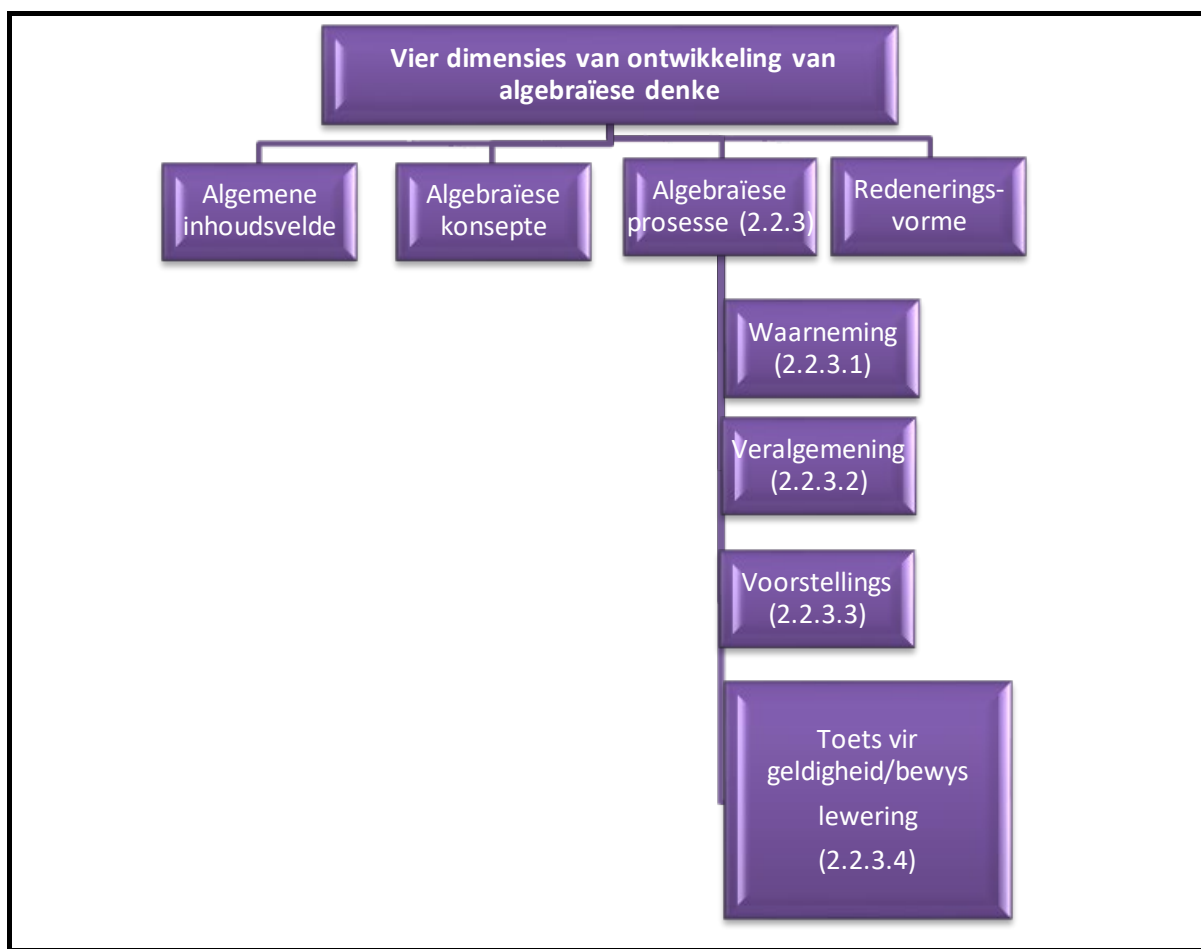
Wiskunde sonder simbole is ondenkbaar. Skoolalgebra verwys na die gebruik van **simbole** om veralgemening in 'n getalkonteks te staaf en te manipuleer (Kızıltoprak & Köse, 2017:131). Die belangrikste kenmerk in algebraïese denke is die oorskakeling van spesifieke prosedurele kennis na algemene konseptuele kennis (Ferretti, 2020:2). Korrekte wiskundetaal is nodig om leerders te begelei om van verbale algebrataal na simboliese algebrataal te vorder (Florio, 2020:1). Leerders wat algebraïese reëls uit die kop leer, ken nie noodwendig die wiskundige betekenis agter die reël nie. Leerders het die semiotiese taal nodig om algebraïese uitdrukkings te manipuleer (Ferretti, 2020:2).

Semiotiek is die wetenskap van tekens en simbole. Die semiotiek van algebrataal moet aan leerders onderrig word sodat leerders kan sin maak van algebra (Ferretti *et al.*, 2022:2). Tekens soos die gelykaanteken en simbole soos vierkantswortels en derdemagswortels se semiotiek moet deur middel van korrekte wiskundetaal aan leerders onderrig word sodat algebraïese denke kan ontwikkel. Leerders moet weet dat 'n alfabetletter gebruik word as veranderlike ('n simbool) vir 'n onbekende waarde. Daarna gebruik leerders semiotiek om onbekende waardes deur middel van die isolasiemethode op te los. Leerders sal dan in staat wees om die algebraïese vergelyking te kan manipuleer/herstruktureer (Otten *et al.*, 2019:617).

Die navorser het opgelet dat leerders sukkel om algebra-woordsomme in algebraïese uitdrukkings te skryf, al word daar van alledaagse konteks gebruik gemaak. Die **minussimbool** kan as 'n werkwoord/bewerking (aftrek) gebruik word of as 'n byvoeglike naamwoord (negatief) gebruik word. Om die regte term (minus of negatief) te gebruik, is deel van korrekte wiskundetaal. Wanneer leerders met 'n algebraïese uitdrukking soos $2 + 3x = 5 - 2x$ te doen kry, dan is die $-2x$ 'n bewerking en nie 'n aanduiding van 'n negatiewe getal nie. Die minussimbool veroorsaak soms verwarring by leerders indien onderwysers dit nie duidelik aan leerders verduidelik nie (Pournara, 2020:42). Hierdie konsepte moet in die korrekte wiskundetaal aan leerders gekommunikeer word (Wilkinson, 2019:87). Leerders wat algebraïese konsepte verstaan, sal beter toegerus wees om algebraïese prosesse uit te voer.

2.2.3 Algebraïese prosesse wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke

Die derde dimensie van algebraïese denke is die uitvoer van spesifieke prosesse. Beide prosesse en wiskundige redenering (die vierde dimensie) is teenwoordig wanneer die leerder 'n wiskundige taak uitvoer (Jeanotte & Kieran, 2017:7). Hierdie dialektiese verband vorm ook deel van korrekte wiskundetaal en daarom moet die onderwyser die prosesse in korrekte wiskundetaal aan leerders verwoord. Figuur 2-8 beeld die algebraïese prosesse uit wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is.



Figuur 2-8: Derde dimensie van die ontwikkeling van algebraïese denke

Waarneming, veralgemening, voorstellings en toets vir geldigheid (bewys dat die stelling waar is of nie) is vier van die prosesse wat vir die uitvoer van wiskunde take nodig is. Chimoni *et al.* (2018:58) beskryf wiskundige prosesse asook die inverse prosesse, identifisering van funksies en reëls en onafhanklike denke oor spesifieke getalle as algebraïese gewoontes. Algebraïese gewoontes bemagtig leerders om wiskundige strukture te identifiseer en uit te druk.

2.2.3.1 Waarneming

Die inhoudsarea patrone, funksies en algebra in die Suid-Afrikaanse kurrikulum gee aan leerders vanaf graad 1 die geleentheid om patrone **waar te neem** (DvBO, 2011:11). Algebraïese denke word gesteun deur die waarneming van patrone vanaf 'n baie jong ouderdom (Stephens *et al.*, 2017:147). Om 'n patroon waar te neem en te identifiseer, is vir die meeste leerders maklik, maar om 'n reël vir die patroon en 'n algebraïese uitdrukking vir 'n patroon te formuleer, is vir leerders

meer uitdagend (Kenan, 2017:42). In die onderstaande voorbeeld (figuur 2-9) is leerders in staat om die patroon te identifiseer, maar om die 10de en n de term te vind, is vir hulle 'n uitdaging.

x	1	2	3	4	5	10	n
y	-4	-3	-2	-1			

Figuur 2-9 Voorbeeld van 'n getalpatroon waarvan leerders maklik die patroon identifiseer

2.2.3.2 Veralgemening

Algebraïese veralgemening begin by die waarneming van patrone met bekende waardes, wat abduktiewe redeneringsvorme genoem word (Demonty *et al.*, 2018:4). Redeneringsvorme word later in hierdie hoofstuk onder paragraaf 2.2.4 bespreek. Algebraïese denke behels die **veralgemening** van algoritmes om algebraprobleme te formuleer en op te los (Apsari & Putri, 2020:45). In graad 7 word visuele voorstellings van patrone gebruik om leerders te ondersteun met die veralgemening-van-reël-proses, soos uitgebeeld in figuur 2-3. Daar word in graad 7 meestal op lineêre verwantskappe gefokus (Biza *et al.*, 2019:1105). Sommige leerders is in staat om verbande tussen patrone verbaal te veralgemeen, maar die korrekte wiskundetaal ontbreek om die reël algebraïes te formuleer (Girit & Akyüz, 2016:260).

2.2.3.3 Voorstellings

Volgens die Suid-Afrikaanse kurrikulum is wiskunde 'n menslike aktiwiteit wat waarneming, voorstelling en ondersoek van patrone en kwantitatiewe verwantskappe in fisiese en sosiale verskynsels behels (DvBO, 2011:8). Om patrone te ondersoek en te veralgemeen om dit in 'n algebraïese uitdrukking te skryf, bied vir leerders 'n "dinamiese **voorstelling** van veranderlikes" (Apsari & Putri, 2020:46). Voorstellings sluit onder andere grafieke, tabelle, invoer-uitvoerdiagramme, lewenswerklike situasies, algoritmiese patrone en meetkundige patrone in (Moss *et al.*, 2019:3). Ten spyte van die belangrikheid van algebra in skoolwiskunde, bly dit vir leerders 'n uitdaging omdat hulle tydens die inleiding van algebra aan abstrakte voorstellings en meer komplekse verwantskappe tussen getalle blootgestel word (Khalid *et al.*, 2020:4168).

Algebraïese denke ontwikkel slegs wanneer korrekte en gepaste voorstellings aan leerders gebied word (Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017: 1187). Die meeste leerders sukkel aanvanklik met voorstellings van onbekende waardes en daarom is dit vir hierdie leerders nie moontlik om probleme in algebrataal op te los nie (Khalid *et al.*, 2020:4168). Die wiskunde-onderwyser moet

tydens die inleiding tot algebra die korrekte wiskundetaal aan voorstellings koppel. Verder word sukses behaal wanneer leerders verskeie voorstellings kan gebruik en manipuleer (Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017:1192). In figuur 2-10 word die verskil tussen algebraïese uitdrukkings en algebraïese vergelykings uitgewys.

5. Sê of dit 'n uitdrukking of 'n vergelyking is.

Voorbeeld: $-8 + a$ (Dit is 'n uitdrukking.)
 $-8 + a = -11$ (Dit is 'n vergelyking.)

a. $-9 + a = -2$	b. $-3 + a = -1$	c. $-5 + a = -3$
d. $-18 + a$	e. $-12 + a = -3$	f. $-7 + a$

Figuur 2-10: Korrekte wiskundetaal (DvBO- leerderboek 2:125).

2.2.3.4 Toets vir geldigheid

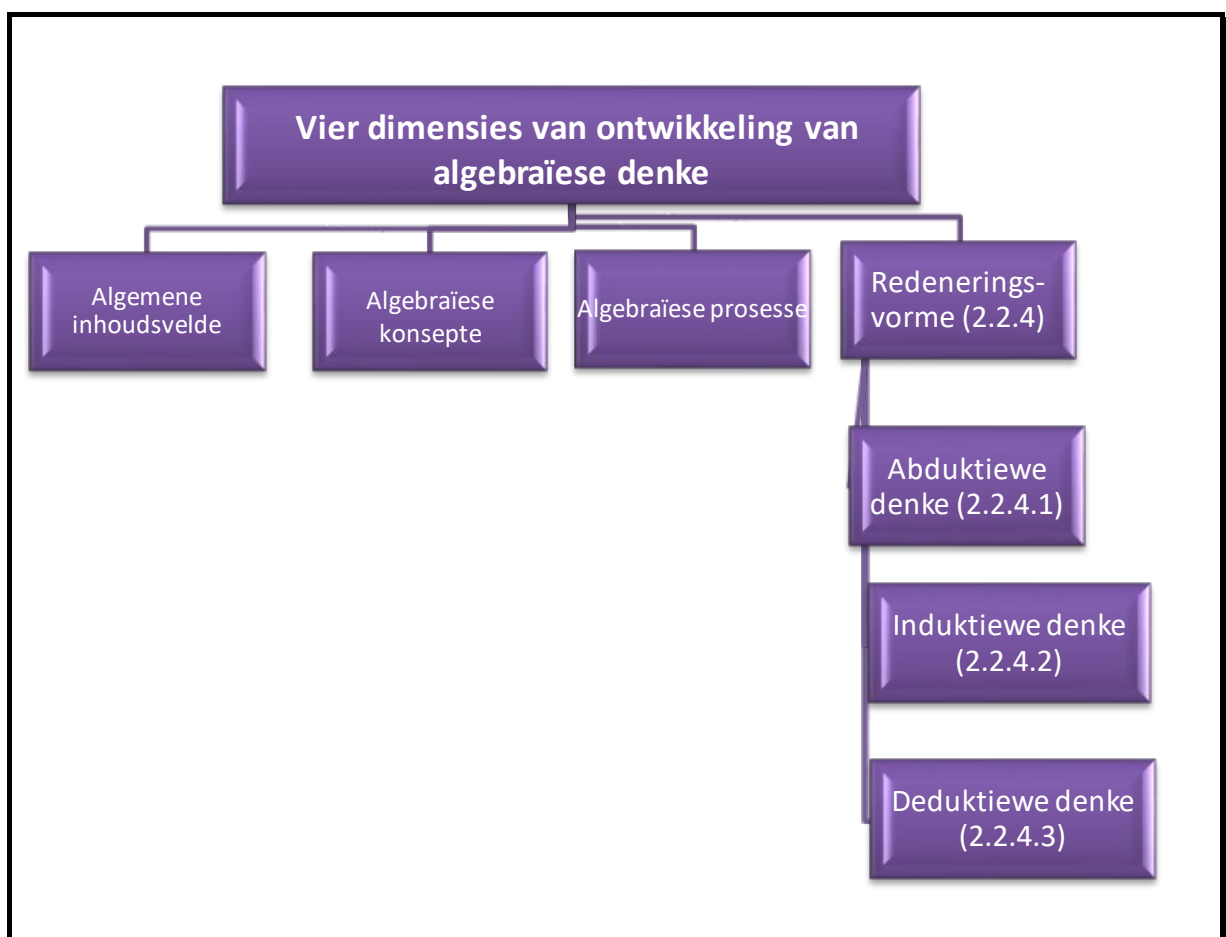
Verifikasie is as 'n fundamentele proses in die ontwikkeling van algebraïese denke geïdentifiseer (Dogan & Williams-Pierce, 2020:134). Om te bewys dat 'n bewering waar of onwaar is, is 'n belangrike proses vir die ontwikkeling van algebraïese denke (Dogan & Williams-Pierce, 2020:133), want verifikasie ontwikkel verifiëring-, verduideliking-, ondekking-, kommunikasie- en teorie-vormings vaardighede (Güler & Dikici, 2014:476). Kritiese denke word ontwikkel indien 'n leerder toets vir geldigheid (Chasanah, 2019:113). Leerders kan slegs bewyse lewer as hulle in staat is om patrone waar te neem, te veralgemeen en voorstellings te maak en kommunikeer (verduidelik) (Güler & Dikici, 2014:476).

Die gebrek aan korrekte en toepaslike algebra-onderrig veroorsaak dat leerders nie die vermoë het om stellings te toets vir geldigheid nie en hierdie proses is vir sekondêre en tersiêre onderrig en studierigtings soos ingenieurswese nodig (Apsari & Putri, 2020:46). Leerderaktiwiteit wat leerders laat toets vir geldigheid vind in drie fases plaas: verkenning, regverdiging en evaluering (Dogan & Williams-Pierce, 2019:49). Tydens die verkenningsfase observeer die leerders en stel vas of die bewering waar of onwaar is. Die onderwyser lei leerders na die regverdigingsfase met vra soos: hoe of hoekom sê jy so? Kommunikasie vind plaas en regverdigings word gemaak. Die evalueringsfase is van kardinale belang om stellings te toets vir geldigheid, want argumente word gevorm en gevolgtrekkings word gemaak (Dogan & Williams-Pierce, 2019:50). Om te kan bewys

dat 'n stelling waar of onwaar is, is 'n deduktiewe redeneringsvorm (Park & Kim, 2017:3776) (sien par. 2.2.4.3).

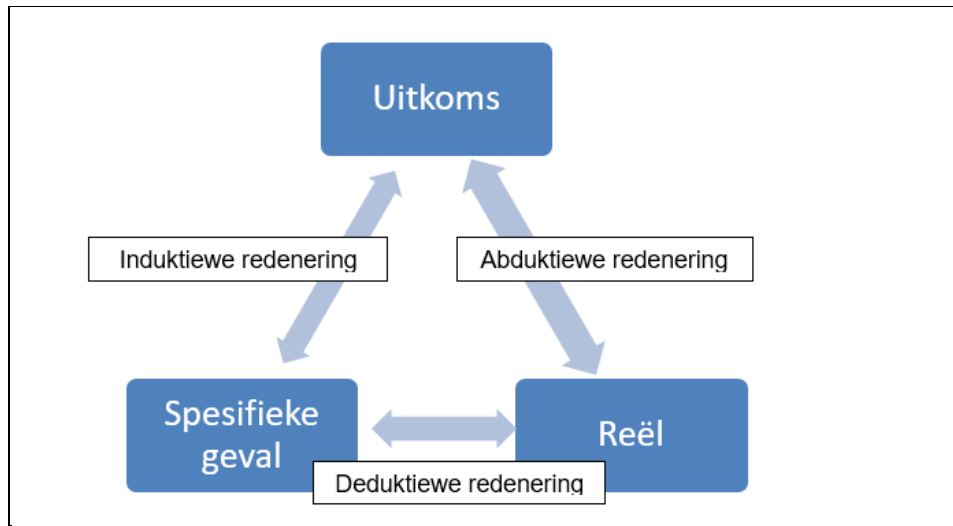
2.2.4 Redeneringsvorme

Die laaste dimensie vir die ontwikkeling van algebraïese denke is redeneringsvorme, wat uit drie afdelings bestaan, naamlik abduktiewe, induktiewe en deduktiewe redeneringsvorme, soos uitgebeeld in figuur 2-11. Redenering speel 'n kritieke rol in wiskunde en help leerders om verbande tussen konsepte te trek en te verstaan (Kaplan *et al.*, 2021:815). Redeneringsvorme is nodig vir die ontwikkeling van algebraïese denke (Mulligan *et al.*, 2020:663)



Figuur 2-11: Vierde dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke

Dit is belangrik vir leerders om algebraïese denke te ontwikkel om in staat te wees om verskeie redeneringsvorme in wiskunde te gebruik (Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017:1186) (sien figuur 2-12).



Figuur 2-12 Redeneringvorme wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is

2.2.4.1 Abduktiewe redenering

Abduktiewe redenering verskil van induktiewe en deduktiewe redenering omdat hierdie vorm van redenering tot 'n gevolgtrekking kom voordat data geïdentifiseer is. Voorkennis en ervaring het 'n groot invloed op abduktiewe redenering (Kaplan *et al.*, 2021:817). Abduktiewe redenering vind plaas wanneer 'n leerder moontlike resultate van 'n probleem vooruitskat en in staat is om 'n hipotese te toets (Reid, 2018:3). Met ander woorde, abduktiewe redenering beskryf die proses van hoe 'n leerder vanuit waarnemings van 'n gegewe reël 'n verduideliking vorm (Klichowicz *et al.*, 2021:3119). Byvoorbeeld: Die getalpatroon (die uitkoms) is: 0, 4, 8, 12, 16, 20, ... en dan is die reël vermeerder die getal met 4 om die opeenvolgende getal te vind. Om die reël vir die n de term te kry, is ook 'n vorm van abduktiewe denke, soos in figuur 2-13.

3. Wat beteken die reël?

Voorbeeld: die reël $-2n - 1$ beteken vir die volgende getalry:

Posisie in ry	1	2	3	4	5	n
Term	-3	-5	-7	-9	-11	$-2n - 1$

(-3 is die eerste term, -5 is die tweede term, -7 is die derde term, ensovoorts)

a.

Posisie in ry	1	2	3	4	5	n
Term	10	13	16	19	22	

b.

Posisie in ry	1	2	3	4	5	n
Term	2	10	18	26	34	

Figuur 2-13: Bepaal die n de term (DvBO-leerderboek 2:127)

Abduktiewe denke is 'n komplekse proses, want waarnemings lei tot 'n kombinasie van verskillende verduidelikings, maar vanuit 'n enkele verduideliking kan vele waarnemings gemaak word (Klichowicz *et al.*, 2021:3199). Hierdie redeneringsvorm begin by die uitkoms van 'n wiskundige stelling om 'n reël te ontwikkel. Wanneer 'n leerder 'n verduideliking uit sy/haar bestaande inligting bied en die gevolgtrekking is onvolledig, dan het abduktiewe redenering plaasgevind (Gilliam, 2019:52). Abduktiewe redenering vereis dat 'n fenomeen van belang geïdentifiseer word (Kontorovich, 2019:1051). Deur abduktiewe redenering bied leerders 'n verklarende hipotese gebaseer op inligting wat in die spesifieke geval beskikbaar is (Park & Kim, 2017:3774). Reid (2018:4) stel dit dat abduktiewe redenering twee funksies het – eerstens om feite te verduidelik en tweedens om ondersoek in te stel om nuwe idees te ontdek. Die werkende geheue speel 'n belangrike rol in abduktiewe redenering, want nuwe kennis word in die geheue gestoor om 'n betrokke situasie te verstaan (Klichowicz *et al.*, 2021:3120).

Oorkodering, onderkodering en kreatiewe abduksie is drie vorme van abduktiewe redenering. Indien 'n leerder slegs van een reël bewus is, oorkodeer die leerder. Indien die onderwerp van die aktiwiteit byvoorbeeld getalpatrone is en die instruksies is “vind die 10de term” en die leerder weet net hoe om die patroon te verleng, gaan die leerder aantal en nie die 10de term bereken nie. Onderkodering vind plaas wanneer 'n leerder verskeie algemene reëls ken, byvoorbeeld die isolasiemetode en die substitusiemetode.

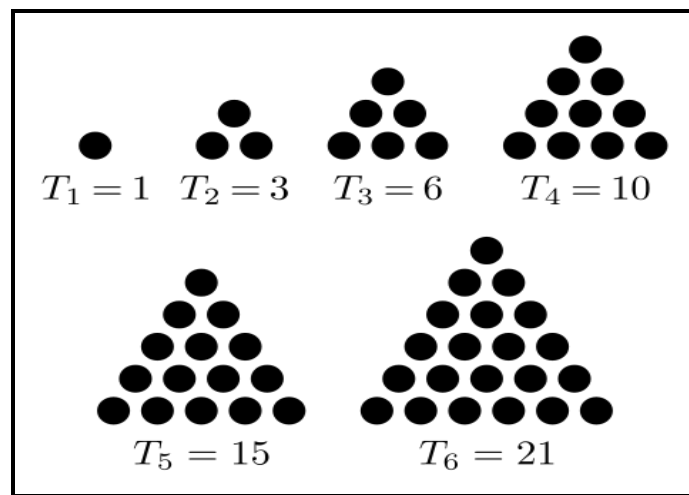
Oorkodering en onderkodering word saam selektiewe abduksie genoem. Wanneer nuwe reëls ontdek word, is dit kreatiewe abduksie (Reid, 2018:5). Wanneer 'n aktiwiteit herhaal word en leerders kry genoeg geleentheid vir inoefening, word nuwe reëls ontdek. Die abduktiewe redeneringsvorm kan van vroeg af aan leerders bekend gestel word wanneer die onderwyser vir leerders aanwysings gee oor hoe om hulle antwoorde met die inverse bewerking te toets. Deur middel van kommunikasie word redeneringsvorme bevorder en so kan algebraïese denke makliker ontwikkel. Abduktiewe redenering is die voorbereiding vir induktiewe en deduktiewe redenering en die eerste stap van wetenskaplike redenering (Park & Kim, 2017:3774).

2.2.4.2 Induktiewe redenering

Die Suid-Afrikaanse kurrikulum vir Wiskunde in die Senior Fase verwag van onderwysers om induktiewe redenering te bevorder wanneer leerders ondersoek/take doen (DvBO, 2011:156). **Induktiewe redenering** speel 'n beduidende rol in leerders se vaardighede om ooreenkomste in reëls te identifiseer en algemene konsepte te verstaan (Chimoni *et al.*, 2018:1188). Leerders is in staat om met behulp van induktiewe redenering bestaande reëls te bevestig (Park & Kim, 2017:3774). Leerders kan nie probleme effektief oplos indien hulle induktiewe redeneringsvaardighede nie ontwikkel is nie (Chasanah, 2019:112). Sonder induktiewe

redenering kan leerders byvoorbeeld nie patrone identifiseer nie (Chimoni & Pitta-Pantazi, 2017:1188).

Kort voordat algebra aan graad 7-leerders bekendgestel word, word daar in die kurrikulum baie gefokus op getalpatrone en reëls, byvoorbeeld $x - 2 = 5$. Die uitkoms (die 5) is positief, daarom gaan x in die spesifieke geval ook groter as 5 wees. Induktiewe redenering is nodig vir die inleiding tot algebra (Chimoni *et al.*, 2018:59). Om die patroon van driehoeksgetalle uit te brei, verg ook induktiewe redenering, soos uitgebeeld in figuur 2-14.



Figuur 2-14: Patroon van driehoeksgetalle

Die eerste term bestaan uit een kol, die tweede term het drie kolle en die derde term het ses kolle. Indien die leerder bogenoemde inligting gebruik om die afleiding te maak dat term 7 uit $7+6+5+4+3+2+1$ kolle bestaan, dan het induktiewe redenering plaasgevind. Nog 'n manier om 'n leergeleentheid vir induktiewe denke te bied, is om numeriese voorbeelde te gebruik om algebraïese reëls en eienskappe uit te beeld (Riccomini *et al.*, 2015:238).

Induktiewe en deduktiewe redeneringsvorme is teenstellings van mekaar, maar saam vorm hulle 'n integrale deel van wiskundeleer (Wasserman & Rossi, 2015:25). Die Wiskundekurrikulum stel voor dat onderwysers leerders van induktiewe redenering na deduktiewe redenering lei (DvBO, 2011:28). Deduktiewe redenering is 'n vorm van redenering wat data voorsien wat gebaseer is op beginsels, terwyl induktiewe redenering op een of meer voorbeelde gebaseer is (Kaplan *et al.*, 2021:817). In onderrigpraktyk is die isolasiemethode (soos in figuur 2-15) 'n vorm van induktiewe denke en die substitusiemethode is 'n vorm van deduktiewe denke.

1. Los op vir x .

Voorbeeld: $-3x = 12$
 $\frac{-3x}{-3} = \frac{12}{-3}$
 $x = -4$

a. $-5x = 60$ b. $-2x = 24$ c. $-12x = 48$

Figuur 2-15: Oefening van isolasiemetode vir induktiewe redenering (DvBO-leerderboek 2:132)

2.2.4.3 Deduktiewe redenering

Deduktiewe redenering is 'n meer gesofistikeerde vorm van argumenteer as induktiewe redenering (Wasserman & Rossi, 2015:25) en vind in die teenoorgestelde rigting as induktiewe redenering plaas. Die rede is dat deduktiewe redenering van die algemene reël na die spesifieke toepassing beweeg.

Wanneer 'n leerder die eienskappe van getalle en bewerkinge waargeneem het en in probleemoplossing toepas, is dit deduktiewe redenering (Gilliam, 2019:52). Deduktiewe redenering stel 'n leerder in staat om van 'n beperkte en onvolledige veralgemening na 'n meer gesofistikeerde veralgemening te vorder (Chimoni *et al.*, 2018:1188). 'n Voorbeeld van deduktiewe denke is wanneer die substitusiemetode gebruik word, soos in figuur 2-16.

2. Toon aan dat die assosiatiewe eienskap vir optelling van heelgetalle geld.

Voorbeeld: $a = -7, b = 1, c = 2$
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
 $[(-7) + 1] + 2 = (-7) + (1 + 2)$
 $-6 + 2 = -7 + 3$
 $-4 = -4$

a. $(a + b) + c = a + (b + c)$
 AS: $a = 4$
 $b = -5$
 $c = 3$

b. $(a + b) + c = a + (b + c)$
 AS: $a = 2$
 $b = 9$
 $c = -4$

Figuur 2-16: Voorbeeld van oefening vir deduktiewe denke (DvBO-leerderboek 2:105)

Om bogenoemde redeneringsvorme in die praktyk aan leerders te onderrig, verg 'n leergesentreerde “dinkklaskamer” (Liljedahl *et al.*, 2021:3). 'n “Dinkklaskamer” het nie sitplekke soos in 'n tradisionele klaskamer nie, want leerders staan in ewekansig geselekteerde groepies van drie leerders voor 'n uitveerbare skryfbord. Leerders het meer waagmoed indien die oppervlak maklik kan uitvee. Leerders is ook meer aktief besig met redenering wanneer hulle staan as wanneer hulle sit (Liljedahl *et al.*, 2021:3). Die onderwyser moet goed nadink oor vrae wat leerders vra voordat sy antwoord om nie die redeneringsproses te stop nie. Wanneer 'n leerder vir die onderwyser vra: “is ek reg?” en die onderwyser antwoord, kan die leerder moontlik ophou dink (Liljedahl *et al.*, 2021:4).

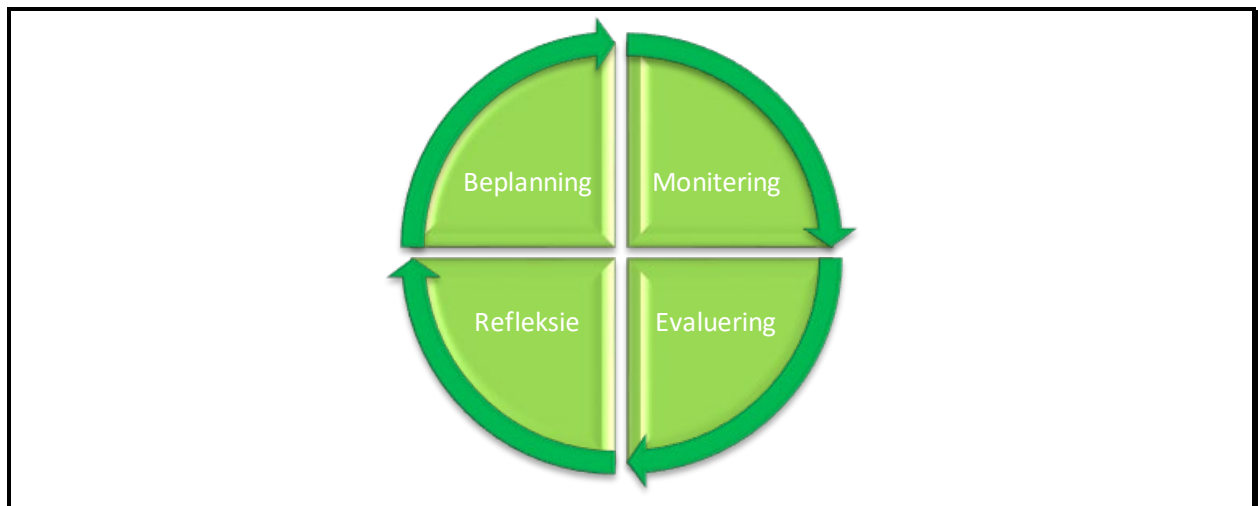
Doelgerigte redenering word gebaseer op metakognitiewe vaardighede (Kaplan *et al.*, 2021:815). Daar word van onderwysers verwag om deur middel van kommunikasie in korrekte wiskundetaal leerders na doelgerigte redenering te lei om algebraïese denke te ontwikkel (Uygun & Güner, 2019:215).

2.3 Metakognisie

Metakognisie word kortweg beskryf as 'n persoon se refleksie oor sy/haar denke (Flavell, 1979:907). Metakognisie is in die 1970's deur Flavell nagevors en ander navorsers bou voort op die vader van metakognisie se werk. Kognisie is kennis en denke van die menslike verstand en metakognisie is 'n individu se bewustheid van sy/haar kognitiewe prosesse (Öztürk, 2021:2). Flavell (1979:906) beskryf metakognisie in vier kategorieë: a) metakognitiewe kennis, b) metakognitiewe ervaring, c) metakognitiewe doelwitte en d) metakognitiewe strategieë. Metakognitiewe kennis behels die prosedurele kennis (hoe om die taak uit te voer) en voorwaardelike kennis (kennis oor hoekom en wanneer stappe uitgevoer word) (Daher *et al.*, 2018:293). Metakognisie is nodig om probleemoplossingsvaardighede te ontwikkel (Jagals & Van der Walt, 2016:154). Flavell (1979:907) beskryf drie kategorieë van metakognitiewe kennis, naamlik self, taak en strategie. Wat leerders oor hulle eie wiskundige vermoëns glo, is deel van metakognitiewe selfkennis. Indien 'n leerder weet hoe om 'n taak te begin, uit te voer en te voltooi, beskik die leerder oor genoegsame metakognitiewe taakkennis. Leerders het ook kennis nodig oor hoe om metakognitiewe strategieë effektief te gebruik (Flavell, 1979:907).

Die tweede kategorie, metakognitiewe ervaring, sluit die beoordeling van leer, die beraming van die hoeveel tyd en moeite wat aan 'n taak spandeer word en selfvertroue in (Radmehr & Drake, 2019:912). Metakognitiewe ervarings word die beste beskryf as 'n bewuswording van metakognitiewe kennis. Dit wil sê dat metakognitiewe kennis en metakognitiewe ervaring oorvleuel (Flavell, 1979:908).

Metakognitiewe doelwitte is die derde kategorie van metakognisie, wat uit metakognitiewe ervaringe spruit. Deur middel van metakognitiewe ervaringe is leerders in staat om realistiese doelwitte te stel en te monitor (Flavell, 1979:909). Kognitiewe strategieë dra by tot kognitiewe progressie, terwyl metakognitiewe strategieë gebruik word om progressie te monitor (Flavell, 1979:909). Die komponente van metakognisie is beplanning, monitering, evaluering en refleksie, soos uitgebeeld in figuur 2-17.



Figuur 2-17: Komponente van metakognisie (aangepas uit Flavell, 1979:909)

Beplanning behels die keuse van 'n gepaste metakognitiewe strategie, byvoorbeeld om die uitkoms vooruit te skat. Leerders se beplanningsvaardighede ontwikkel tussen die ouderdomme van 10 en 14 jaar (Schraw & Moshman, 1995:354). Dit is die gemiddelde ouderdom van graad 7-leerders en dus is dit die geskikte tyd om leerders aan te moedig om te beplan.

Monitering vind tydens die voltooiing van take plaas. Hierdie vaardigheid verbeter met oefening (Schraw & Moshman, 1995:355). Monitering is die proses wat doelstellings beheer en orden (Öztürk, 2021:2) en gereeld oor eie benadering reflekteer (Karlen, 2016:257). Leerders monitor hulle kognitiewe prosesse deur 'n geskikte metakognitiewe strategie te gebruik (Flavell, 1979:909). Moniteringsvaardighede ontwikkel stadig by kinders en selfs volwassenes, maar verbeter met oefening. Leerders wat hulle denkprosesse monitor, is in staat om meer ingewikkelde probleme op te los (Schraw & Moshman, 1995:355).

Evaluering is 'n reguleringsproses wat byvoorbeeld kontroleer of die doelwitte bereik is. Dit is belangrik dat leerders se doelwitte realisties is sodat hulle gemotiveerd kan bly sonder om te stagneer. Evaluering behels ook die identifisering van foute en hersiening om foute reg te maak

(Öztürk, 2021:2). Evaluering en beplanning sluit soms by mekaar aan (Schraw & Moshman, 1995:355). Wanneer 'n leerder sy/haar voorspelling kontroleer wat tydens beplanning gemaak is, vind evaluering plaas. Doelwitte word ook in die beplanningsfase gestel en in die evalueringsfase gekontroleer. Dit is die onderwyser se verantwoordelikheid om leerhindernisse te diagnoseer, doelwitte te help formuleer en leerders aan metakognisie bloot te stel (du Toit-Brits, 2018:378).

Refleksie bestaan uit 'n persoon se persoonlike kennis, idees en gevoelens (Denke *et al.*, 2020:6). Indien leerders versoek word om te reflekteer oor denkprosesse, word die onsigbare sigbaar en abstrakte konsepte kry vir die leerders betekenis (Denke *et al.*, 2020:2). Die onderwyser se rol is om vir leerders geleentheid te bied om te reflekteer oor algebra, want refleksie dra tot langtermyngeheue en probleemoplossingsvaardighede by. Verder is dit nodig om vir leerders die geleentheid te gee om in groepe te reflekteer, want groepdialoog en -refleksie verbind voorkennis met nuwe kennis (Denke *et al.*, 2020:7). Wiskunde-onderwysers kan refleksie gebruik om metakognisie met algebraïese denke te verbind. Om metakognisie (beplanning, monitering, evaluering en refleksie) aan leerders te onderrig, is metakognitiewe strategieë nodig (Öztürk, 2021:2).

2.3.1 Metakognitiewe strategieë

Schraw en Moshman (1995:354) som metakognisie op as regulering van kennis, wat beplanning, monitering, evaluering en refleksie insluit. Leerders het strategieë nodig om kennis te reguleer. Deelnemers wat metakognitiewe strategieë doeltreffend gebruik, ontwikkel selfvertroue, wat ook wiskunde-angst beperk (Desender & Sasanguie, 2022:1002), wat tot die ontwikkeling van algebraïese denke bydra. Leerders wat metakognitiewe strategieë suksesvol gebruik, behaal meer sukses in wiskunde (Bulut, 2021:85). Metakognitiewe strategieë lei die leerders om deurlopend vrae te vra, soos “Doen ek die regte bewerking?”, “Is die antwoord in lyn met die skatting?”, “Is dit die enigste manier om die probleem op te los?” (Daher *et al.*, 2018:293). Hierdie gesprekke wat leerders tydens 'n wiskundetaak met hulleself voer, vorm deel van redeneringsvorme, wat stappe is om algebra- probleme op te los. Metakognitiewe strategieë bemagtig leerders om van konkrete na abstrakte redeneringsvorme te vorder, om in staat te wees om meer formele algebraïese denke te ontwikkel (Chimoni *et al.*, 2018:73).

Du Toit en Kotze (2009:58) identifiseer metakognitiewe strategieë as **beplanning, vra vrae, doelstellings, ken struikelblokke, ken wiskundeterme, probleemoplossing, hardop dink, skryf 'n joernaal, samewerking en modellering**. In die navorsing word die tien metakognitiewe strategieë gebruik, maar ander metakognitiewe strategieë is om bewustelik keuses, eie denke en dade te evalueer en om op eie refleksie uit te brei (Du Toit & Kotze, 2009:59). Die eerste metakognitiewe strategie wat in die studie ondersoek is, is beplanning. Aan die begin van 'n

aktiwiteit maak die onderwyser die leerders bewus van reëls en stappe wat nodig is vir probleemoplossing. Daarna begelei die onderwyser die leerders om hulle eie leer te beplan, want anders lei die metakognitiewe strategie (beplanning) nie na selfgeregleerde leer nie (Du Toit & Kotze, 2009:58).

Die tweede metakognitiewe strategie wat in die studie ondersoek word, is om vrae te vra. Tydens 'n aktiwiteit moet leerders bewus wees van wat hulle doen, om nie net vrae te antwoord nie, maar ook te genereer. Dit beteken dat leerders die konsep verstaan en voorkennis daaraan koppel (Du Toit & Kotze, 2009:59). Hierdie metakognitiewe strategie sluit vrae in soos “Is dit die manier om die probleem op te los?”, “Is hierdie oplossing moontlik reg?” en “Het ek hierdie stappe al voorheen gedoen?”.

Doelstelling is 'n metakognitiewe strategie wat ook deurlopend gebruik word. Leerders wat suksesvol is met doelstellings ontwikkel in selfgerigte leerders. Hierdie doelwitte word vir effektiewe leer gemonitor (Du Toit & Kotze, 2009:60). Dit is belangrik om die doelwitte te monitor, selfs al verander die doelwitte (Shore, 2021:5). Om bewus te wees van struikelblokke is 'n metakognitiewe strategie wat spruit uit monitering. Indien 'n leerder tydens 'n vorige geleentheid sy/haar eie leer gemonitor het, word hy/sy bewus van struikelblokke. Die leerder is dan bewus van huidige kennis en kennis wat nodig is om die probleem op te los. Selfkennis (om bewus te wees van struikelblokke) stel leerders in staat om voor, tydens en na 'n leerproses oor eie leer te reflekteer (Van der Walt, 2014:2).

Om wiskundeterme te ken, is 'n effektiewe metakognitiewe strategie om leerders se algebraïese denke te bevorder. Leerders wat seker is van algebrataal is in staat om (algebra-) probleme op te los (Riccomini *et al.*, 2015:236). Probleemoplossingstrategieë is metakognitiewe strategieë wat leerders na reflektoring oor eie leer lei (Du Toit & Kotze, 2009:60). Hardop dink is 'n metakognitiewe strategie wat konseptuele kennis bevorder (Bonner *et al.*, 2021:27), wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is. Du Toit en Kotze (2009:61) meen dat die hoofaspek van Vygotsky se teorie is om leerders te lei om taal te gebruik, nie net vir kommunikasie nie, maar ook vir beplanning en monitering. Om 'n joernaal by te hou oor byvoorbeeld stappe en moontlike oplossings vir probleme is 'n metakognitiewe strategie wat leer ondersteun.

Samewerking is 'n metakognitiewe strategie wat vele leerders verkies. Hierdie metakognitiewe strategie maak leerders bewus van hulle eie sowel as ander leerders se denkprosesse (Du Toit & Kotze, 2009:61). Shore (2021:5) beweer dat daar 'n dieper leer plaasvind wanneer leerders saam werk en oor konsepte kommunikeer.

Die laaste metakognitiewe strategie wat in die studie ondersoek word, is modellering. Modelleringsvaardighede ontwikkel wanneer 'n onderwyser sy/haar eie denkprosesse demonstreer en aan leerders verduidelik hoe hy/sy by die oplossing uit gekom het (Du Toit & Kotze, 2009:61).

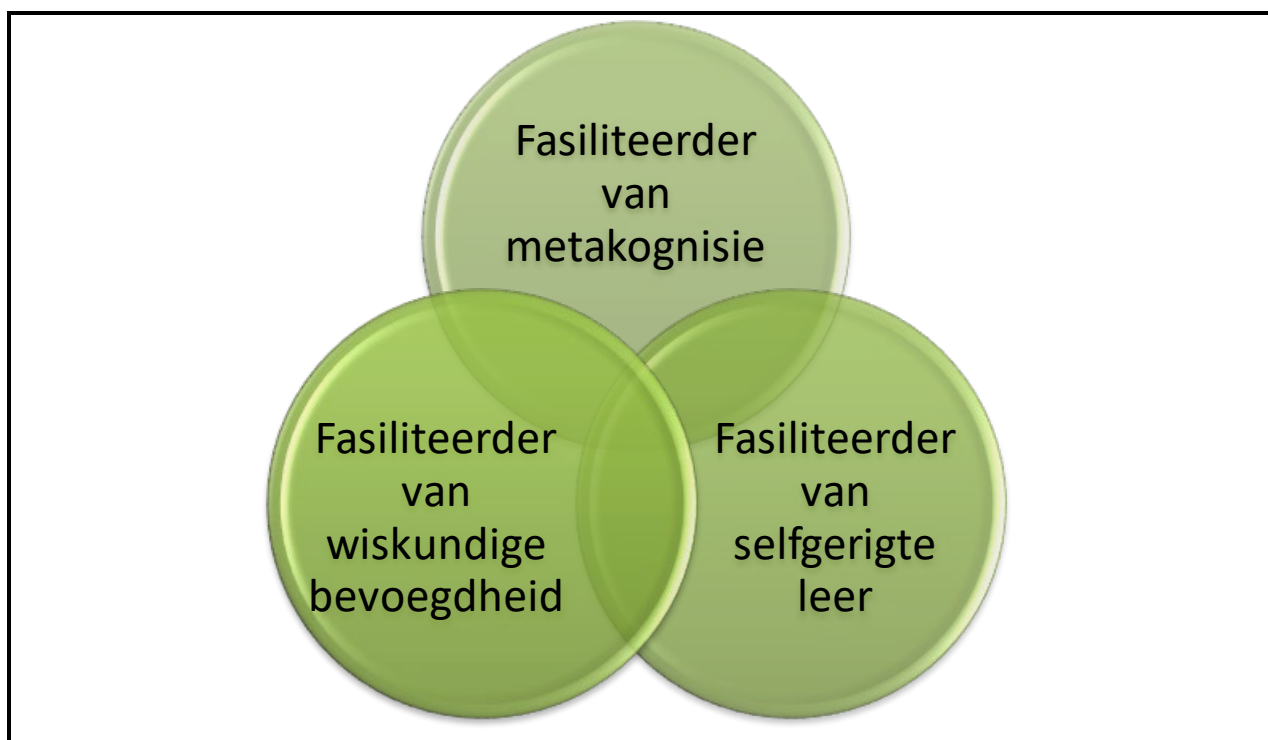
Djudin (2017:125) gee 'n paar praktiese wenke vir onderwysers om metakognitiewe strategieë by leerders te ontwikkel. Metakognitiewe vaardighede verskil van kognitiewe vaardigheide. Om 'n lys getalle op te tel, verg kognitiewe vaardighede, maar om die inverse berekening te doen om die antwoord te toets, is 'n metakognitiewe vaardigheid (Djudin, 2017:125). Om metakognisie te ontwikkel, behoort leerders hardop te dink. Wanneer leerders hardop dink, ontwikkel hulle wiskundetaal en die onderwyser kan terselfdertyd wanbegrippe identifiseer (Djudin, 2017:126). Onderwysers wat vrae vir individuele leerders vra soos: “hoekom het jy hierdie bewerking gekies?”, bevorder gesprekke en motiveer leerders om hardop te dink (Demonty *et al.*, 2018:8).

'n Tweede praktiese wenk wat Djudin (2017:126) vir onderwysers bied om metakognitiewe strategieë te ontwikkel, is dat leerders hulle eie algebra-opdragte moet nasien. Leerders moet weet waar hulle foute gemaak het en dit regmaak. Struikelblokke word geïdentifiseer wanneer leerders hulle eie werk korrigeer (Djudin, 2017:126). Om 'n joernaal te hou, is nog 'n praktiese wenk wat tot leerders se metakognitiewe strategieë kan bydra. Leerders kan vrae en notas oor onderwerpe in die joernaal skryf om hulle denkprosesse te monitor (Djudin, 2017:127).

Om metakognitiewe strategieë vir leerders aan te leer, sal 'n positiewe bydrae tot hulle redeneringsvermoë lewer omdat leerders a) sal kan besluit oor wat nodig is om die taak uit te voer, b) die korrekte stappe en bewerkinge sal kan identifiseer, c) moontlike resultate kan vooruitskat en d) sal kan terugkyk of die oplossing vir die taak geskik is (Daher *et al.*, 2018: 293). Metakognitiewe strategieë bemagtig leerders om van konkrete na abstrakte redeneringsvorme te vorder en om in staat te wees om na meer formele algebraïese denke te vorder (Chimoni *et al.*, 2018:73). Metakognitiewe strategieë dra tot doeltreffende redeneringsvorme by (Kaplan *et al.*, 2021:815).

2.3.2 Die rol van onderwysers as fasiliteerders van metakognisie, selfgerigte leer en wiskundige bevoegdheid

Daar word van onderwysers verwag om aan leerders leiding te bied sodat leerders kan ontwikkel om later take selfstandig te verrig (Pedro & Van der Merwe, 2020:372). Die navorser het die rol as fasiliteerder in drie komponente verdeel, soos in figuur 2-18 getoon word.



Figuur 2-18: Onderwyser se rol as fasiliteerder

2.3.2.1 Onderwysers as fasiliteerders van metakognisie

Onderwysers speel 'n belangrike rol as fasiliteerders om metakognitiewe strategieë te ontwikkel. Onderwysers moet die begeerte by leerders skep om verantwoordelikheid vir hulle eie leer te neem. In alledaagse onderwyspraktik is formatiewe terugvoer van onderwysers oor metakognitiewe strategieë 'n belangrike komponent in onderrig (Molin *et al.*, 2020:1). Met ander woorde, onderwysers moet metakognitiewe strategieë aan leerders kommunikeer en modelleer en meer spesifiek met leerders in korrekte wiskundetaal praat sodat hulle metakognitiewe strategieë en wiskundetaal kan aanleer. Leerders het geleenthede nodig om metakognitiewe vaardighede te oefen (Astriani *et al.*, 2020:5).

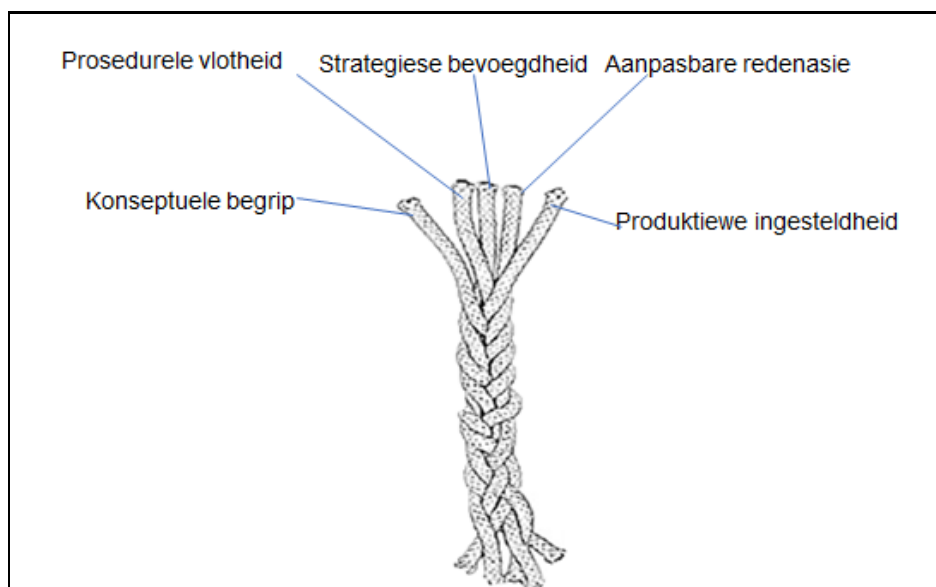
2.3.2.2 Onderwysers as fasiliteerders van selfgerigte leer

Daar word in die 21ste eeu van leerders verwag om aanpasbaar te wees om aan die eise van die Vierde Industriële Revolusie te voldoen. Om leerders te bemagtig vir dié uitdagings, moet hulle selfgerig kan leer (Du Toit & Blignaut, 2019:515). Metakognisie is 'n primêre komponent van selfgerigte leer (Breed & Bailey, 2018:2). Selfgerigte leer (SGL) het in die 21ste eeu 'n *sine qua non* geword (Mentz & De Beer, 2021:163). SGL dra by tot hoërdenkvaardighede wat

leerders bemagtig om hulle eie leerprosesse te verstaan en te monitor (Molin *et al.*, 2020:3). Selfregulering bestaan uit kognisie, metakognisie en motivering (Vula *et al.*, 2017:51). Onderwysers is bewus van hulle rol as fasiliteerder van kognisie. Kognisie verg nie noodwendig gevorderde denkvaardighede soos metakognisie nie (Ozturk, 2021:54). Van der Walt (2014) stel dit dat SGL en metakognisie in leer onderskei kan word, maar nie geskei kan word nie. Daar is 'n duidelike verband tussen 'n leerder se metakognisie, SGL en wiskundeprestasie (Van der Walt, 2014:7). Daarom is dit die onderwyser se verantwoordelikheid om leerders te bemagtig met metakognitiewe strategieë om hulle in selfgereguleerde leerders te ontwikkel. Wiskundige bevoegdheid verbeter SGL, beperk wiskunde-angs en verbeter leerders se wiskunde prestasies (Grothérus *et al.*, 2019:669).

2.3.2.3 Onderwysers as fasiliteerders van wiskundige bevoegdheid

Wiskundige bevoegdheid verwys na leerders se vermoë om te ondersoek, gevolgtrekkings te maak, logies te redeneer en probleme op te los (Junpeng *et al.*, 2020:665). Onderwysers moet leerders fasiliteer, want alle leerders kan en behoort wiskundig bevoeg te wees (Kilpatrick *et al.*, 2001:10). Wiskundige bevoegdheid is 'n vervlegdheid van vyf velde, naamlik konseptuele begrip, prosedurele begrip, strategiese begrip, aanpasbare redenasie en 'n produktiewe ingesteldheid, soos gesien in die figuur 2-19 (Kilpatrick *et al.*, 2001:116).



Figuur 2-19: Vyf velde van wiskundebevoegdheid (aangepas uit Kilpatrick *et al.*, 2002)

Die eerste veld, **konseptuele begrip**, word beskryf as 'n integrale en funksionele verstaan van wiskunde-idees (Burrows *et al.*, 2020:3). Konseptuele begrip word ook beskryf as die verstaan van wiskundekonsepte, -bewerkings en -verwantskappe (Grothérus *et al.*, 2019:669).

Konseptuele begrip verbind nuwe konteks met voorkennis vir 'n dieper verstaan van wiskunde. Met behulp van konseptuele begrip is leerders in staat om foute te verminder en om probleme meer akkuraat op te los (Altarawneh, 2021:355). Wiskundetaal hou verband met konseptuele begrip, omdat konseptuele begrip kennis van syfers en simbole insluit (Altarawneh, 2021:355), want indien 'n leerder die korrekte konsep aan wiskundeterme kan koppel, sal die leerder beter verstaan hoe om probleme op te los.

Die tweede veld: **prosedurele vlotheid**, is die vaardigheid om prosedures akkuraat, effektief en toepaslik uit te voer. Prosedurele vlotheid word ook beskryf as die kennis van hoe prosedures gebruik word (Burrows *et al.*, 2020:4). Leerders met prosedurele vlotheid beskik oor die vermoë om prosedures aan te pas indien nodig (Grothérus *et al.*, 2019:669). Om slegs prosedurele vlotheid te ontwikkel, is nie genoeg om wiskundige bevoegdheid te ontwikkel nie (Allsopp *et al.*, 2017:274). Prosedurele vlotheid sonder konseptuele begrip veroorsaak 'n ontoereikende verstaan van wiskunde deur reëls net te memoriseer. In hierdie geval is leerders in staat om algemene algoritmes te doen, maar verstaan nie noodwendig die wiskundekonsepte nie (Altarawneh, 2021:355).

Strategiese bevoegdheid is die vermoë om te formuleer, voorstellings te maak en probleme op te los (Grothérus *et al.*, 2019:669). Indien 'n leerder wiskundige probleme kan formuleer, voorstel en oplos, beskik die leerder oor strategiese bevoegdheid (Burrows *et al.*, 2020:4). Altarawneh (2021:356) is van mening dat strategiese bevoegdheid nie sonder korrekte wiskundetaal kan ontwikkel nie, want leerders moet Wiskunde kan verwoord om deur konseptuele begrip en prosedurele vlotheid oplossings vir probleme te vind. Strategiese bevoegdheid stel leerders in staat om probleme op verskeie maniere op te los. Leerders kry 'n veerkragtigheid om oplossings in verskeie voorstellingsvorme te bied. Hierdie navorsing het metakognitiewe strategieë ondersoek. Dit wil sê dat wiskundige strategiese bevoegdheid vir die navorser belangrik is, terwyl daar gefokus is op bevoegdheid om metakognitiewe strategieë te ontwikkel. Die navorser het 'n verskeidenheid metakognitiewe strategieë aan deelnemers onderrig en dan ondersoek watter metakognitiewe strategieë die deelnemers gebruik en watter metakognitiewe strategieë 'n rol in die ontwikkeling van algebraïese denke speel.

Die kapasiteit vir logiese denke, refleksie, verduideliking en regstellings is **aanpasbare redenering** (Burrows *et al.*, 2020:669). Aanpasbare redenering word ook beskou as die vermoë om logies oor die verwantskappe tussen konsepte en situasies te dink (Burrows *et al.*, 2020:4). Aanpasbare redenering help leerders om die probleem te verstaan en te weet wat om volgende te doen. Wanneer die plan geïmplementeer word, monitor die leerder die proses met aanpasbare

redenasie en evalueer die uitkoms van die proses om te bepaal of daar regstellings nodig is (Altarawneh, 2021:356) – wat refleksie is.

Die laaste veld van wiskundige bevoegdheid is **produktiewe ingesteldheid**, wat leerders in staat stel om wiskunde as waardevol te beskou en wiskunde effektief te gebruik om sin te maak van hulle leëwêreld (Grothérus *et al.*, 2019:669). Leerders met 'n produktiewe ingesteldheid ontwikkel wiskundige selfvertroue, wat tot selfgereguleerde leer lei. Produktiewe ingesteldheid is 'n natuurlike aanvoeling vir wiskunde. Aanpasbare redenering het 'n produktiewe ingesteldheid nodig om te ontwikkel (Altarawneh, 2021:356).

Wiskundekennis alleen is nie genoeg vir wiskundige bevoegdheid nie (Altarawneh, 2021:356). Om leerders te bemagtig met wiskundige bevoegdheid gee vir hulle selfvertroue, wat wiskunde-angs verminder en selfgerigte leer bevorder (Grothérus *et al.*, 2019:667).

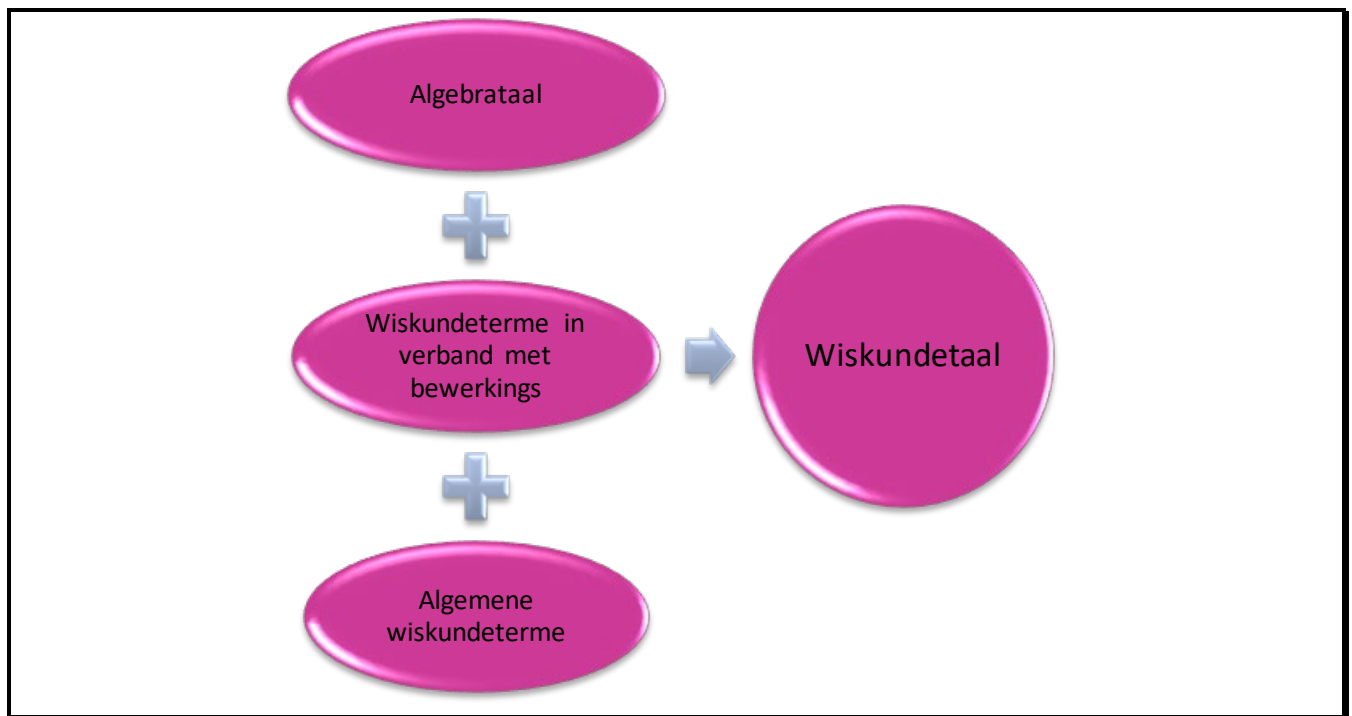
2.4 Die rol van wiskundetaal in die ontwikkeling van algebraïese denke

Wiskunde is 'n taal met unieke terminologie en konsepte wat nodig is vir leerders om wiskunde te kan leer. Indien leerders nie die wiskundetaal ken of verstaan nie, het dit 'n negatiewe impak op leerders se wiskundeprestasie (Moffett & Eaton, 2019:1765). Die krag van taal kan leerders óf insluit óf uitsluit as dit by die verstaan van wiskunde kom (Robertson & Graven, 2020:77).

Suid-Afrika het 11 amptelike tale. Slegs 10% van leerders is Engelssprekend, maar 70–80% van leerders ontvang onderrig in Engels (Robertson & Graven, 2020:80). Die meerderheid leerders in Suid-Afrika ontvang dus nie onderrig in hulle moedertaal nie. Sommige leerders wat in Engels onderrig word, praat Engels slegs by die skool en nie by die huis nie (Robertson & Graven, 2020:78), daarom kry die leerders nie die geleentheid om wiskundetaal by die huis te oefen nie, wat wiskunde-ontwikkeling beperk. Taal word gedefinieer as woorde, die uitspraak van woorde en samevoeging van woorde om verstaanbaar in die gemeenskap te kommunikeer (Riccomini *et al.*, 2015:236).

In wiskunde word 'n eie, gespesialiseerde taal gebruik wat simbole en notasies behels om numeriese, meetkundige en grafiese verwantskappe te beskryf (DvBO, 2011:8). Die onderrig en leer van wiskunde is kompleks en vereis van onderwysers en leerders om voldoende wiskundekennis te hê, insluitende wiskundetaal (verbaal en geskrewe) om in wiskunde te kan presteer (Wilkinson, 2019:87). Wiskundetaal is die bousteen vir wiskundige vaardighede (Riccomini *et al.*, 2015:236).

Die navorser verdeel wiskundetaal wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is in drie komponente, naamlik algebrataal, wiskundeterme in verband met bewerkings en algemene wiskundeterme (sien figuur 2-20).



Figuur 2-20: Wiskundetaal

2.4.1 Algebrataal

Korrekte, gespesialiseerde wiskundetaal is nodig om algebraïese denke te ontwikkel. Die Suid-Afrikaanse Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsverklaring (KABV) noem hierdie gespesialiseerde wiskundetaal *algebrataal*. Algebrataal is nuut in graad 7, omdat leerders eers in graad 7 aan algebra bloot gestel word. Die gebruik van simboliese taal help om begrippe van veranderlikes te ontwikkel. Algebrataal word gebruik om reëls of simboliese voorstellings te herken en te interpreteer, asook om veranderlikes en konstante waardes te vergelyk (DvBO, 2011:63).

Litke (2020:5) beskryf in haar bevindinge hoe wiskundetaal gebruik kan word om algebra te onderrig. Eerstens behoort die wiskunde-onderwyser betekenis aan algebraprocedures te gee, byvoorbeeld oor hoe formules toegepas word. Elke stap van algebraprocedures word met leerders bespreek om sinvolle kennis te bou. Korrekte wiskundetaal bevorder prosedurele en konseptuele kennis (Ndlovu & Chiromo, 2019:2), wat tot wiskundige bevoegdheid bydra.

Tweedens word daar na meer buigbaarheid van algebraprocedures gewerk deur die betekenis van procedures te bestudeer (Litke, 2020:6). Çelik (2020:328) stel dit dat dit nodig is vir leerders om algebrataal akkuraat te kan identifiseer, lees en skryf.

Derdens ontwikkel algebraïese denke wanneer daar verwantskappe tussen voorstellings gemaak word, wat konseptuele kennis ook behels. Algebraïese verwantskappe word in grafieke, tabelle en vergelykings voorgestel (Litke, 2020:7).

Die vierde leergeleentheid word gebied wanneer daar verwantskappe tussen onderwerpe gemaak word. Leerders se konseptuele kennis word verryk wanneer daar verwantskappe tussen ander onderwerpe en algebra gemaak word. Verder is dit belangrik om algebra aan lewenswerklike situasies te koppel sodat leerders daarmee kan identifiseer om wiskundebegrippe te verstaan.

Die vyfde leergeleentheid is wanneer daar verwantskappe geïdentifiseer word tussen bekende en minder bekende wiskunde-idees (Litke, 2020:8). Verkeerde wiskundetaal word in die betrokke gesprekke reggestel. Indien 'n leerder woorde soos iets, die ding, boonste/onderste getal gebruik in die plek van 'n korrekte wiskundeterm, sal die onderwyser die korrekte term aan die leerder voorhou. Waar moontlik sal daar konsepbeelde aan konsepdefinisies gekoppel word.

2.4.2 Wiskundeterme rakende bewerkings

Wiskundeterme rakende bewerkings, byvoorbeeld die som van, produk en verskil, word vanaf die Grondslagfase in die wiskundeklas gebruik. Leerders hoor en verstaan gewoonlik die terme, maar kry nie die geleentheid om dit verbaal te gebruik nie. Die vaardigheid om wiskundetaal te verduidelik en daarmee te kommunikeer, bevorder wiskundige bevoegdheid (Riccomini *et al.*, 2015:236).

2.4.3 Algemene wiskundeterme

Buiten die wiskundeterme wat met bewerkings verband hou, is daar vele *algemene wiskundeterme*. Wiskundetaal is 'n unieke maar abstrakte vorm van geletterdheid wat nodig is om akkuraat te kommunikeer, te redeneer en probleme op te los (Çelik, 2020:328). Wessel (2020:656) is van mening dat klasgesprekke verduidelikend en beredenerend van aard moet wees eerder as die tradisionele rapportering. Leerders behoort meer geleentheid te kry om algebraïese konsepte in hulle eie woorde te verduidelik, eerder as om net antwoorde op oplossings te rapporteer. Wiskundetaal word op vier maniere gestimuleer: deur die leerder self, deur die leermateriaal, deur ander leerders en deur die wiskunde-onderwyser (Wessel,

2020:653). Leerders leer nuwe woordeskat deur klasgesprekke, 'n woordebank, muurkaarte, sinsfrases en flitskaarte, maar dit bly die wiskunde-onderwyser se verantwoordelikheid om korrekte konsepte aan die woordeskat te koppel (Wessel, 2020:656).

Riccomini *et al.* (2015:238) noem faktore wat kan lei tot wanpersepsies soos woordeskat wat konteks-afhanklik is (koers, byvoorbeeld R15/kg en koers is die rigting waarin iemand loop) en wiskundegerigte woorde (produk van is vermenigvuldig, maar fabrieke vervaardig 'n produk). Soms kan die vertaling van woorde ("whole numbers" is telgetalle en "integers" is heelgetalle) ook tot wanpersepsies lei. Die navorser het opgemerk dat anglisismes in Afrikaans ook 'n struikelblok vir leerders kan wees, byvoorbeeld, *ewewydige lyne* word ook *parallele lyne* genoem. Dit is die wiskunde-onderwyser wat Wiskunde in Afrikaans onderrig se verantwoordelikheid om die verskille aan leerders uit te wys. Geen algebraïese reël mag as vanselfsprekend aanvaar word nie en betekenis van simbole en voorstellings moet duidelik gekommunikeer word vir suksesvolle onderrig en leer (Kwok *et al.*, 2020:176). Die bewys dat die waarde van die linkerkant in 'n vergelyking gelyk is aan die waarde van die regterkant moet ook duidelik aan leerders verwoord word (Dogan & Williams-Pierce, 2020:133).

Wiskundige feite, idees en prosesse word verstaan as dat dit deel vorm van 'n interne netwerk van voorstellings. Wiskunde word verstaan as dat die interne voorstelling van 'n begrip deel vorm van 'n netwerk van voorstellings (Hiebert & Carpenter, 1992:67). Wiskundekennis kan met 'n spinnerakstruktuur beskryf word, waar feite, idees en prosesse aan 'n netwerk van voorstellings gekoppel word. Die netwerk kan die groei en verstaan van wiskunde uitbou deur korrekte voorstellings van feite, idees en prosesse aan leerders te bied (Hiebert & Carpenter, 1992:69). Dit wil sê dat die korrekte wiskundetaal leerders met die ontwikkeling van algebraïese denke help (Kızıltoprak & Köse, 2017:131). Voorkennis is baie belangrik vir die ontwikkeling van algebraïese denke, want leerders bring hulle eie voorstellings en ervaring van algebra na vore (Hiebert & Carpenter, 1992:90). Wiskunde-onderwysers is verantwoordelik om 'n verskeidenheid korrekte eksterne voorstellings aan leerders te bied, sodat hulle interne voorstellings ook korrek sal wees. Voorstellings wat aan leerders se leëwêreld gekoppel word, is meer effektief. Die bou van kennis begin by wat die leerder reeds weet (Hiebert & Carpenter, 1992:86).

2.5 Samevatting

In hierdie hoofstuk is die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke in diepte bepreek. Die rol van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë is met behulp van die literatuur

bestudeer om te bepaal watter invloed dit op die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke het.

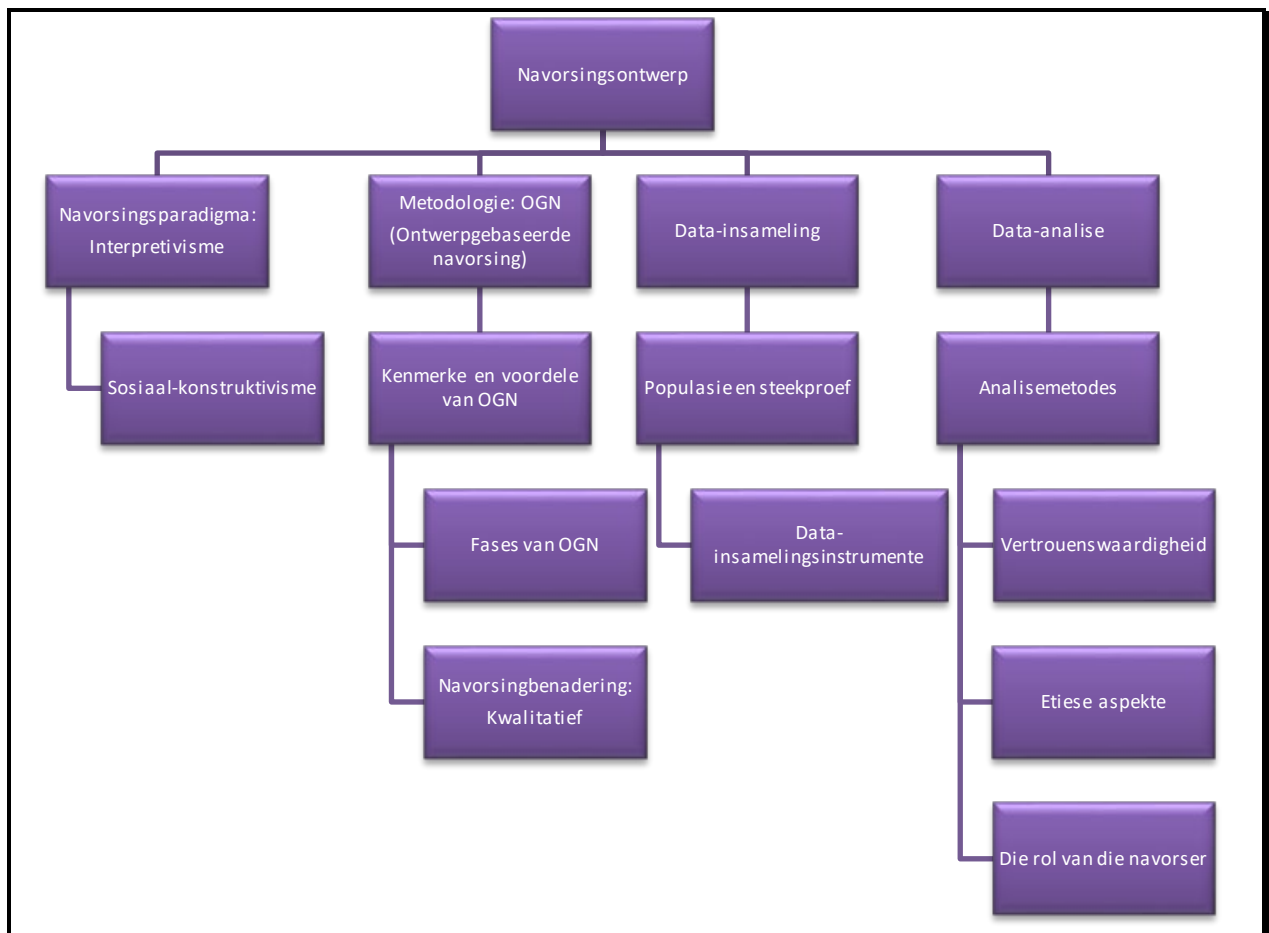
In hoofstuk 3 word die navorsingsparadigma en navorsingsontwerp bespreek. Die steekproefneming en die keuse van deelnemers word beskryf en inligting oor OGN word verskaf. Daarna word die rol van die navorser en etiese aspekte bespreek.

HOOFSTUK 3

NAVORSINGSONTWERP EN -METODOLOGIE

3.1 Inleiding

In hoofstuk 2 is tersaaklike literatuur bespreek wat die navorser gebruik om die empiriese ondersoek te ondersteun. Empiriese data en die literatuur word gebruik om die navorsingsvrae te beantwoord. Hoofstuk 3 fokus op die navorsingsontwerp en -metodologie wat gebruik is om data in te samel. Figuur 3-1 is 'n visuele voorstelling van hoofstuk 3.



Figuur 3-1: Visuele voorstelling van hoofstuk 3

Hierdie studie volg 'n kwalitatiewe navorsingsbenadering met die doel om die volgende primêre navorsingsvraag te beantwoord: ***Watter riglyne kan gebied word vir graad 7-leerders se ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë?***

Die volgende sekondêre navorsingsvrae is geformuleer om bostaande navorsingsvraag te beantwoord:

1. Hoe ontwikkel graad 7-leerders se algebraïese denke?
2. Watter metakognitiewe strategieë speel 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke?
3. Wat is die rol van wiskundetaal in die leer van algebra in graad 7?

Hierdie navorsing word onderneem vanuit 'n interpretivistiese paradigma en die toepaslike metodologie vir die studie is OGN.

3.2 Navorsingsparadigma

Navorsingsparadigmas soos positivisme, neo-positivisme, pragmatisme en interpretivisme is “lense” waardeur daar na die navorsingsonderwerp gekyk word. Elemente van 'n paradigma sluit ontologie, epistemologie en die metodologie in (Ling, 2017:19).

Die navorser het 'n interpretivistiese paradigma vir die navorsing gekies. Nieuwenhuis (2020b:66) meen dat interpretivisme 'n “teen-positivistiese” paradigma is. Die **interpretivistiese** paradigma ondersoek die kennisvormingsprosesse van mense in alledaagse situasies (Leavy, 2017:129). Die navorser meen dat die wêreld deur menslike ervarings verstaan word. Elke deelnemer het hulle eie ervaring en agtergrond van wiskunde aanleer. Die doel van die navorsing is om deelnemers se idees oor konsepte, wiskundetaal en begrip van algebra te ondersoek en te interpreteer om sodoende riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke te skep.

Ontologie vir die studie is relativisties, omdat meer kennis gekonstrueer word deur ervarings in die werklike wêreld as wat handboeke kan bied. Sosiale realiteit word gevorm deur die verskeidenheid interpretasies van die betrokke persone, wat verskeie perspektiewe oor 'n fenomeen het. Met ander woorde: sosiale realiteit is verskillend vir elke deelnemer, maar realiteit is as gevolg van elke deelnemer se bydrae veranderbaar (Nieuwenhuis, 2020b:67).

In terme van **epistemologie** is interpretivisme baie na aan konstruktivisme. Epistemologie word deur die navorser se teoretiese kennis bepaal. Individue is vry om hulle eie waarnemings te maak en daarom is epistemologie 'n subjektiewe benadering (Thanh & Thanh, 2015:24). Die navorsing is vanuit 'n sosiaal-konstruktivistiese wêreldbeskouing onderneem. Ginga en Zakariya (2020:2) verduidelik dat Lev Vygotsky aanvanklik die teoretiese perspektiewe vir sosiaal-konstruktivisme geskets het. Sosiaal-konstruktivisme soos deur Vygotsky voorgehou, vind in drie stadiums plaas: waarneming, leer deur onderrig en leer deur middel van samewerking (Ginga & Zakariya, 2020:3). Die kennisvormingsproses is die fokus van hierdie navorsing en daarom is 'n sosiaal-

konstruktivistiese benadering gepas. Hierdie teorie het die data-insamelingsiklusse van hierdie studie beïnvloed.

Vygotsky het ook daarop klem gelê dat korrekte vaktaal (in hierdie geval wiskundetaal en meer spesifiek algebrataal) vir die konstruering van kennis belangrik is (Bozkurt, 2017:215). Vir hierdie rede is dit nodig om korrekte wiskundetaal vir die ontwikkeling van algebraïese denke te gebruik. Deelnemers het met die navorser saamgewerk om nuwe kennis te konstrueer. Sosiaal-konstruktivistiese benaderings beklemtoon dat kennis nie gevind word nie, maar eerder gemaak/gekonstrueer word (Bozkurt, 2017:210). Tweerigtingkommunikasie het tussen die navorser en deelnemers plaasgevind om die ontwikkeling van algebraïese denke beter te verstaan. Sonder kommunikasie kan individue of die sosiale gemeenskap nie kennis bou nie (Daniels, 2016:51). Vygotsky se idees stem ooreen met metakognisie, wanneer leerders selfregulering, selfbeplanning, selfmonitering en selfevaluering as hulpmiddels gebruik (Daniels, 2016:100).

Die geskikte **metodologie** vir die studie was ontwerpgebaseerde navorsing (OGN). OGN is 'n metodologie wat deur onderwysers vir onderwysers ontwerp is (Parmaxi & Zaphiris, 2020:257). Om 'n navorsingsontwerp te beplan, is soos om die buitenste dele van 'n legkaart eerste te bou om 'n raamwerk te kry (Nieuwenhuis, 2020b:56). Indien die navorsingsontwerp stewig gevestig is, behoort die navorsing gemaklik te verloop. Die navorser het OGN as die navorsingsmetodologie gekies omdat die bekendstelling van algebra in die graad 7-jaar 'n komplekse onderrigkewessie is en dié metodologie die navorser in staat gestel het om 'n brug tussen teorie en praktyk te bou. OGN het die navorser toegelaat om ook 'n observeerder en deelnemer te wees in die studie (Bakker & Van Eerde, 2015:11).

3.3 Navorsingsontwerp

Ontwerpgebaseerde navorsing (OGN) in die onderwys het verskeie definisies. OGN kan gedefinieer word as 'n metodologie wat sistematies maar buigsaam is en poog om onderrigpraktyke te verbeter deur iteratiewe analise, ontwerp, ontwikkeling en implementering van intervensie in 'n lewenswerklike omgewing (Zydney *et al.*, 2020:4). McKenney en Reeves (2014:139) beskryf OGN in vier fases (analiseer en eksploreer, ontwerp en konstrueer, evalueer en reflekteer, implementeer en versprei), soos in figuur 3-2 aangetoon word.

Die mees gepaste definisie vir die studie is: OGN is 'n metodologie wat onderrig en leer (van veral wiskunde) in die outentieke omgewing ondersoek, terwyl dit terselfdertyd deur iteratiewe siklusse teorieë ontwikkel (Gallagher & Fazio, 2019:29).

3.4 Ontwerpgebaseerde navorsing

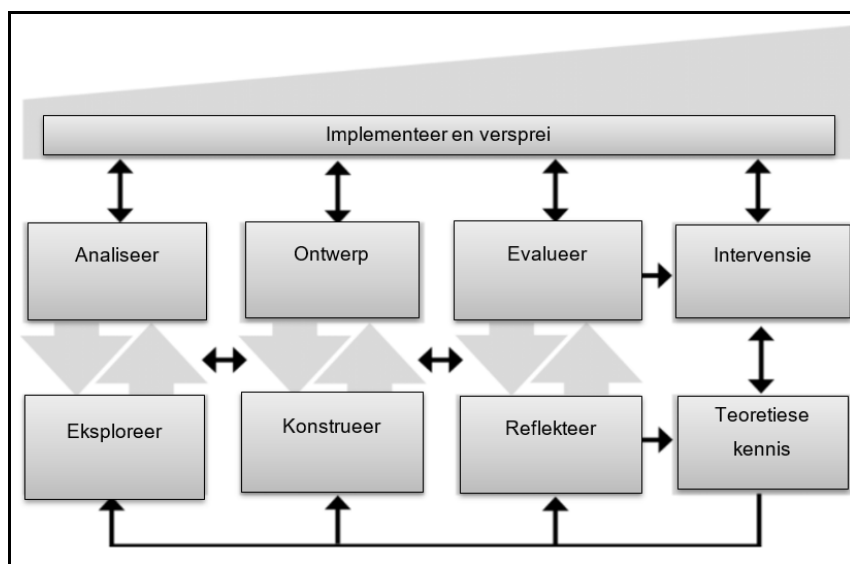
OGN beskik oor vyf kenmerkende eienskappe. Sommige van die eienskappe oorvleuel met ander metodologieë, maar die vyf gesamentlike eienskappe onderskei OGN van ander benaderings (Cobb *et al.*, 2015:4). Die eerste eienskap is dat OGN probleme in die praktyk aanspreek om onderrig te bevorder. Die stand van algebraïese denke was 'n wesenlike probleem in die navorser se onderwyspraktyk. Die tweede eienskap van OGN is dat 'n intervensie ontwerp word om probleme te hanteer. Die intervensie word getoets, geanaliseer en herontwerp om onderwyspraktyk te bevorder. Die derde eienskap van OGN is om 'n teorie te ontwikkel. Die navorser het literatuur ondersoek en 'n empiriese ondersoek gedoen om riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke te ontwikkel. OGN se vierde eienskap is die iteratiewe siklus van ontwerp en analiseer. Dit is 'n deurlopende proses van toets, analiseer en herontwerp (Cobb *et al.*, 2015: 5). Data-insamelingsinstrumente word getoets, geïmplementeer en geanaliseer en soms is intervensies nodig, wat lei tot herontwerp. Die vyfde eienskap van OGN is om die teorieë wat ontwikkel is (eienskap drie), te veralgemeen om aanpasbaar te wees vir onderwysers wat in die praktyk staan. Die riglyne wat in die navorsing ontwikkel is, is geskik vir ander graad 7-leerders aan te leer, sal 'n wiskunde-onderwysers om algebraïese denke te ontwikkel.

Die navorser was bewus van die beperkinge van OGN, maar die voordele is van groot waarde en die beperkinge is gering. Daar kan dalk beweer word dat OGN in 'n "vakuum" plaasvind (Cobb *et al.*, 2015:43), omdat die navorser ook die deelnemers se wiskunde-onderwyseres was, dit wil sê dat die navorser subjektief by die deelnemers betrokke was. Die navorser het een-tot-een-onderhoude met deelnemers gevoer om data in te samel, te ontleed en te kodeer (Kapucu, 2019:75).

Een voordeel van OGN is dat die metodologie navorsers die teoretiese en praktiese geleentheid bied om onderrigbenaderinge te ondersoek en te verander. Die metodologie bied nie net vir onderwysers die geleentheid om te ontwikkel en kennis te konstrueer nie, maar gee ook vir navorsers die geleentheid om in die onderwyspraktyk te staan (Chang *et al.*, 2020:604). OGN het nie die navorser se kreatiwiteit beperk nie (Rissanen, 2018:80). Die navorser is toegelaat om kreatief te wees met data-insamelingsinstrumente, onderhoudsvrae, 'n intervensie en data-ontleding.

3.5 Fases van OGN

Die fases van OGN (soos uitgebeeld in figuur 3-2) strek oor die hele studie, vanaf die identifisering van die probleem en die navorsingsvoorleggingsfase tot by die eindproduk van die navorsing.



Figuur 3-2: Generiese model om ontwerpgebaseerde navorsing uit te voer (McKenney & Reeves, 2021:86)

Elke fase het 'n spesifieke doel en daarom het die navorser verskeie navorsingsvaardighede nodig gehad, soos in die volgende paragrawe bespreek word (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:6).

3.5.1 Analiseer en eksploreer

Die eerste fase het ten doel om die probleem beter te verstaan (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:7). Verder behels dit die probleemstelling, konsultasies met die navorsingspan (die navorser en die promotors), die ontwikkeling van navorsingsvrae en die literatuurstudie (McKenney *et al.*, 2014:143). Hierdie is 'n ondersoekende fase waarin die navorser langtermyn doelwitte gestel het om die probleem op te los (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:7). Die navorser het uitdagings met die onderrig van algebra in die graad 7-jaar ondervind. Die ontwikkeling van algebraïese denke is 'n probleem wat nie met 'n kitsoplossing verbeter kan word nie.

Tydens die COVID-19-pandemie is daar minder tyd aan algebra spandeer as voor die pandemie, omdat die hersiene kurrikulum (opvangplan 2021–2023) minder tyd vir die onderrig van algebra voorgeskryf het. Dit het die situasie vererger. In die oorspronklike kurrikulum (DvBO, 2011:39) word daar ses ure in die derde kwartaal en sewe ure in die vierde kwartaal aan algebra spandeer. Tydens die COVID-19-pandemie is algebra net in die derde kwartaal onderrig. Al verander die omstandighede, het die navorsingspan op koers gebly met die probleemstelling en gewerk met die doel om die navorsingsvrae te beantwoord. Die navorsingsvrae (soos bespreek in par. 3.1) is op twee maniere ondersoek: deur 'n literatuurstudie en deur 'n empiriese ondersoek. Deur die

literatuur met empiriese insigte te vergelyk, is die probleem hanteer (McKenney *et al.*, 2014:132). Die literatuurstudie (hoofstuk 2) is deurlopend hersien. Deur die hele navorsingsproses was die navorser op soek na nuwe kennis van navorsers in die veld van algebraïese denke.

3.5.2 Ontwerp en konstrueer

Fase 2 van OGN sluit die teoretiese raamwerk en die beskrywing van intervensie in (McKenney *et al.*, 2014:140) en kan uit fase 1 of fase 3 voortspruit. 'n Intervensie wat die probleem hanteer, word ondersoek, ontwerp en gemaak en gedurende konstruering word daarvoor herbesin. Die navorser het vir hierdie fase kreatiwiteit nodig gehad om nuwe insigte toe te pas (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:7). Aanvanklik het die fase vaag begin, maar die navorser moes haar deur die literatuurstudie laat lei (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:8). In die navorsing is daar 'n intervensie ontwikkel wat op die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke (sien par 2.2) gebaseer is. Die algebrataak wat gebruik is vir data-insameling is verdeel in vier afdelings wat die vier dimensies (van algebraïese denke) weerspieël. Verder is daar artefakte ontwikkel, soos die metakognitiewe strategieswiel (sien par 1.5.3.), wat ook op die literatuur en die wiskundewoordeboeke gebaseer is. OGN streef daarna om praktiese intervensie asook bruikbare praktykskennis te ontwikkel (McKenney & Reeves, 2014:7).

3.5.3 Evalueer en reflekteer

Oorspronklike idees en prototipes van bogenoemde intervensie is die onderwerp van evaluering en reflektering (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:8). Die woord evaluering word in 'n breë sin gebruik en verwys na alle empiriese toetsing van die intervensie. Nadat die leeromgewing en literatuur ondersoek is, is die intervensie gereed om deur middel van iteratiewe **siklusse van ontwerp, ontwikkel, toets en hersien** geïmplementeer te word (Herrington *et al.*, 2007:6). Hierdie siklusse word volledig in die data-insamelingsparagraaf beskryf. Om die deelnemers te identifiseer, is ook deel van die evalueer- en reflekteerfase (soos bespreek in par. 3.3).

3.5.4 Implementeer en versprei

Die implementerings- en verspreidingsfase strek oor die drie bogenoemde fases. Implementering behels die implementering en onderhouding van die intervensie (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:9). Verspreiding het op die kernidees van die intervensie betrekking. Die fases van OGN is nie lineêr nie en daarom sluit fase 4 weer by fase 1 aan om te bepaal of die navorsingsvrae beantwoord is. Die vierde fase behels reflektering oor die hele navorsingsproses. Die fases is oor 'n tydlyn van ongeveer drie jaar versprei, soos in tabel 3-1 aangedui word.

Tabel 3-1: Fases van ontwerpgebaseerde navorsing om riglyne vir algebraïese denke te ondersoek

Jaar 1	Jaar 2	Jaar 2	Jaar 3
Analisering en eksplorering	Prototipes van intervensie	Herontwerp van intervensie	Evalueer, reflekteer en rapporteer
Fase 1	Fase 1, 2 en 3	Fase 1, 2 en 3	Fase 3

In die eerste jaar van die studie is literatuur ondersoek om te verstaan hoe graad 7-leerders se algebraïese denke ontwikkel. Verder is literatuur ondersoek om te bepaal wat die rol van wiskundetaal in die ontwikkeling van algebraïese denke is. Metakognitiewe strategieë is geanaliseer en ondersoek om die invloed daarvan op algebraïese denke beter te verstaan. So is 'n teoretiese onderbou vir die studie bepaal. Die tweede jaar van die studie is spandeer om prototipes van intervensie te ontwikkel en ontwerp (fase 2). Omrede die fases nie lineêr is nie, is die literatuurstudie (fase 1) deurlopend hersien, ter ondersteuning van die ontwerp en ontwikkeling van intervensie. Die intervensie is tydens die empiriese ondersoek geëvalueer. Tydens jaar 2 is die intervensie herontwerp en verbeter. Laastens, in jaar 3 is die resultate van die evaluering en reflektering aangeteken om die navorsingvrae te beantwoord.

3.6 Ontwerpgebaseerde navorsing om algebraïese denke te ontwikkel

Volgens McKenney *et al.* (2014:137) bestaan OGN uit die volgende: (a) 'n **probleem**, (b) 'n **fokus**, (c) **intervensie wat ontwikkel word**, (d) **kennis wat gekonstrueer word**, (e) **navorsingsmetodes**, (f) **navorsingtydraamwerk** en (g) **primêre en praktiese bydrae**. Leerders se ontoereikende algebraprestasie is in die studie as 'n **probleem** geïdentifiseer. Jaar na jaar bereik leerders nie die minimum vereistes in wiskunde nie, veral nie in die algebra-afdeling van die kurrikulum nie. Om 'n situasie te verander, moet die situasie eers verstaan word (Bakker & Van Eerde, 2015:6). Dit wil sê, om die probleem op te los, moes die navorser eers die probleem verstaan.

Deur middel van die literatuur kon die navorser die probleem van swak algebraprestasie beter verstaan. In hierdie geval het die OGN-studie op die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke **gefokus**. Leerders word in graad 7 aan algebra bekend gestel. Omdat algebra-onderrig al voor die COVID-19-pandemie uitdagend was en leerders nie die onderwerp bemeester het nie, was dit nodig om 'n **intervensie te ontwikkel**.

Hierdie intervensie is gebaseer op die navorser se praktiese en teoretiese kennis, want met OGN word die gaping tussen praktyk en teorie oorbrug. Die navorser het beoog om deur middel van

OGN beide suksesvolle intervensie en teoretiese insigte te verkry (Bakker & Van Eerde, 2015:2) om riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke te skep. Die intervensie wat deur die studie ontwikkel is, behoort ook geskik te wees vir ander skole se graad 7-leerders se ontwikkeling van algebraïese denke.

Leerders se **kennis** word gekonstrueer aan die hand van die vier dimensies van algebraïese denke (algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme). Graad 7-leerders se algemene inhoudsvelde en sommige konsepte is reeds in vorige grade aangeleer. Nuwe kennis oor die ander drie dimensies word in graad 7 gekonstrueer.

Die **navorsingmetodes** wat in die studie gebruik is, sluit woordelyste, algebralesse en waarnemings, skriftelike take en taakgebaseerde onderhoude in. Data-insamelinginstrumente is vir elk van die navorsingsmetodes ontwerp en ontwikkel (sien par. 3.9.). 'n Deel van OGN is om artefakte te ontwikkel wat 'n impak op die onderrigpraktyk het (Rissanen, 2018:80).

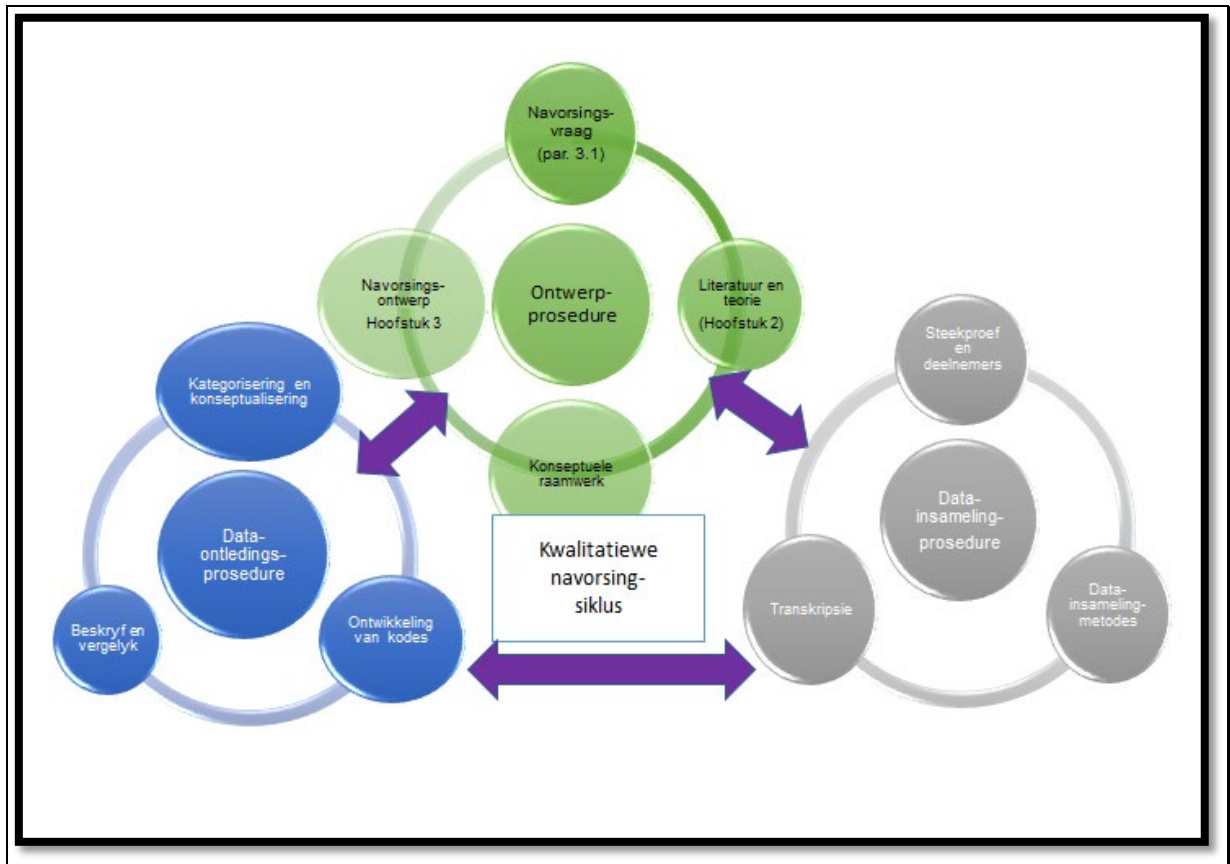
Die **navorsingtydsraamwerk** het oor die hele graad 7-jaar gestrek omdat algebraïese konsepte, eienskappe van getalle en bewerkings reeds aan die begin van die jaar onderrig word, maar data-insameling eers in die derde kwartaal plaasvind, wanneer algebra die onderrig tema is. Metakognitiewe strategieë word vanaf die begin van die jaar ontwikkel, maar in die derde kwartaal, wanneer algebra onderrig word, word metakognitiewe strategieë pertinent aan algebraïese denke gekoppel.

'n **Praktiese bydrae** word gemaak wanneer onderwysers se onderwyspraktyk aangepas kan word om metakognitiewe strategieë by leerders te kweek om algebraïese denke te ontwikkel. Die doel van die navorsing was om riglyne deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë vir die ontwikkeling van algebraïese denke te bied, wat 'n bydrae tot onderrigpraktyke behoort te maak.

3.7 Kwalitatiewe benadering

OGN is 'n kwalitatiewe benadering tot navorsing. Nieuwenhuis (2020b:59) stel dit dat alle kwalitatiewe navorsing naturalisties is omdat daar gefokus word op die natuurlike omgewing waar daar interaksie plaasvind. 'n Kwalitatiewe navorser is geïnteresseerd in hoe mense omgaan met en sin maak van die wêreld waarin hulle leef. 'n Kwalitatiewe benadering skakel goed in by die interpretivistiese paradigma, wat die werklikheid as sosiaal gekonstrueer en vloeibaar beskou. Kennis is dus altyd onderhandelbaar tussen onderwysers en leerders, kulture en ander sosiale instellings. Hierdie perspektief beskou die waarheid as 'n subjektiewe werklikheid (Pedro & Van der Merwe, 2020:383). Die navorser het kwalitatiewe navorsing gekies omdat sy glo dat hierdie

benadering 'n ryk beskrywing (Engelbrecht, 2016:110) van die ontwikkeling van algebraïese denke kon bied. Verder is 'n kwalitatiewe benadering nodig vir 'n in-diepte omskrywing (Rahayuningsih *et al.*, 2020:61) van die wiskundetaal wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is. Die kwalitatiewe benadering bepaal die data-insameling en data-analiseringprosedures soos geïllustreer in figuur 3-3.

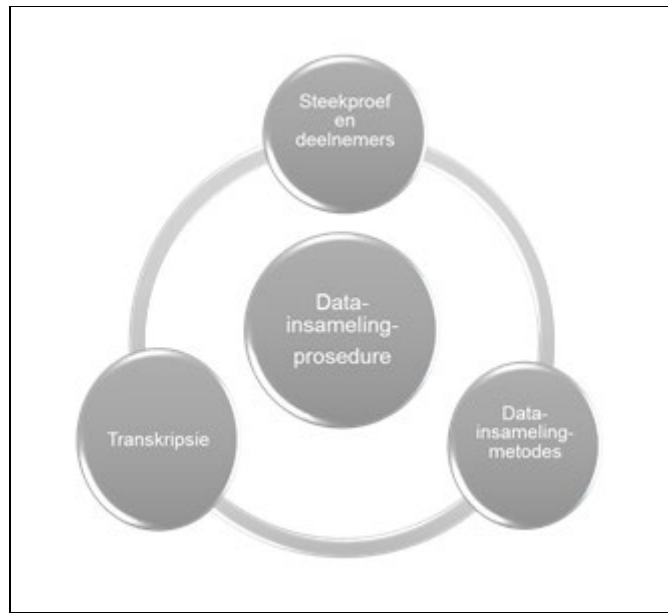


Figuur 3-3: Kwalitatiewe navorsingsiklus (aangepas uit Nieuwenhuis, 2020b:59)

In die vorige afdeling is die ontwerp-prosedure bespreek. Met die konseptuele raamwerk in plek, kan die data-insamelings-prosedure begin.

3.8 Populasie, steekproefneming en deelnemers

Die data-insamelings-prosedure begin by die bepaling van die populasie, steekproefneming en deelnemers aan die navorsing, soos uitgebeeld in figuur 3-4.



Figuur 3-4: Kwalitatiewe navorsingsiklus: data-insameling

Doelgerigte steekproefneming vorm deel van kwalitatiewe navorsing (Lombard, 2016:104). In hierdie navorsing het die navorser van doelgerigte steekproefneming gebruik gemaak. Die navorser was die graad 7-wiskunde-onderwyser by die betrokke skool in Noordwes. Die graad 7-groep het uit ongeveer 100 leerders bestaan wat in vyf klasse verdeel is, wat die populasie gevorm het. Een van die klasse het uit Afrikaanssprekende leerders bestaan en die ander vier klasse was Engelssprekend. Dit was egter nie moontlik om met al die graad 7-leerders onderhoude te voer nie en daarom is daar van doelgerigte steekproefneming gebruik gemaak. 'n Doelgerigte steekproef bevat spesifieke kriteria waaraan deelnemers moet voldoen om deel van data-insameling te vorm (Creswell & Poth, 2016:75).

Vyftien deelnemers is op grond van die woordelys se resultate geïdentifiseer. Die vyf deelnemers wat die beste presteer het in die woordelys (WL), is vir data-ontledings doeleindes en etiese aspekte as deelnemer A1 tot deelnemer A5 benoem. Deelnemer A5 het ná die voltooiing van die woordelys (WL) verhuis en die navorsing het met 14 deelnemers voortgegaan. Uit die populasie van ongeveer 100 leerders is daar 'n groot aantal gemiddelde leerders. Vyf gemiddelde leerders met meestal gedeeltelik korrekte antwoorde (anders as die memorandum, maar gedeeltelik korrek) is as deelnemer B1 tot B5 benoem. Vyf leerders met wanbegrippe van terme, byvoorbeeld: die “gelykaanteken” beteken “hier kom die antwoord”, is as deelnemer C1 tot C5 benoem.

Al is daar slegs met die bogenoemde steekproef taakgebaseerde onderhoude gevoer, het die hele populasie van ongeveer 100 leerders dieselfde onderrig en intervensie ontvang. Deelnemers aan die studie was taamlik divers ten opsigte van ras, geslag en sosio-ekonomiese omstandighede. Sommige deelnemers het in die plaaslike informele nedersetting gewoon en ander deelnemers in die dorp. Vyf van die deelnemers het in die kinderskool gewoon, wat in tabel 3-2 geklassifiseer is as, dorp.

Tabel 3-2 Uiteensetting van deelnemer inligting

Deelnemer kode	Geslag	Ouderdom	Woongebied
A1	Vroulik	13 jaar	Dorp
A2	Vroulik	13 jaar	Dorp
A3	Manlik	13 jaar	Kleurling woongebied
A4	Manlik	14 jaar	Kleurling woongebied
A5	Manlik	13 jaar	Verhuis na 'n ander dorp (onttrek van die studie)
B1	Vroulik	13 jaar	Dorp
B2	Vroulik	13 jaar	Dorp
B3	Manlik	13 jaar	Dorp
B4	Manlik	13 jaar	Dorp
B5	Vroulik	12 jaar	Dorp
C1	Manlik	14 jaar	Dorp
C2	Vroulik	13 jaar	Informele nedersetting
C3	Vroulik	14 jaar	Dorp
C4	Vroulik		Dorp
C5	Manlik	14 jaar	Dorp

Hierdie diversiteit het data wat ingesamel is meer betroubaar gemaak, want 'n homogene steekproef plaas 'n beperking op navorsing. Wanneer data van leerders met dieselfde vermoëns gegenereer word, is die data nie so ryk en omvattend soos data vanuit 'n diverse steekproef nie (Lemmer, 2015:223).

3.9 Data-insamelingsmetodes

Kwalitatiewe navorsing bied 'n verskeidenheid data-insamelingsmetodes (Nieuwenhuis, 2020b:85). Die doel van data-insameling is om aan die hand van literatuur die navorsingsvrae te beantwoord. Data-insamelingsmetodes en -instrumente is aan die hand van die navorsingsvrae uiteengesit, soos gesien in tabel 3-2.

Tabel 3-3: Data-insamelingsmetodes en -instrumente

Navorsingsvraag: Watter riglyne kan gebied word vir graad 7 leerders se ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë?			
Sub-navorsingsvrae	Data-insamelingsmetode	Data-insamelingsinstrument	Wat behels die metode?
Hoe ontwikkel graad 7-leerders se algebraïese denke?	Vier dimensies vir die ontwikkeling van algebraïese denke geïdentifiseer (sien par.2.2.). 'n Algebrataak wat gebaseer is op vier dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke is gebruik om hierdie navorsingsvraag te beantwoord.	Waarnemings	Die navorser het leerders in die steekproef se gesprekke oor wiskunde take observeer.
		Algebratake	Leerders het 'n geskrewe taak om algebraïese denke te ondersoek, voltooi.
Watter metakognitiewe strategieë speel 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke?	Taakgebaseerde onderhoude is met deelnemers gevoer. 'n Metakognitiewe strategiewiel is ontwerp om te bepaal watter strategieë leerders gebruik.	Woordelys	Nadat die navorser die woorde van die woordelys aan deelnemers gelees het, het sy deelnemers versoek om te voorspel hoeveel woorde hulle korrek kan definieer.
		Waarnemings	Deelnemers is tydens algebralesse en take geobserveer om te bepaal watter metakognitiewe strategieë deelnemers gebruik.
		Taakgebaseerde onderhoude	Onderhoude is met die 14 deelnemers gevoer oor die algebratake en watter metakognitiewe strategieë leerders gebruik.
Wat is die rol van wiskundetaal in die leer van algebra in graad 7?	Waarnemings van klasgesprekke is genotuleer, met betrokke wiskundeterme en die gebruik daarvan.	Woordelys	Leerders het langs elke woord/konsep geskryf wat hulle van die woord verstaan. Al die leerders in die graad het die woordelys voltooi.

Die vier basiese data-insamelingsinstrumente was 'n woordelys (WL), algebratake (AT), waarneming van leerderaktiwiteite (WLA) en taakgebaseerde onderhoude (TGO). Die doel van OGN is om te beskryf, vergelyk, evalueer, verduidelik en adviseer (Bakker & van Eerde, 2015:431). Data-insamelingsinstrumente gaan deur siklusse van ontwerp, implementering, analisering en herontwerp vir die empiriese ondersoek (Gallagher & Fazio, 2019:29). Die eerste data-insamelingsinstrument was die woordelys.

3.9.1 Woordelys (WL)

Die doel van die eerste data-insamelingsinstrument was om graad 7-leerders se gebruik van wiskundetaal te ondersoek. Tydens die analiseringsiklus is daar bepaal watter wiskundeterme in graad 7 gebruik word. Die Suid-Afrikaanse kurrikulum (DvBO, 2011:8) verduidelik dat wiskunde 'n gespesialiseerde taal is wat syfers en simbole gebruik. Elke wiskunde-onderwerp in die kurrikulum beskik oor 'n stel vakgerigte terme, maar omdat algebra 'n nuwe onderwerp in graad 7 is, is dit die wiskunde-onderwyser se verantwoordelikheid om algebraterme (soos veranderlike en konstante) deeglik aan leerders te verduidelik. Tydens die COVID-19-pandemie het openbare skole in Suid-Afrika 'n hersiene kurrikulum, KABV 2021–2023, gevolg wat slegs 12 ure se algebra-onderdig in die graad 7-jaar voorskryf en daarom moet onderwysers volhou met korrekte algebrataal, selfs wanneer daar oor ander onderwerpe soos oppervlakte en volume gepraat word. 'n Woordelys is ontwerp as data-insamelingsinstrument om graad 7-leerders se wiskunde woordeskat te ondersoek.

Die woordelys was 'n tabel met twee kolomme, waar 'n wiskundeterm in die linkerkantste kolom gegee is en van leerders gevra is om 'n beskrywing of skets in die regterkantste kolom te gee. Die eerste groep terme in die WL het oor algebrataal gehandel, gevolg deur wiskundeterme in verband met bewerkings (som van, produk en verskil) en daarna algemene wiskundeterme.

Vir klaswerk is daar “pas kolom A by kolom B”-aktiwiteite en blokkiesraaisels ontwerp wat al die graad 7-leerders (die populasie) vir die aanleer van wiskundetaal voltooi het (sien Bylaag G). Dit was nie net die 15 deelnemers wat die woordelys voltooi het nie, maar al die leerders in die klas, omdat dit deel van die assesseringsplan vorm. Data wat uit die woordelyste verkry is, is dadelik gebruik om die praktyk te verbeter en intervensie te ontwikkel. Wiskunde-onderwysers aanvaar begrip van die meeste van die terme as vanselfsprekend, maar tydens die data-insameling- en ontledingsfase van die woordelys het baie wanbegrippe van wiskundetaal na vore gekom. Met die evaluering van die woordelys het die navorser gepoog om soveel wiskundeterme as moontlik te ondersoek om leerders se wiskundetaal te bevorder.

3.9.2 Algebralesse en waarnemings van leerderaktiwiteite (WLA)

Die tweede data-insamelingsinstrument is gebaseer op algebra-onderrig soos voorgeskryf in die KABV (DvBO, 2011:72). Waarneming van leerderaktiwiteite is gebruik om die ontwikkeling van algebraïese denke van graad 7-leerders in diepte te ondersoek om die hoofnavorsingsvraag te beantwoord. Beplanning is gedoen deur die literatuur te ondersoek. Algebraïese denke ontwikkel aan die hand van vier dimensies: algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, prosesse en redeneringsvorme (Chimoni *et al.*, 2018:58) (sien par. 2.2). Elk van die vier dimensies het subafdelings wat tydens lesse en waarnemings geïmplementeer is. In die literatuur is daar bepaal dat algemene inhoudsvelde (algemene algoritme, funksionele denke en modelleringstaal) reeds van vorige grade se kurrikulum deel was.

Algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme is die drie dimensies wat nuut is in graad 7, omdat graad 7 die inleiding tot algebra is. Om onderrig assessering te ontwerp en ontwikkel, is daar vier siklusse, naamlik beplanning, monitering, evaluering en refleksie nodig (Gallagher & Fazio, 2019:32). Algebralesse is volgens die gegewe kurrikulum (KABV) beplan. Wiskundetaal en algebraïese denke is met behulp van die algebralesse en waarneming-instrument ondersoek. 'n Waarnemingskodule is ontwerp as data-insamelingsinstrument om data tydens die lesse in te samel. Alle leerders het die onderrig ontvang en daarom was die hele populasie by hierdie klasgesprekke betrokke.

Twee van die dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke (algebraïese konsepte en algebraïese prosesse) kan nie soos ander onderwerpe in wiskunde deur 'n leerder ontdek word nie en wiskunde-onderwysers moet dit nie as vanselfsprekend aanvaar nie. Algebraïese konsepte en prosesse moet deeglik aan leerders verduidelik word. Tydens die lesse het die navorser metakognitiewe strategieë (beplanning, vrae vra, doelstelling, ken struikelblokke, ken wiskundewoorde, probleemoplossing, hardop dink, om 'n joernaal te hou, samewerking en modellering) met behulp van die metakognitiewe strategieswiel (sien figuur 3-5) aan leerders verduidelik. Die navorser het deelnemers geobserveer om vas te stel hoe en watter metakognitiewe strategieë die deelnemers gebruik het. Data wat tydens die lesse ingesamel is, is so gou moontlik ontleed om die volgende les te beplan.

Evaluering was nodig om te bepaal of die leerders gereed was vir skriftelike assessering. Aangesien die volgende data-insamelingsinstrument (algebratake) deel vorm van skoolassessering, het die navorser die bes moontlike resultate vir die leerders gegun en daarom kon daar nie te vroeg met die take begin word nie.

Nadat die WL voltooi is, het die navorser opgemerk dat daar 'n wanbegrip is oor die gelykaanteken. Die navorser het tydens die WLA doelbewus klasgesprekke gelei om oor die gelykaanteken te praat. Daar bestaan vele wanbegrippe oor die gelykaanteken onder graad 7-leerders. Die navorser het die gelykaanteken vir intervensiedoeleindes met 'n weegskaal vergelyk (Fyfe *et al.*, 2020:67).

3.9.3 Algebratake (AT)

Skriftelike algebratake vorm deel van die derde data-insamelingsmetode, wat gebruik is om die ontwikkeling van algebraïese denke te ondersoek. Die data-insamelingsinstrument is op grond van inligting uit die literatuurstudie ontwerp. Vier dimensies, naamlik algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme is uit die literatuur vir die ontwikkeling van algebraïese denke geïdentifiseer. Die algebratake is in vier afdelings ontwerp en elke afdeling het 'n dimensie ondersoek. Die eerste afdeling het die eerste dimensie, naamlik algemene inhoudsvelde, ondersoek. Vrae in die afdeling handel oor algemene algoritmes en funksionele denke. Algebraïese konsepte is in die tweede afdeling ondersoek, met die onderafdelings van gelykheid, eienskappe van getalle, eienskappe van bewerkings, onbekende waardes en simbole.

Algebraïese prosesse was die derde dimensie en vorm afdeling 3 van die taak. Waarneming, verbande tussen konsepte, voorstellings en toets vir geldigheid is die algebraïese prosesse wat in die taak ondersoek is. Afdeling 4 handel oor redeneringsvorme. Die algebrataak het ongeveer 'n uur tot 'n uur en 'n half geneem vir leerders om te voltooi. Al die leerders het die algebrataak in 'n wiskundeperiode voltooi omdat die taak deel van die assesseringplan gevorm het. 'n Memorandum vir nasiendoeleindes is in die data-ontleding ontwikkel.

Data is slegs vanuit die deelnemers wat toestemming verleen het, se take versamel. Evaluering is gedoen om te bepaal of daar 'n intervensie nodig was en in watter aspekte van algebra die intervensie nodig was.

3.9.4 Taakgebaseerde onderhoude (TGO)

Die vierde data-insamelingsinstrument was die taakgebaseerde onderhoude. Onderhoudsvrae is beplan om te bepaal watter metakognitiewe strategieë 'n rol in graad 7-leerders se ontwikkeling van algebraïese denke speel. Elke deelnemer se algebrataak is eers ondersoek om vas te stel watter dimensies deur die deelnemer bemeester is. 'n Metakognitiewe strategieswiel is aan die hand van die literatuur ontwikkel (Du Toit & Kotze, 2009:58) om tien metakognitiewe strategieë aan leerders te demonstreer. Hierdie wiel is twee gelamineerde dekadone wat met 'n splitpen

verbind is, met 'n opening om slegs een metakognitiewe strategie op 'n keer te vertoon (sien figuur 3-5).



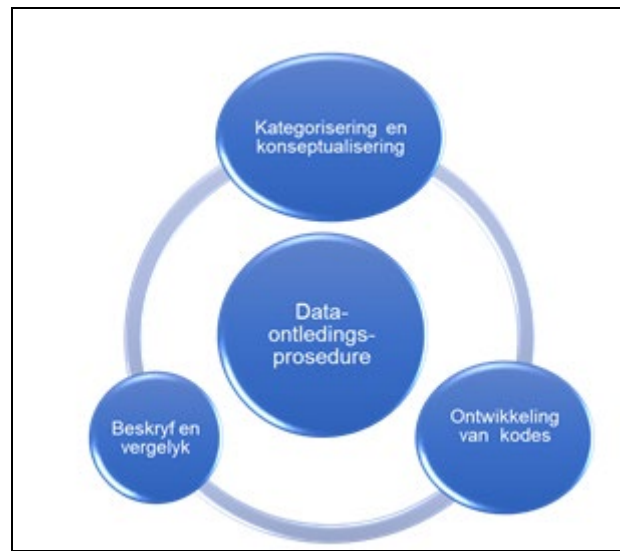
Figuur 3-5: Metakognitiewe strategiewiel (eie ontwerp)

Die metakognitiewe strategieë en die beskrywing van die strategieë op die wiel was in eenvoudige taal vir 'n graad 7-leerder om te verstaan. Slegs die 14 deelnemers was betrokke by die taakgebaseerde onderhoude, wat ongeveer 30 tot 45 minute geduur het. Semi-gestruktureerde onderhoudsvrae het hoofsaaklik oor die algebrataak en metakognitiewe strategieë gehandel en leerders kon met behulp van die metakognitiewe strategiewiel die vrae beantwoord. Die onderhoudsvrae is ook gevra terwyl die navorser noukeurig opgelet het na die wiskundetaal wat gebruik is. Onderhoude is vir data-ontledingsdoeleindes opgeneem. Onderhoude is so gou as moontlik getranskribeer sodat die navorser die betrokke deelnemer kon vra indien daar iets was waaroor die navorser nie duidelikheid gehad het oor wat die deelnemer bedoel nie. Wanbegrippe en foute in antwoorde van deelnemers is eers reggestel ná die taakgebaseerde onderhoude

ontleed is, om die mees akkurate data te ontgin. Tydens die evalueringsfase het die navorser bepaal of die metakognitiewe strategiewiel effektief is vir graad 7-leerders en of dit kan verbeter om in die toekoms in die praktyk te gebruik.

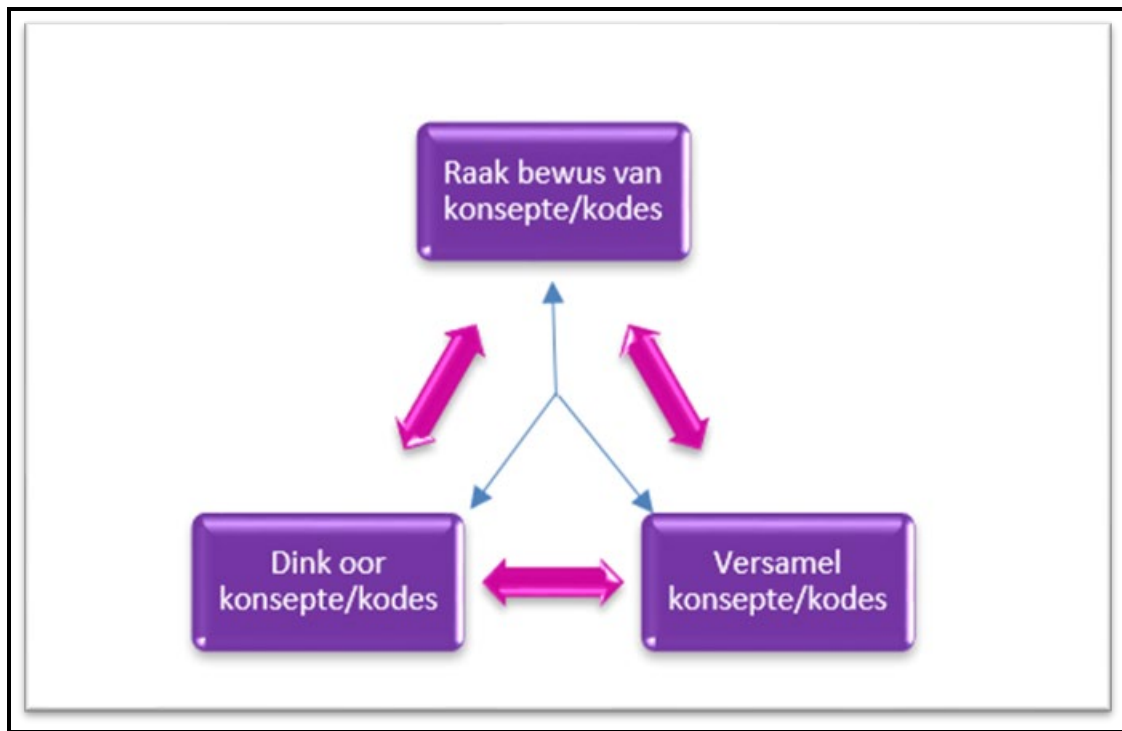
3.10 Data-ontleding

Nadat die data-insamelingsprosedure afgehandel is, is die data gekategoriseer en gekonseptualiseer, soos uitgebeeld in figuur 3-6.



Figuur 3-6: Kwalitatiewe navorsingsiklus: Data-ontledingsprosedure

Elke kwalitatiewe data-insamelingsinstrument het sy unieke data-ontledingsprosedure (Nieuwenhuis, 2020a:118). Data-analise is deel van die siklusse van OGN. Nieuwenhuis (2020a:124) beskryf data-ontleding in drie elemente: om na konsepte en kodes op te let, om konsepte en kodes te versamel en om oor konsepte en kodes te dink, soos voorgestel in figuur 3-7.



Figuur 3-7: Elemente wat nodig is vir data-ontleding (Nieuwenhuis, 2020a:124)

Die drie elemente volg 'n nielineêre proses, soos om die stukke van 'n legkaart saam te voeg (Nieuwenhuis, 2020a:124). Kodering is 'n proses om data sorgvuldig te transkribeer. Kodes is betekenisvolle eenheid/tema-name (Nieuwenhuis, 2020a:136). Kodes vir die vier hoofdata-insamelinginstrumente is WL vir woordelyste, WLA vir waarnemings van leerderaktiwiteite, AT vir algebratake en TGO vir taakgebaseerde onderhoude.

Die woordelyste (WL) wat leerders aanvanklik ingevul het, is met 'n memorandum nagesien om die deelnemers vir taakgebaseerde onderhoude te identifiseer. Deelnemerkodes (D-kode) is aan die linkerkant van die spreiblad opgeskryf en die wiskundetaal is boaan die spreiblad opgeskryf (soos in figuur 3-8) vir die data-ontledingsproses.

Wiskundewoorde volgens onderrigplan																								
D kode	Algebrataal	Konstante	Veranderlike	som van	verskil	Kwasiënt	produk	priemgetal	saamgestelde getal	veelvoude	faktore	stigend	dalend	gelyk aan	telgetal	inverse	HVDVOA	kommutatief	assosiatiewe eienskap	distributiewe eienskap	verhouding	koers	persentasie	
A1																								
A2																								
A3																								
A4																								
B1																								
B2																								
B3																								
B4																								
A5																								
C1																								
C2																								
C3																								
C4																								
C5																								

Figuur 3-8: Data-ontleding van woordelys (WL)

“D kode” in figuur 3-8, stel die deelnemer kode voor, byvoorbeeld A1, is die deelnemer wat die beste in die woordelys gevaar het. Daarna volg die terme wat omskryf is in die woordelys. Data wat deur middel van die klasgesprek-waarnemingskedule ingesamel is, is getranskribeer, op 'n *Excel*-spreiblad aangetoon en met die woordelyste vergelyk. Die navorser het 'n *Excel*-dokument verkies om data in kolomme met kleur te kodeer en te vergelyk. Nadat die woordelyste voltooi en ontleed is, is die tweede data-insamelingsinstrument, naamlik WLA, se data ontleed. Wiskundetaal wat in die waarnemingskedules voorkom, is met die wiskundetaal van die woordelyste vergelyk. Terme en die beskrywings wat leerders aan terme heg, is vergelyk. Die navorser het leerders deurlopend gekorrigeer om hulle wiskundetaal te verbeter. Leerders het indeksboekies gebruik om wiskundewoorde en -beskrywings aan te teken.

Algebraïese take (AT) (die derde data-insamelingsmetode) is aan die hand van die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke ontleed. Algebraïese take is ook met 'n memorandum nagesien voordat taakgebaseerde onderhoude met deelnemers gevoer is. Die volume van data mag dalk oorweldigend baie wees, maar om data sorgvuldig te sorteer, maak die ontleding meer sinvol en makliker (Nieuwenhuis, 2020a:135). Die algebraïese take se memorandum is in die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke verdeel, maar slegs die 14 deelnemers uit die betrokke skool se take is ontleed. Ander leerders se take is slegs nagesien en geen data is daaruit ontgin nie.

Tabel 3-4: Struktuur vir data-ontleding

Afdeling	Dimensie	Subafdelings	Subafdelings van vier dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke
1	Algemene inhoudsvelde	Algemene algoritmes	1a
		Funksionele denke	1b
2	Algebraïese konsepte	Gelykheid	2a
		Eienskappe van getalle	2b
		Eienskappe van bewerkings	2c
		Onbekende waarde/veranderlikes	2d
		Simbole	2e
3	Algebraïese prosesse	Waarneming	3a
		Veralgemening	3b
		Voorstellings	3c
		Toets of = waar is	3d
4	Redeneringsvorme	Abduktiewe redeneringsvorm	4a
		Induktiewe redeneringsvorm	4b
		Deduktiewe redeneringsvorm	4c

Die taakgebaseerde onderhoude (TGO) wat opgeneem is, is getranskribeer en in 'n *Word*-dokument opgeskryf. Dit was beter dat die navorser self data getranskribeer het om leidrade soos gesigsuitdrukkinge van deelnemers ook as data aan te teken (Nieuwenhuis, 2020a:135). Nadat die data getranskribeer is, het die navorser sorgvuldig deur die data gelees en toe die data in betekenisvolle eenhede van onderwerpe verdeel (Nieuwenhuis, 2020a:136). Vir die navorsingsmetode was die eenhede van onderwerpe metakognitiewe strategieë. Metakognitiewe strategieë soos aangeleer deur middel van die metakognitiewe strategiesiel het die opskrifte van die *Word*-dokument gevorm. Die tien metakognitiewe strategieë (soos bespreek in par. 2.3.1) wat as opskrifte vir die *Word*-dokument gebruik is, was beplanning, vra vrae, doelstellings, ken struikelblokke, ken wiskundewoorde, probleemoplossing, hardop dink, hou 'n joernaal, samewerking en modellering, soos in tabel 3-4.

Tabel 3-5: Kodering van tegnieke vir metakognitiewe strategieë

Metakognitiewe strategieë (MKS)	
MKS 1	Beplanning
MKS 2	Vra vrae
MKS 3	Doelstellings
MKS 4	Ken struikelblokke
MKS 5	Ken wiskundewoorde
MKS 6	Probleemoplossing
MKS 7	Hardop dink
MKS 8	Hou 'n joernaal
MKS 9	Samewerking
MKS 10	Modellering

Ten slotte is data met behulp van twee spreiblaaie en 'n *Word*-dokument ontleed. Een spreiblad is gebruik vir die wiskundetaal wat deur klasgesprek-waarnemings ingesamel is. 'n Tweede spreiblad is opgestel vir die vier dimensies in die ontwikkeling van algebraïese denke wat op die algebratake betrekking het. 'n *Word*-dokument is gebruik vir metakognitiewe strategieë wat tydens die taakgebaseerde onderhoude ingesamel is.

3.11 Die rol van die navorser

'n Kwalitatiewe navorser staan binne die veld van navorsing en in die deelnemers se leëwêreld (Creswell & Poth, 2016:18). Maree (2020:47) is van mening dat die hoofrol van die navorser is om 'n begrip te kry van die probleem om sodoende in staat te wees om die navorsingsvrae te beantwoord.

Verder moet 'n kwalitatiewe navorser sensitief wees teenoor deelnemers, maar terselfdertyd dieper in die fenomeen delf om antwoorde te kry. Die eerste rol van die navorser is om etiese klaring te kry om in die subjektiewe omgewing navorsing te doen. Etiese reëls moet dan deur die hele navorsingsproses gevolg word. Interpretatiewe navorsing verwag van die navorser om data op 'n wetenskaplike wyse in te samel, te interpreteer en gevolgtrekkings te maak (Creswell & Poth, 2016:248).

Voordat data ingesamel is, was dit die navorser se taak om artefakte, onderhoudsvrae en take te ontwerp en ontwikkel (Maree, 2020:47), wat fase 1 (analiseer en exploreer) en fase 2 (ontwerp en konstrueer) van OGN is. In die studie het die navorser woordelyste, algebralesse, algebratake, die metakognitiewe strategiesiel en onderhoudsvrae vir die data-insamelingsproses ontwikkel. Verder is dit die navorser se verantwoordelikheid om die bogenoemde data-insamelingsinstrumente te gebruik om data in te samel (Maree, 2020:47). Die navorser het self die algebralesse aangebied, deelnemers gefasiliteer wanneer hulle die algebrataak voltooi het en self die onderhoude met deelnemers gevoer. Daarna was dit die navorser se rol om data wat ingesamel is op 'n verantwoordelike wyse te sorteer, transkribeer en ontleed (soos bespreek in par. 3.10) (Maree, 2020:47), wat fase 3 (evalueer en reflekteer) en fase 4 (implementeer en versprei) van OGN is. Met ander woorde, die navorser se rol was om die vier fases van OGN uit te voer.

Die navorser het wiskunde by die betrokke skool onderrig en daarom het sy ook 'n rol as onderwyser. Metakognitiewe strategiese is nie deel van die kurrikulum nie en leerders kan dit nie self ontdek nie (Breed & Bailey, 2018:3). Daarom was dit die navorser se taak om metakognitiewe strategiese aan leerders te onderrig voordat die deelnemers gereed sou wees om onderhoude te voer. Die navorser het 'n verdere rol gehad om leerders met behulp van metakognitiewe strategiese in selfgereguleerde leerders te ontwikkel. "Onderwysers het 'n belangrike rol om te vervul ter ondersteuning van leerders om die toepaslike vaardighede vir SGL te kan aanleer" (du Toit-Brits, 2018:378).

In hierdie studie het die navorser 'n kritieke rol in die ontwikkeling van leerders se wiskundetaal gespeel. Korrekte verbale en geskrewe wiskundetaal moet deel vorm van daaglikse gesprekke tussen leerders en die onderwyser/navorser (Wilkinson, 2019:88). Om konsekwentheid te verseker, was ook 'n belangrike rol van die navorser.

3.12 Konsekwentheid

Terwyl betroubaarheid en geldigheid sleutelmaatstawwe is vir kwantitatiewe navorsing, is konsekwentheid van die uiterste belang vir kwalitatiewe navorsing (Nieuwenhuis, 2020a:143). Konsekwentheid in kwalitatiewe navorsing word gekoppel aan die paradigmatische begronding waarin die ondersoek gedoen word (Pedro & Van der Merwe, 2020:387). Konsekwentheid bestaan uit vier sleutelkomponente, naamlik geloofwaardigheid, oordraagbaarheid, betroubaarheid en bevestigbaarheid (Babbie & Mouton, 2001:276). Nieuwenhuis (2020a:144) meen dat indien die navorsingsmetodologie geskik is vir die studie, dit tot konsekwentheid bydra. OGN was die mees geskikte ontwerp vir die studie, soos bespreek in par. 3.3.

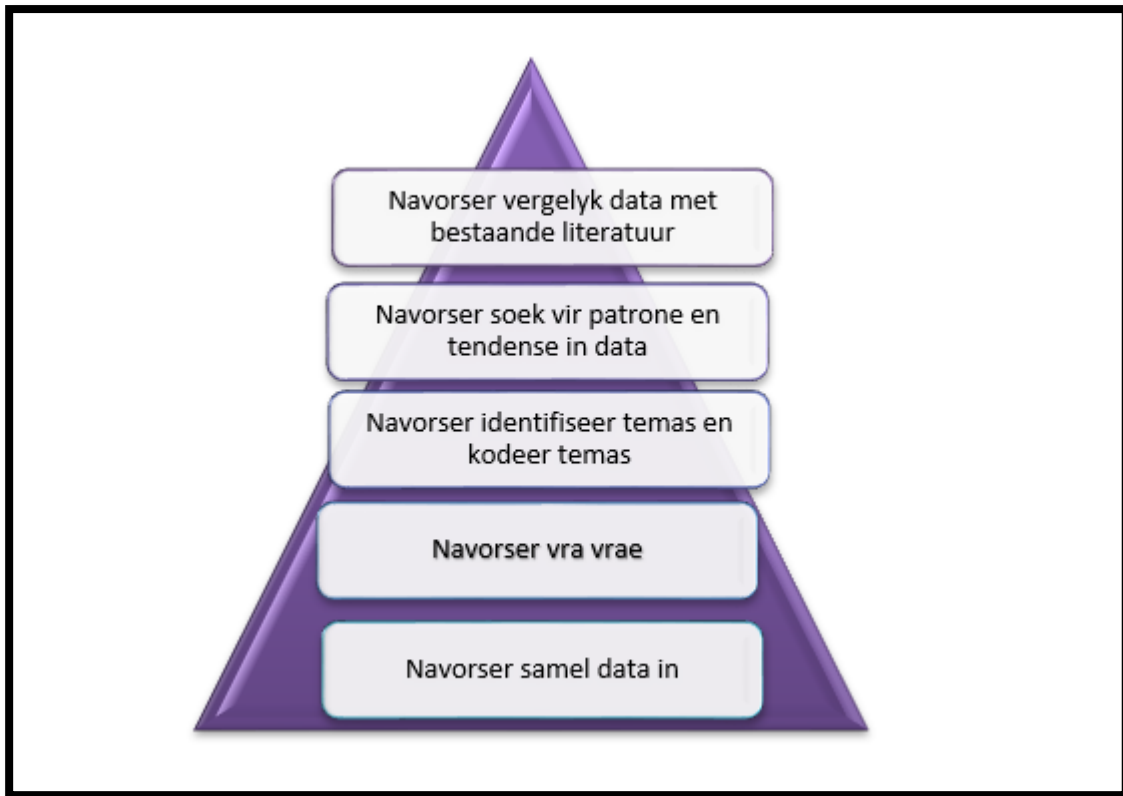
Nieuwenhuis (2020a:144) stel dit dat geloofwaardigheid van 'n studie handel oor hoe geloofwaardig die data ten opsigte van realiteit is. Geloofwaardigheid kan deur onder andere langdurige toegewydheid (om in die navorsingsveld te bly totdat daar 'n dataversadigingspunt bereik is), volgehoue waarneming en kristallisering verseker word (Babbie & Mouton, 2001:277). Die navorser se langdurige toegewydheid en volgehoue waarneming het daarin gelê dat sy in die navorsingsveld staan deur aan graad 7-leerders wiskunde te onderrig. Die geloofwaardigheid van die navorsing is deur die deursigtige optrede van die navorser verhoog. Die navorser was eerlik oor data wat ingesamel is en aksies met betrekking tot databestuur, -kodering en -ontleding is deur promotors gemonitor.

Oordraagbaarheid word deur twee strategieë verkry: dik beskrywings en doelgerigte steekproefnemings (Nieuwenhuis, 2020a:145). Dik beskrywings behels genoegsame detail in data om vir die leser 'n akkurate beeld van die konteks te skep. Doelgerigte steekproefnemings bied 'n maksimale reeks van inligting om data binne die konteks in te samel (Babbie & Mouton, 2001:277).

Betroubaarheid bied die sekerheid dat indien data in 'n soortgelyke konteks ingesamel word, die uitkomst min of meer dieselfde gaan wees (Babbie & Mouton, 2001:278). Betroubaarheid word gedemonstreer deur die navorsingsontwerp en die implementering daarvan (Nieuwenhuis, 2020a:145). In die studie is data in 'n outentieke leeromgewing ingesamel en die uitkoms daarvan is werkbaar in ander soortgelyke leeromgewings.

Bevestigbaarheid van data behels die deelnemers se interpretasies van taakgebaseerde onderhoudsvrae (Morris & Paris, 2021:2). Die deelnemers was minderjarig en daarom moes die navorser dadelik sekerheid kry oor antwoorde, wat ondersoeker-kristallisering is. Die navorser moes in die onderhoud vra: "verstaan ek reg?" en "verduidelik vir my wat bedoel jy met ..." om seker te wees van wat die deelnemer bedoel. Die navorser het deurgaans vrae aan deelnemers gevra om te verseker dat sy reg verstaan wat hulle bedoel. Temas in die data is geïdentifiseer (vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke en tien metakognitiewe strategieë), wat dan gebruik is vir die kodering om data te ontleed.

In 'n kwalitatiewe studie word die term kristallisering verkies bo die term trianguleer, want om die wêreld te ontdek, behels meer as net drie sye van 'n driehoek (Nieuwenhuis, 2020a:142). Kwalitatiewe navorsers wil 'n fenomeen verstaan eerder as om 'n vaste waarheid te ontdek (Nieuwenhuis, 2020a:142). Kristallisering is ook 'n metode om konsekwentheid van data te verseker. Kristallisering behels dat die navorser van verskeie bronne gebruik maak om bevindings te staaf (Stahl & King, 2020:26) – sien figuur 3-9.



Figuur 3-9: Oorsig van kristalliseringsproses (aangepas uit Maree, 2020:46)

Kristallisering het drie komponente, naamlik **data- kristallisering**, **ondersoeker- kristallisering** en **teoretiese- kristallisering** (Stahl & King, 2020:27). 'n Groot verskeidenheid data is met verskeie data-insamelingsmetodes ingesamel om **data- kristallisering** te verseker. In die studie is daar van woordelyste, waarnemings, algebratake en taakgebaseerde onderhoude gebruik gemaak om data in te samel. Wanneer twee of meer metodes van data-insameling gebruik word, word kristallisering verseker (Khalid *et al.*, 2020:4171). **Ondersoeker-kristallisering** verseker dat data geldig is deur van 'n navorsingspan gebruik te maak, asook van promotors wat oor die data-insamelings- en -ontledingproses toesig hou. Teoretiese-kristallisering behels dat bevindinge met bestaande literatuur vergelyk word (Stahl & King, 2020:27). Nadat die **data** ontleed is, is dit as finale stap van **kristallisering** met bestaande literatuur vergelyk.

3.13 Etiese aspekte

'n Belangrike etiese aspek wat die navorser in ag moes neem, is ingeligte toestemming (Khalid *et al.*, 2020:4171). Maree (2020:47) verduidelik dat weldaad, respek vir mense en geregtigheid die drie belangrikste etiese beginsels is wat elke navorser in gedagte moet hou.

Toestemming moes eers by alle betrokke partye verkry word voordat data ingesamel kon word (Maree, 2020:48). Toestemming vir data-insameling is by die toepaslike etiekkomitee van die fakulteit verkry. Deelnemers en hulle ouers is ingelig (deur 'n onafhanklike persoon wat nie by die navorsing betrokke was nie) oor wat die studie behels voordat daar toestemming verkry is. Deelnemers tussen die ouderdomme van 14 en 15 jaar het ingeligte instemming gegee indien hulle aan die studie wou deelneem (Maree, 2020:48). Deelnemers het ingeligte instemming aan die navorser gegee en elke deelnemer was bewus daarvan dat hulle mag onttrek indien hulle wou. Ingeligte toestemming is ook van die Noordwes Departement van Basiese Onderwys, ouers, die skoolhoof en die skool se beheerliggaam verkry. Deelnemers moes verseker word dat hulle identiteit beskerm sou bly. Data wat van deelnemers ingesamel is, is anoniem en vertroulik hanteer (Maree, 2020:48). Al ken die navorser die deelnemers goed omdat sy hulle onderrig het, is deelnemerkodes gebruik en nie die voorname van die deelnemers nie. Sodoende is deelnemers se identiteit beskerm en vertroulikheid gewaarborg. Deelnemers het verstaan dat hulle insette vrywillig is en dat hulle enige tyd kon onttrek as hulle dit sou verkies.

In die tyd van die COVID-19-pandemie was dit ook belangrik om alle COVID-19-protokolle te gehoorsaam. Die navorser het deelnemers se hande voor elke sessie gesaniteer. Sosiale afstand is ten alle tye gehandhaaf. Die navorser het haar masker aan gehou tydens die onderhoude, maar omdat die deelnemer meer as 1,5 meter van haar af gesit het, kon die deelnemers hulle maskers afhaal vir die klankopname.

Voorsorg is getref om die welstand van deelnemers te bevorder en geen skade te doen nie (Maree, 2020:48). Die navorser en deelnemers het die hoogste respek vir mekaar en geen data is op 'n oneerlike manier bekom nie.

3.14 Samevatting

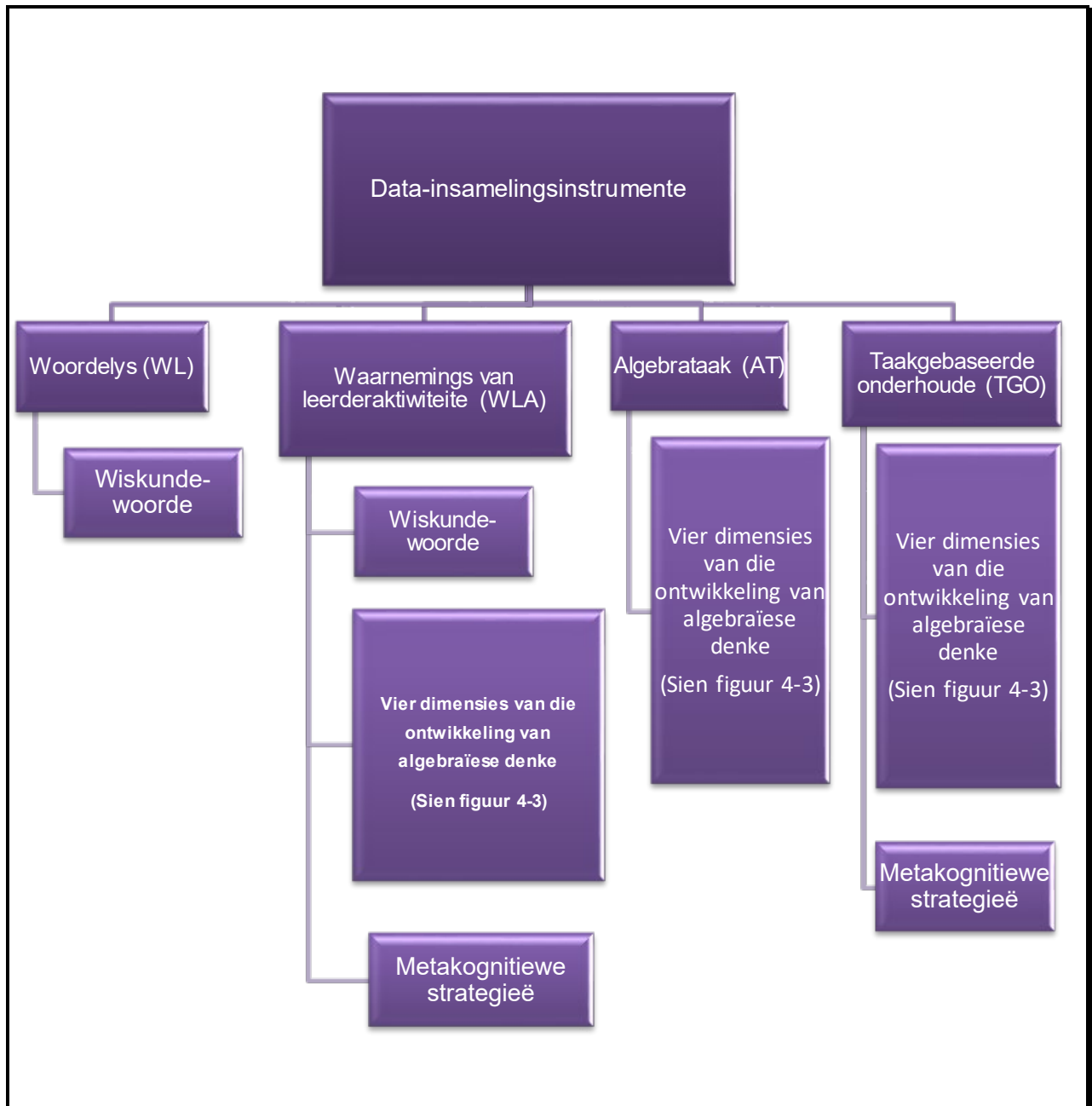
Hoofstuk 3 handel oor die navorsingsontwerp en benadering (kwalitatief). Interpretivisme as paradigma is bespreek. OGN was 'n geskikte navorsingsopwerp vir die studie, soos bespreek in paragraaf 3.3. Kenmerke en voordele van OGN, asook hoe dit toegepas word vir die ontwikkeling van algebraïese denke, is by die metodologie ingesluit. By die data-insamelingsafdeling is die populasie, steekproef en data-insamelingsmetodes bespreek. Data-ontleding-konsekwentheid en etiese aspekte vorm deel van die data-ontleding. Laastens is die rol van die navorser duidelik uiteengesit. In die volgende hoofstuk volg 'n bespreking van die wyse waarop data ontleed is en die resultate word aangebied en bespreek.

HOOFSTUK 4

AANBIEDING VAN RESULTATE

4.1 Inleiding

In die vorige hoofstuk (hoofstuk 3) is die navorsingsontwerp en -metodologie bespreek. OGN bestaan uit vier fases (analiseer en eksploreer, ontwerp en konstrueer, evalueer en reflekteer, implementeer en versprei) – sien figuur 3-2. In hierdie hoofstuk word die resultate volgens kodes aangebied, soos uiteengesit in figuur 4-1. Voordat data ingesamel word, is fase 2 (ontwerp en konstrueer) van toepassing. Tydens data-insameling is fase 3 (evalueer en reflekteer) van toepassing.



Figuur 4-1: Visuele uitbeelding van data-insamelingsinstrumente

OGN is 'n iteratiewe en datagedrewe proses om komplekse kwessies te hanteer (McKenney & Reeves, 2014:137). Die doel van die navorsing is om die volgende primêre navorsingsvraag te beantwoord: ***Watter riglyne kan gebied word vir graad 7 leerders se ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë?*** Verder wil die navorser ook die sekondêre vrae aanspreek, naamlik:

1. Wat is graad 7-leerders se ontwikkeling van algebraïese denke aan die hand van die vier dimensies van algebraïese denke?
2. Watter metakognitiewe strategieë speel 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke?
3. Wat is die rol van wiskundetaal in die leer van algebra in graad 7?

4.2 Data-ontleding

Alle data wat ingesamel is, het op die hoofnavorsingsvraag betrekking. Die woordelys (WL) is data wat gebruik is om te bepaal wat die rol van wiskundetaal in die leer van algebra in graad 7 is. Tydens die WLA het die navorser op wiskundetaal gefokus en hoe graad 7-leerders se algebraïese denke ontwikkel. Metakognitiewe strategieë is in al vier data-insamelingsinstrumente ondersoek. Die algebrataak (AT) is in vier afdelings verdeel om die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke te ondersoek. Taakgebaseerde onderhoude (TGO) is gevoer om data wat ingesamel is, te bevestig deur 'n gesprek met deelnemers oor die voltooide AT te voer.

Om data gereed te kry vir die data-ontledingsproses is 'n belangrike stap in kwalitatiewe navorsing (Nieuwenhuis, 2020a:134). Data-ontleding vorm deel van die derde fase, die evalueringsfase, van OGN (McKenney & Brand-Gruwel, 2018:8), soos bespreek in paragraaf 3.5.3. In hierdie navorsing was die eerste fase van data-insameling die woordelys.

4.2.1 Woordelys

Die doel van die woordelys was om die wiskundetaal wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke te ondersoek. Die woordelyste is deur al die graad 7-leerders voltooi om die 15 deelnemers te identifiseer en slegs die 15 deelnemers se woordelyste is as data vir die navorsing gebruik. Met die aanvang van die data-insameling is 15 deelnemers geïdentifiseer aan die hand van die resultate in die wiskundewoordelys behaal. Vyf deelnemers met sterk wiskundetaal is gekies (deelnemer A1 tot A5, wat die algemene wiskundetaal korrek beskryf het, het tussen 13 tot 15 uit 17 woorde korrek beskryf). Vyf met gemiddelde wiskundetaal (deelnemer B1 tot B5) en vyf deelnemers met swak wiskundetaal (deelnemer C1 tot C5, wat min tot geen wiskundeterme korrek beskryf het nie) is gekies. Een deelnemer het die skool verlaat en die navorser het met 14 deelnemers voortgegaan. Die 14 woordelyste is deur middel van inhoudsanalise ontleed. Inhoudsanalise word gedefinieer as 'n sistematiese, herhaalbare tegniek om baie woorde in kategorieë te kompakteer (Nieuwenhuis, 2020a:126). Wiskundeterme wat leerders nodig het vir die ontwikkeling van algebraïese denke is in die linkerkantste kolom gelys

en leerders moes dan in die regterkantste kolom 'n beskrywing van die woord skryf. Vele wanbegrippe van wiskundetaal het na vore gekom, soos uitgebeeld in tabel 4-1.

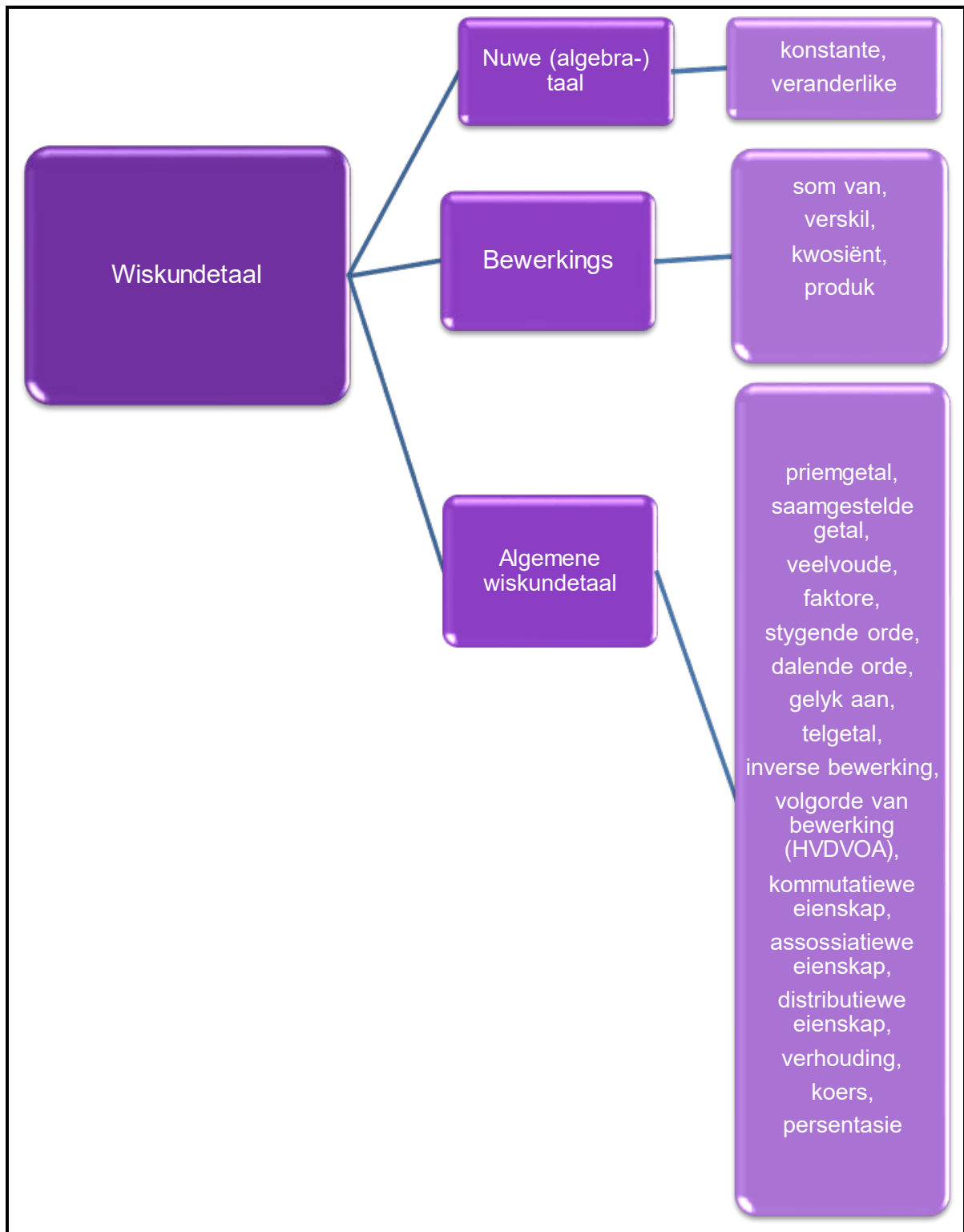
Tabel 4-1: Ontleding van data van woordelys

Wiskundeterme wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke																								
Deelnemer-kode	Algebrataal	Konstante	Veranderlike	Som van	Verskil	Kwosiënt	Produk	Priemgetal	Saamgestelde getal	veelvoude	Faktore	Stygend	Dalend	Gelyk aan	Telgetal	Inverse bewerking	Volgorde van bewerking hakies, van, deel	Vermenigvuldig	Kommutatief	Assosiatiewe eienskap	Distributiewe eienskap	Verhouding	Koers	Persentasie
A1																								
A2																								
A3																								
A4																								
B1																								
B2																								
B3																								
B4																								
B5																								
C1																								
C2																								
C3																								
C4																								
C5																								
Korrekte beskrywing	4	5	2	11	7	5	8	4	3	7	2	10	10	1	8	2	6	5	2	0	6	4	6	6
Gedeeltelik korrekte beskrywing	5	1	3	0	0	2	0	2	1	2	2	0	0	5	5	4	2	2	5	6	2	1	0	0
Verkeerde beskrywing	3	7	8	3	7	5	6	8	10	4	9	4	4	8	1	6	6	6	6	4	6	8	8	8
Geen beskrywing	2	1	1	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2	0	1	0	4	0	1	0	0

4.2.1.1 Woordontleding

Die navorser het algebrataal aan die begin van die jaar onderrig omdat algebrataal die onderrig van eienskappe van bewerkings vergemaklik. Eienskappe van bewerkings soos kommutatiewe, assosiatiewe en distributiewe eienskappe is vir leerders meer verstaanbaar as veranderlikes soos: $a \times b = b \times a$ gebruik word.

In bogenoemde algebra-taalles het die navorser begin en nuwe woorde soos veranderlike en konstante verduidelik. Daarna is terme rakende bewerkings (som van, verskil, kwosiënt en produk) hersien. Priemgetalle, saamgestelde getalle, veelvoude en faktore en eienskappe van getalle is van die eerste onderwerpe in die graad 7-kurrikulum, met ander woorde die terme moet reeds aan graad 7-leerders bekend wees. Die oorblywende terme is algemene wiskundetaal wat leerders so vroeg soos die Grondslagfase al van weet (maar nie noodwendig ken nie, soos gelyk aan). Sien figuur 4-2.



Figuur 4-2: Verdeling van woordelys

Slegs 4 uit 14 deelnemers was wel in staat om **algebrataal** korrek te verwoord, maar 8 uit 14 van die deelnemers het konstante en veranderlike verkeerd beskryf. Die implikasie hiervan is dat wiskunde-onderwysers die terme gebruik om algebra te verduidelik, maar die leerders verstaan nie die wiskundetaal nie. Die gevolg is dat die leerders nie-korrekte terme soos “lettertjie” in plaas van “veranderlike” gebruik. Nie-korrekte wiskundetaal rem die ontwikkeling van algebraïese denke.

Wiskundeterme in verband met bewerkings is nie nuut in graad 7 nie, maar daar is steeds leerders wat die terme verkeerd beskryf. Wanneer ’n onderwyser instruksies (verbaal en skriftelik) gee, voer leerders die opdrag verkeerd uit indien hulle nie die regte bewerking gebruik nie. **Som van, verskil** en **produk** is terme wat van die Grondslagfase af gebruik word en tog is daar deelnemers wat nie geweet het watter bewerking daarby pas nie. Vyf uit 14 leerders het geweet hierdie terme hou verband met ’n bewerking, maar verwar “som van” en “verskil” en ruil die betekenisse om. Die beskrywing vir **kwosiënt** in die leerders se voorgeskrewe handboek is “’n antwoord op ’n deelsom”. Vyf deelnemers het bogenoemde beskrywing verskaf.

Algemene wiskundetaal speel ook ’n rol in die ontwikkeling van algebraïese denke. **Priemgetal** en **saamgestelde getal** is veral in meer gevorderde algebra belangrik. 6 Van die 14 deelnemers het ’n idee gehad wat **veelvoude** en **faktore** beteken, maar sommige deelnemers het die twee terme se beskrywings omgeruil. Tien uit 14 deelnemers het **stygend** beskryf as: “rangskik getalle van klein na groot” of “van min tot baie”, terwyl **dalend** net die teenoorgestelde is.

Die betekenis van die **gelykaanteken** speel ’n kritieke rol in alle vlakke van wiskunde, veral vir die ontwikkeling van algebraïese denke en tog het soveel mense (kinders en volwassenes) ’n wanbegrip van die konsep (Fyfe *et al.*, 2020:65). Slegs een deelnemer het die term **gelykaan** korrek beskryf. Verkeerde beskrywings sluit in: “die antwoord van die som”, “die antwoord na die som” en “hier kom die antwoord”. ’n Gedeeltelik korrekte beskrywing is: “dieselfde” en die korrekte beskrywing is: “die waarde aan die linkerkant van die = is dieselfde as die waarde aan die regterkant van die =”.

Indien ’n deelnemer **telgetalle** numeries uitgebeeld het (0, 1, 2, 3, 4, ...), het die navorser dit reg gemerk, want geen deelnemer het telgetalle korrek verwoord nie. ’n Korrekte beskrywing is “’n getalreeks wat by nul begin, maar breuke, desimale getalle en heelgetalle uitsluit”. **Inverse bewerking** is nodig wanneer die isolasiemetode gedoen word om onbekende waardes in ’n vergelyking te bepaal. Slegs twee deelnemers kon die wiskundeterm inverse bewerking korrek verwoord. ’n Gedeeltelik korrekte beskrywing deur deelnemers bestaan uit simbole “ $+\rightarrow -$ ”. Indien

die pyltjie na albei kante gewys het, sou die navorser dit as korrek gemerk het. Een van die verkeerde beskrywings vir inverse is “oneindig”, heel waarskynlik omdat inverse vir die deelnemer soos “infinity” klink. Ander verkeerde antwoorde sluit in: “n som met baie hakies”, “as jy getalle bytel” en “om ’n verskil te maak”.

Deelnemers met beter wiskundetaal het geweet waarvoor die akroniem vir **volgorde van bewerking** (HVDVOA) staan en hoe om dit toe te pas. Vyf uit 14 deelnemers het die Engelse akroniem (BODMAS) bo die Afrikaanse akroniem verkies. Deelnemer B3 het wel die akroniem geken, maar het foute gemaak toe die volgorde van bewerking toegepas moes word, terwyl die teenoorgestelde waar was vir die term **kommutatiewe eienskap**. Deelnemers het die kommutatiewe eienskap verstaan wanneer probleme opgelos word, maar hulle het gesukkel om dit te verwoord. Graad 7-leerders wat weet $7 \times 2 = 2 \times 7$ en $14 \div 2 \neq 2 \div 14$, beskryf die kommutatiewe eienskap as “getalle kan omruil vir plus en maal, maar nie vir minus en deel nie”.

Deelnemers wat **assosiatiewe eienskap** korrek beskryf het, het ’n voorbeeld gegee: “ $(5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3)$ is $7 + 3 = 5 + 5 = 10$ ”. Geen deelnemer kon assosiatiewe eienskap korrek definieer nie. Leerders vind die assosiatiewe eienskap uitdagend wanneer probleme opgelos moet word. Deelnemers het verwag dat distributiewe eienskappe verband hou met aftrekking en deling, want kommutatiewe en assosiatiewe eienskappe is van toepassing op optelling en vermenigvuldiging. Sommige deelnemers het gevra: “moet dit nie nou die teenoorgestelde van plus en maal wees nie?”.

Verhouding word beskryf as: “die vergelyking van twee getalle deur deling te gebruik”. Indien ’n deelnemer ’n voorbeeld van ’n verhouding, byvoorbeeld 1:4, gegee het, het die navorser dit as gedeeltelik korrek gemerk. ’n Ander voorbeeld van ’n gedeeltelik korrekte antwoord was: “die hoeveelheid mense teenoor diere”. Deelnemer A4 se gedeeltelik korrekte antwoord het die proses van vereenvoudiging beskryf: “deel al twee getalle met dieselfde getal om dit in sy kleinste vorm te kry”. Deelnemer B4 se verkeerde antwoord was slegs ’n “÷” simbool. In drie van die ander verkeerde beskrywings van verhouding het die deelnemers verhouding met menslike verhoudings verwar: “verhouding tussen ’n seun en ’n meisie”. Agt uit 14 deelnemers het die term **koers** met die woordjie “per” assosieer, byvoorbeeld R10 per liter. Langs koers het deelnemer B3 ’n beskrywing van kapasiteit geskryf: “die hoeveelheid wat iets kan vat”. Die deelnemer het koers en kapasiteit met brandstof assosieer, want hy het die koers met byvoorbeeld R15 per liter vir petrol en die kapasiteit van ’n petroltenk is byvoorbeeld 50 liter assosieer.

Deelnemers het die term **persentasie** óf korrek óf verkeerd beskryf (daar was geen gedeeltelik korrekte antwoorde nie). Indien die deelnemer geskryf het: “hoeveelheid uit 100” of “n breuk met 100 as noemer”, dan het die navorser dit as korrek gemerk. Indien deelnemers slegs ’n “%”-simbool geskryf het, het die navorser dit as verkeerd gemerk, want die term persentasie kom al in die graad 4-Wiskundekurrikulum voor. “n % wat jy vir ’n toets kry” is ook verkeerd gemerk. Deelnemer B3 se verkeerde antwoord was: “die hoeveelheid uit iets” in plaas van “die hoeveelheid uit 100”. Agt uit 14 het persentasie met uitslae van assessering assosieer – “hoeveel ek kry in ’n toets”.

4.2.1.2 Woordelyssamevatting

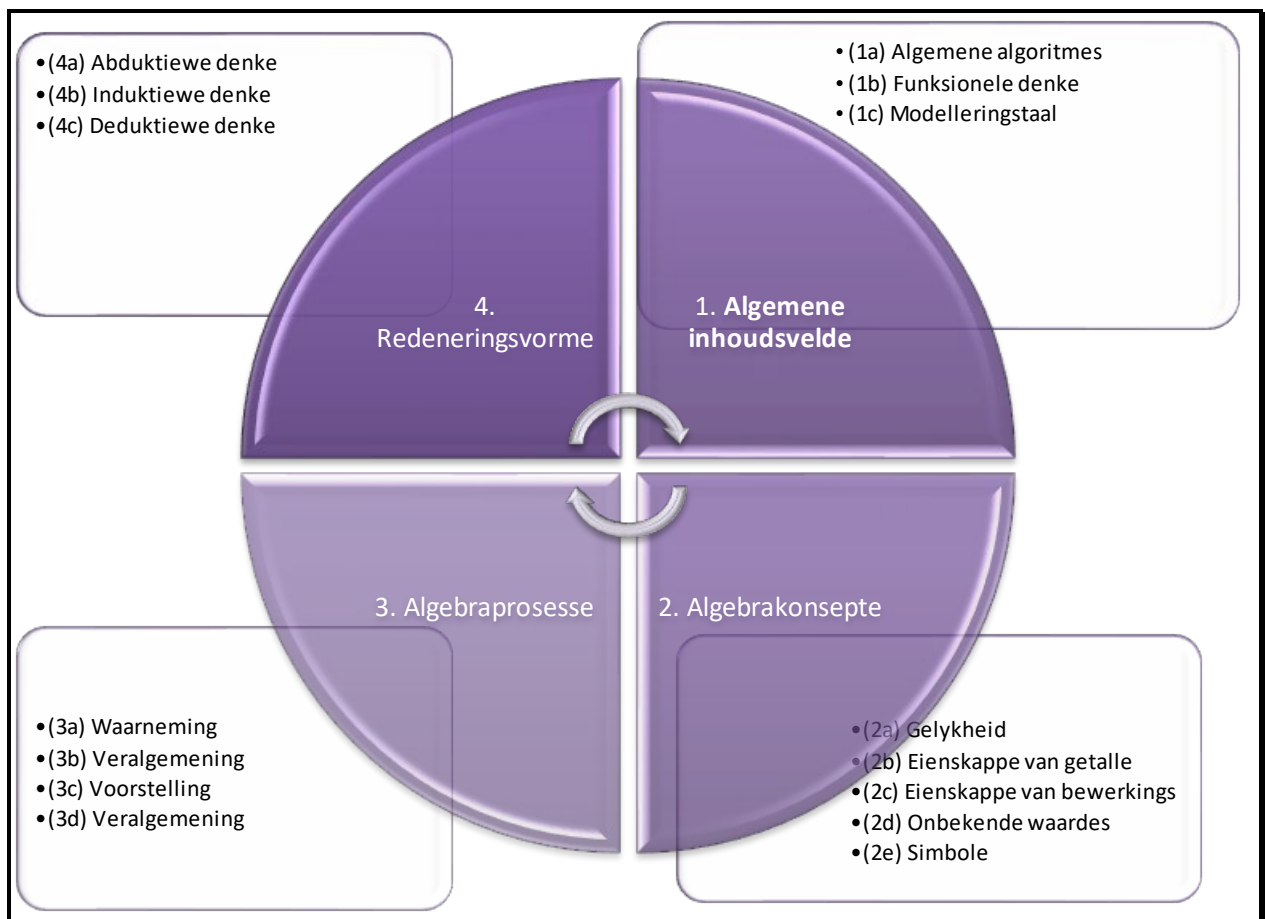
Die wiskundetaal wat graad 7-leerders nodig het om algebraïese denke te ontwikkel, bly vir hulle ’n uitdaging. Agt van die 14 deelnemers assosieer “gelyk aan” met die antwoord van ’n bewerking. Na afloop van die voltooiing van die woordelys het die navorser verdere waarnemings gedoen om intervensie te beplan om die wanbegrip van “gelyk aan” te hanteer. Deelnemers A1 en A2 het goed gevaar in die algebrataal-afdeling van die WL. Deelnemers A1–A4 het baie goed gevaar in die algemene wiskundetaal-afdeling. Die gemiddelde deelnemers (B1-B5) het goed gevaar in die algemene wiskundetaal-afdeling, maar het swak gevaar in die algebrataal-afdeling.

4.2.2 Waarnemings van leerderaktiwiteite (WLA)

Data wat gegenereer is uit waarnemings van leerderaktiwiteite is met behulp van gespreksanalise geanaliseer. Gespreksanalise is ’n data-analiseringsmetode wat gesprekke in ’n bepaalde sosiale omgewing (die klassituasie) ondersoek (Nieuwenhuis, 2020a:127). Natuurlike gesprekke oor algebra is tussen die navorser/onderwyser en leerders gevoer. Die doel van die gespreksanalise is tweeledig: eerstens is daar op wiskundetaal gefokus en tweedens is die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke en metakognitiewe strategieë ondersoek.

Die navorser het die wiskundetaal tydens waarnemings van leerderaktiwiteite ondersoek en so vinnig moontlik terme wat verkeerd gebruik is, reggestel. Vir navorsingsdoeleindes het die navorser die eerste week van die graad 7-jaar aan algebrataal spandeer, sodat leerders konsepte soos die eienskappe van bewerkings (kommutatiewe, assosiatiewe en distributiewe eienskappe) beter kon verstaan. In vorige jare het die navorser die kurrikulum slaafs nagevolg en in die eerste kwartaal die eienskappe van bewerkings onderrig en eers in die derde kwartaal algebrataal onderrig. Die meeste leerders kon nie die eienskappe van bewerkings skriftelik in die woordelys (WL) beskryf nie, maar kon eienskappe van bewerkings verbaal tydens die WLA verwoord. Daarom is dit nodig om wiskundetaal verbaal en skriftelik met leerders te kommunikeer sodat

algebraïese denke kan ontwikkel. Figuur 4-3 illustreer hoe die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke in die WLA geobserveer is.



Figuur 4-3: Vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke

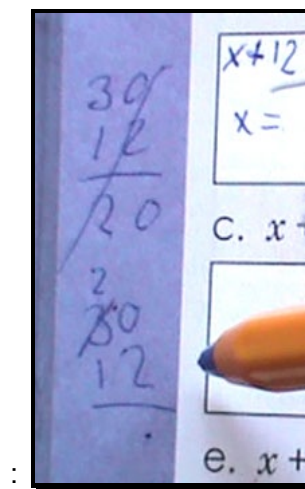
4.2.2.1 Algemene inhoudsvelde

Algemene algoritmes en funksionele denke (sien figuur 2-2) is die mees basiese vaardighede wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is (Chimoni *et al.*, 2018:59). Deelnemer C3 het gepraat van “gaan leen” wanneer sy ’n aftreksom doen. Met ander woorde: die deelnemer se eerste dimensie van algebraïese denke (algemene inhoudsvelde) is nog nie ontwikkel nie. Toe die navorser haar gevra wat dit beteken as ’n vergelyking waar is, het sy gesê: “dit beteken dis sharp”.

Die meeste deelnemers het “gelyk aan” as “hier kom die antwoord” verwoord. Die navorser het ’n les aan gelykheid gewy, met ’n weegskaal as voorbeeld, sodat leerders kon verstaan dat die waarde aan beide kante van die gelykaanteken dieselfde is. Hierdie intervensie was vir die meeste deelnemers suksesvol, want die meeste deelnemers kon “is gelyk aan” reg verwoord.

In die ontleding van die data is daar by deelnemers A1–A5 ’n moontlike verband tussen sterk wiskundetaal en wiskundige vaardighede waargeneem.

Daar is ook gevind dat deelnemers met swak wiskundetaal met die ontwikkeling van algebraïese denke sukkel. Deelnemer C3 was nie in staat om ’n eenvoudige aftreksom, soos in figuur 4-4, te doen nie.



Figuur 4-4: Deelnemer C3 sukkel met eenvoudige aftreksom

Eers het sy gesê: “nul minus twee is nul” en toe die navorser vra of sy seker is dit reg, het sy gesê “nee, Juffrou ek moet gaan leen”. Sy trek toe die eerste som dood en probeer weer, maar het weer vasgehaak. In figuur 4-5 het die navorser vir haar aftrekking met behulp van plekwaarde verduidelik.

$$\begin{array}{r} \text{TE} \\ 240 \\ - 12 \\ \hline 228 \end{array}$$

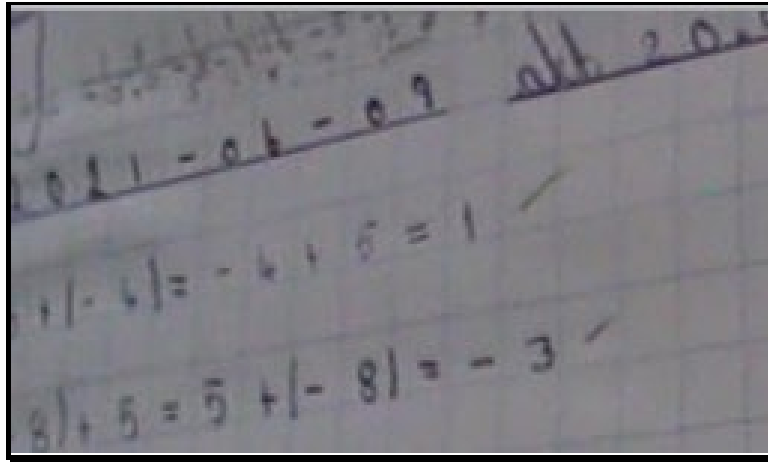
Figuur 4-5: Deelnemer C3 se tweede poging

Deelnemer C3 het weer probeer om die bewerking te doen. Nadat sy hergroepeer het, sê sy: “tien minus twee is agt”, maar daarna het sy weer die agt en die twee bymekaar getel en “10” voor die agt geskryf. In figuur 4-6 het deelnemer C3 haar vingers vir eenvoudige berekeninge gebruik.



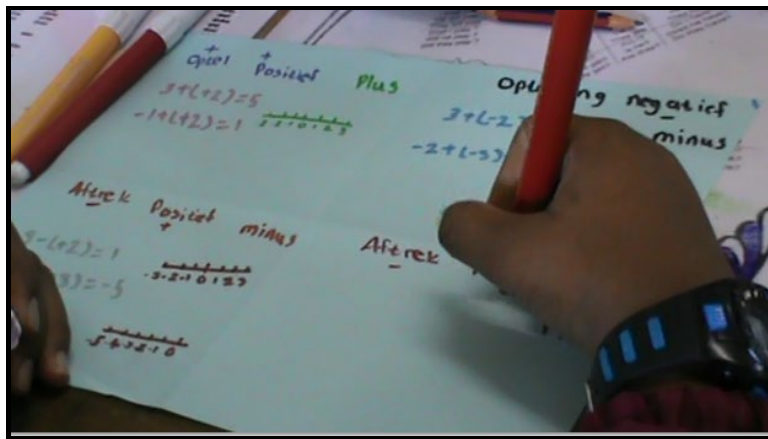
Figuur 4-6: Deelnemer C3 tel op haar vingers

Heelgetalle word vir die eerste keer in die graad 7-kurrikulum behandel. Heelgetalle (wat 'n nuwe onderwerp is) word kort voor algebraïese vergelykings in die graad 7-kurrikulum onderrig. Deelnemers wat bewerkinge met heelgetalle op 'n getallelyn modelleer, gaan gemakliker om met algemene inhoudsvelde.



Figuur 4-7: Deelnemer B5 teken 'n getallelyn bo haar berekening

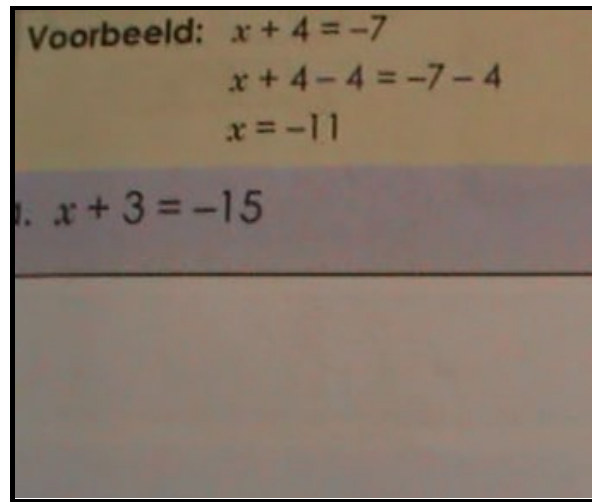
Deelnemer B5 het vinnig met potlood 'n getallelyn bokant haar berekeninge geteken om haar met hoofrekene te help. Tydens die les oor heelgetalle het leerders 'n A4-papier in kwarte gevou om die vier moontlikhede op te som, soos in figuur 4-8.



Figuur 4-8: Opsomming van bewerkinge met heelgetalle

In die opsomming het leerders die vier moontlikhede beskryf om heelgetalle te bereken, soos gesien in figuur 4-8. Die eerste moontlikheid is om positiewe getalle op te tel en die tweede moontlikheid is om positiewe getalle af te trek (met ander woorde: dit is dieselfde as berekening met telgetalle). Die derde moontlikheid is om negatiewe getalle op te tel en die vierde moontlikheid is om negatiewe getalle af te trek. Leerders is bewus gemaak van die betekenis van die "-".

simbool (dat dit aftrekking of 'n negatiewe getal kan beteken). 'n Wanbegrip wat tydens WLA ontdek is, is dat deelnemers C2, C3, C4 en C5 gesê het “'n mens kan nie die kleiner getal van die groter getal aftrek nie”. Wanneer die navorser gevra het: “hoekom kan 'n mens nie die groter getal van die kleiner getal aftrek nie?”, het C5 geantwoord “want my graad 2-juffrou het altyd so gesê”.



Voorbeeld: $x + 4 = -7$
 $x + 4 - 4 = -7 - 4$
 $x = -11$

1. $x + 3 = -15$

Figuur 4-9: Algebraïese vergelykings met heelgetalle

Heelgetalle en algebraïese vergelykings is albei nuwe onderwerpe in die graad 7-kurrikulum en die meeste leerders het die twee onderwerpe afsonderlik bemeester, maar nie 'n kombinasie van die twee nie. Figuur 4-9 is 'n voorbeeld van 'n oefening met heelgetalle. Die meeste deelnemers was nie in staat om 'n algebraïese vergelyking (figuur 4-10) met heelgetalle op te los nie, soos bewys met algebratake.

Bepaal die waarde van t wat die vergelyking $28 - t = 82$ waar maak, deur van die probeer-en-verbetermetode gebruik te maak.

	Vergelyking	Waar/Vals
	$28 - (+50) = 28 + 50$	Wak
	$28 - (+30) = 82 + 30 =$	Vals
	$28 - (+60) = 82 + 60 =$	Vals
	$28 - (+10) = 28 + 10 =$	Vals
	$28 - (+54) = 28 + 54 =$	Waar
	$28 - (+42) = 28 + 42 =$	Vals

Oplossing: 54 ~~X~~

Figuur 4-10: Foutiewe oplossing van probleem met heelgetalle

In hierdie data is daar 'n duidelike verband tussen algemene inhoudsvelde en die ontwikkeling van algebraïese denke, want leerders wie se algemene algoritmes en funksionele denke nie ontwikkel is nie, se algebraïese denke ontwikkel stadiger, soos bespreek in paragraaf 2.2.1.

4.2.2.2 Algebraïese konsepte

Algebraïese konsepte verwys na gelykheid, eienskappe van getalle, eienskappe van bewerkings, onbekende waarde en simbole (Chimoni *et al.*, 2018:59), soos bespreek in paragraaf 2.2.2. Die konsep van gelykheid (of *gelyk aan* soos dit in die graad 7-klas genoem word) het 'n groot rol in die navorsing gespeel. Aanvanklik het alle leerders (deelnemers en nie-deelnemer) gedink die gelykaanteken beteken "hier kom die antwoord", soos bespreek in die WL. Hierdie wanbegrip beïnvloed die ontwikkeling van algebraïese denke, want leerders kan 'n veranderlike oplos indien dit aan die linkerkant van die gelykaanteken staan, byvoorbeeld $x = 3$, maar as die veranderlike aan die regterkant van die gelykaanteken staan, byvoorbeeld $3 = x$, dan dink leerders die oplossing is verkeerd (sien figuur 4-11).

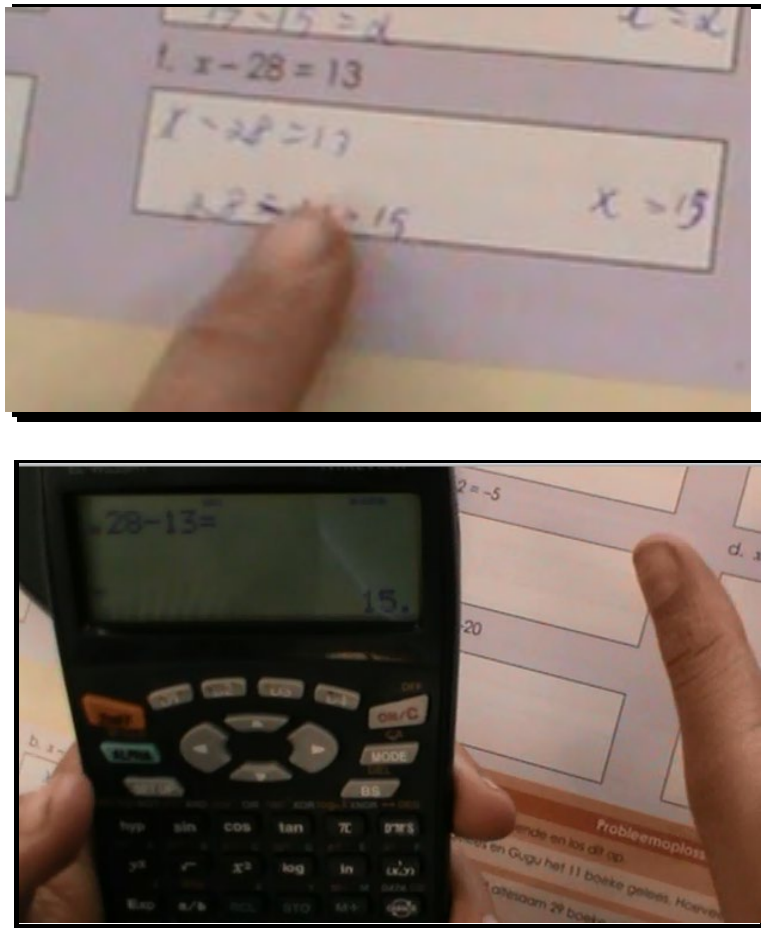
$$\begin{array}{l} \text{c. } x - 15 = 12 \\ x - 15 + 15 = 12 + 15 \\ x = 27 \end{array}$$

Figuur 4-11: Voorbeeld van vergelyking met veranderlike aan die linkerkant

Nadat die navorser die wanbegrip van gelykheid geïdentifiseer het, het sy 'n intervensie gedoen om die probleem te hanteer. Leerders met 'n goeie algemene wiskundetaal kon verstaan wat die betekenis van die gelykaanteken is, maar die deelnemers met swak wiskundetaal het nog steeds gesê: “hier kom die antwoord”, selfs ook in die taakgebaseerde onderhoude.

Sommige eienskappe van getalle, soos eienskappe van 0 en 1, word reeds in vorige jare onderrig. Heelgetalle is 'n nuwe konsep vir graad 7-leerders. Die navorser het verduidelik dat die minusteken 'n werkwoord (bewerking) kan wees, maar minus kan ook beteken dat die betrokke getal negatief is (of links van nul op die getallelyn lê). Tydens die WLA het deelnemers hierdie konsep korrek verwoord. Daar was deelnemers wat die terme heelgetalle en telgetalle omgeruil het, omdat telgetalle in Engels “whole numbers” en heelgetalle “integers” is.

Deelnemers was in staat om die eienskappe van bewerkinge toe te pas, maar die terminologie soos kommutatief, assosiatief en distributief is nie altyd gebruik nie. Tydens die WLA is die konsep van inverse ook in die klas bespreek, maar deelnemers het van die “teenoorgestelde” gepraat, byvoorbeeld, die teenoorgestelde van plus is minus. Deelnemer C5 se konsep van bewerking was nog nie voldoende ontwikkel nie en daarom was algebra vir hom 'n uitdaging. Deelnemer C5 was oortuig dat die waarde van $x = 15$ in die vergelyking $x - 28 = 13$, want hy het dit met sy sakrekenaar getoets, soos uitgebeeld in figuur 4-12.



Figuur 4-12: Deelnemer C5 se konsep van bewerking

Die navorser het vir die leerder gevra: “moet ’n mens altyd die grootste getal eerste sit as jy minus?”. Die deelnemer het geantwoord: “ja, ’n mens kan mos nie ’n groot getal van ’n kleiner getal aftrek nie”. Hierdie wanbegrip was te sterk gevestig en die navorser se intervensie in dié geval was onsuksesvol. Deelnemers wie se wiskundetaal beter ontwikkel was, het nie die wanbegrip gehad dat die grootste waarde in ’n aftreksom eerste moet staan nie.

Die konsep van onbekende waardes het tydens klasgesprekke goed ontwikkel. Die navorser het tot die besef gekom dat daar genoeg geleentheid vir inoefening aan leerders gebied moet word, omdat alle leerders nie die konsep ewe vinnig bemeester nie. Die konsep van onbekende waarde ontwikkel beter wanneer die leerder geleentheid kry om hulle denke hardop te verwoord (Verschaffel *et al.*, 2020:1).

Graad 7-leerders is al vertrouwd met die meeste simbole wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke, behalwe die wortelsimbool en eksponente. Die navorser het herhaaldelik die verskil tussen $2x$ en x^2 aan leerders verduidelik. Ongeveer die helfte van die deelnemers kon die konsep van eksponente en vierkantswortels bemeester, maar derdemagswortels was 'n uitdaging, soos in figuur 4-13.

$$\begin{array}{l}
 x^3 = 64 \\
 x = \sqrt{64} \\
 x = 6
 \end{array}$$

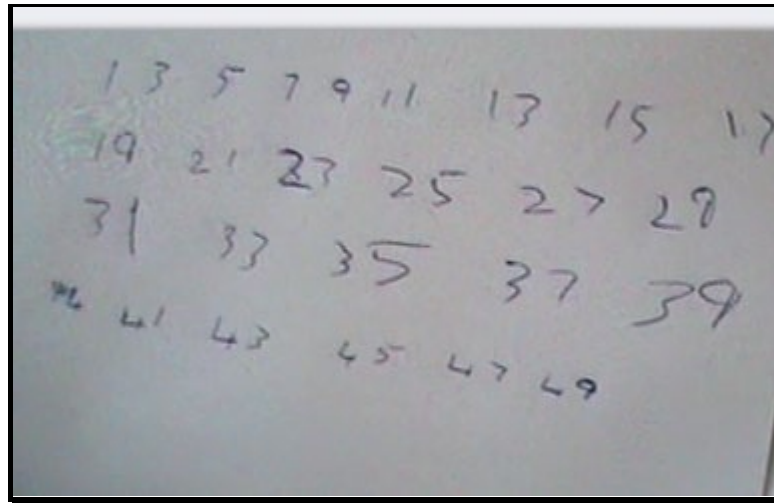
Figuur 4-13: Derdemagswortels

Deelnemer B4 het 'n vierkantswortel (in plaas van 'n derdemagswortel) gebruik om x te probeer oplos. Die intervensie wat vir hierdie wanbegrip gebruik is, is om aan leerders te verduidelik dat $x^3 = x \times x \times x$ beteken en dat dit met 'n kubus (wat driedimensioneel is) voorgestel kan word. Die vierkantswortel wat hy gebruik het, word gebruik om x^2 , wat tweedimensioneel is, op te los.

4.2.2.3 Algebraïese prosesse

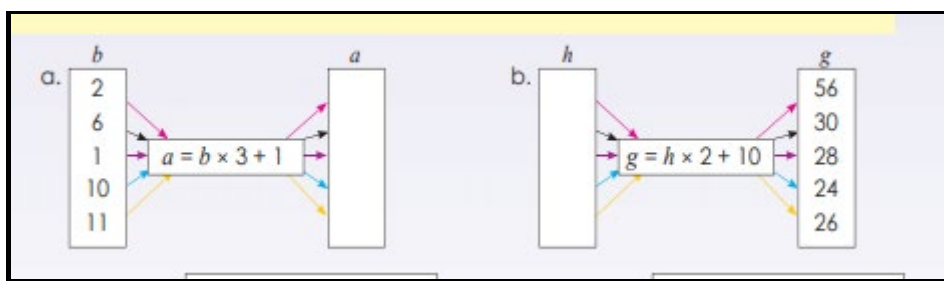
Die algebraïese prosesse wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke is waarneming van patrone, veralgemening, voorstelling en toets vir geldigheid (Chimoni *et al.*, 2018:59) (sien par. 2.2.3). Getalpatrone vorm vanaf die Grondslagfase deel van die kurrikulum, waar daar van leerders verwag word om die patroon te herhaal of uit te brei. In die graad 7-kurrikulum word getalpatrone kort voor algebra onderrig, met die doel om waarnemingsprosesse te bevorder. 'n Graad 7-leerder moet in staat wees om inset- en uitsetwaardes of reëls van patrone en verwantskappe te bepaal deur van vloiediagramme, tabelle en formules gebruik te maak (DvBO, 2011:24). Om die n de term te bepaal, is ter voorbereiding daarvan om ander onbekende waardes in algebra te verstaan. In die navorsing is die verband tussen waarnemingsprosesse en die ontwikkeling van algebraïese denke prominent. Deelnemers wat die n de term met behulp van 'n

formule kon bepaal, se algebraïese denke het beter ontwikkel as die deelnemers wat aantal om die n de term te bepaal. Tydens die WLA moes leerders die n de term van 'n patroon van onewe getalle bepaal, maar deelnemer C5 was nie in staat om die formule te gebruik nie en het onewe getalle uitgeskryf om die honderdste onewe getal te kry, soos gesien in figuur 4-14.



Figuur 4-14: Deelnemer C5 bepaal die honderdste onewe getal

Voorstelling van algebraïese vergelykings ontwikkel progressief deur die kurrikulum. Invoer-uitvoerdiagramme word sedert die Grondslagfase gebruik en daarom is deelnemers met die voorstelling vertrouwd. Dieselfde formule wat leerders gemaklik gebruik in 'n invoer-uitvoerdiagram (sien figuur 4-15) is vir hulle 'n uitdaging as dit in 'n tabel geskryf word.



Figuur 4-15: 'n Voorbeeld van 'n invoer-uitvoerdiagram (DvBO- leerderboek 2:25)

Invoer-uitvoerdiagramme is 'n voorstelling, figuur 4-15, wat ongeveer vyf moontlike waardes vir a of b gebruik en in graad 7 word die reël gegee. Die kurrikulum (DvBO, 2011:53) stel voor dat

vloedigramme, tabelle en formules gebruik word om inset- en uitsetwaardes, reëls en patrone te bepaal.

Voorbeeld:

x	1	2	3	4		18	m	51
y	8	9	10	11		25	39	n

$m?$
 $x = m$ en $y = 39$
 $y = x + 7$
 $39 = m + 7$
 $39 - 7 = m + 7 - 7$
 $32 = m$
 $m = 32$

Bepaal die reël:
 $y = x + 7$

$n?$
 $y = x + 7$
 $y = 51 + 7$
 $y = 58$
 n is 58

Figuur 4-16: Voorstelling in tabelvorm

Die navorser het tot die besef gekom dat die terme “reël” en “formule” nie in alle wiskundehandboeke konsekwent gebruik word nie. Tydens die WLA het die navorser aan leerders verduidelik dat die reël die verband tussen die veranderlikes is. In figuur 4-17 is die reël byvoorbeeld +8 en die formule is $y = 8n + 40$.

64	72	80	88	96	104
	+8	+8	+8	+8	+8

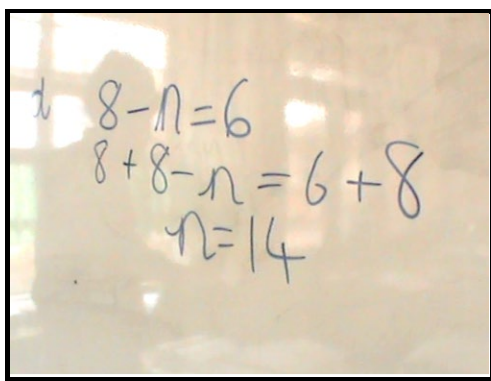
Figuur 4-17: Deelnemer C2 bepaal die reël

Tabel 4-2: Probleem om reël te bepaal

x	1	2	3	4	n
y	48	56			

In figuur 4-17 het deelnemer C2 die reël as $+8$ bepaal (in tabel 4-2), maar sy kon nie die formule, wat $y = 8n + 40$ is, bepaal nie. Sy kon dus as gevolg van 'n moontlike gebrek aan induktiewe denke nie die algebraïese vergelyking formeel weergee of veralgemeen nie.

Nog 'n algebraïese proses wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke is om vir geldigheid te toets. Graad 7-leerders begin eers hulle eie bewerkings vir geldigheid toets om te kyk of hulle reg is voordat hulle die gegewe vergelykings vir geldigheid toets.



Handwritten calculations on a whiteboard:

$$\begin{aligned} 8 - n &= 6 \\ 8 + 8 - n &= 6 + 8 \\ n &= 14 \end{aligned}$$

Figuur 4-18: Deelnemer B3 se berekeningsfout

Deelnemer B3 (die seun) is 'n gemiddelde leerder wat gewoonlik 'n eenvoudige bewerking soos dié in figuur 4-18 kon bemeester. Voordat die navorser vir deelnemer B3 (die seun) kon vra of hy seker is van sy antwoord (om sy berekeningsfout uit te wys), het deelnemer B5 (die dogter) vir hom gesê dat hy verkeerd is en dat hy moet toets om te kyk of sy oplossing reg is. Deelnemer B5 (die dogter) het die vergelyking langs deelnemer B3 se vergelyking op die bord gelos en met behulp van 'n pyltjie bo die veranderlike verduidelik waar om die oplossing $n = 2$ te vervang.

$$\begin{aligned}
 8 - n &= b \\
 8 - n + n &= b + n \\
 8 &= b + n \\
 8 - b &= n \\
 n &= 2
 \end{aligned}$$

Figuur 4-19: Deelnemer B5 toets vir geldigheid

Die pyltjie bo die n in figuur 4-19 is waar deelnemer B5 die oplossing (die twee) ingesit het om vir geldigheid te toets. Na hierdie klasgesprek het deelnemer B3 ook ná bewerkings vir geldigheid getoets.

4.2.2.4 Redeneringsvorme

Vir die ontwikkeling van algebraïese denke is drie redeneringsvorme nodig, naamlik die gebruik van algemene waarnemings om 'n verduideliking te vorm (abduktiewe redenering), die gebruik van algemene wiskundige prosesse om voorspellings te maak (induktiewe redenering) en toets vir geldigheid en bewyse (deduktiewe denke) (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:968) (sien par. 2.2.4). In 'n tradisionele klaskamer is leerders geneig om lui te wees om te redeneer (Liljedahl *et al.*, 2021:2). In 'n "redeneringsklas" staan leerders in ewekansige groepe van drie en skryf teen 'n witbord (Liljedahl *et al.*, 2021:3). Voor die WLA het die navorser 'n leerder al die leerders in die klas se name op 'n papier laat skryf en dit laat uitknip sodat die navorser die name vir die vorming van die groepe kon trek. Die klaskamer het nie genoeg witborde nie, maar het ses deure met

glaspaneel. Die navorser het wit A4-papiere aan mekaar geplak en dit agter die glaspaneel geplak sodat die leerders op die glas kon skryf asof dit 'n witbord is, soos in figuur 4-20.

Getal massa	1	2	3	4	5	6	7
Stuke	48	56	64				

56
- 48
= 8

Figuur 4-20: Improvisasie vir 'n witbord

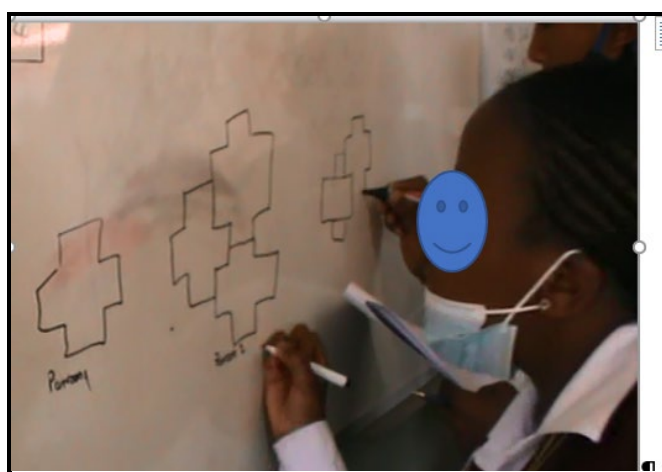
Alle leerders (behalwe deelnemer B4, wat op die spektrum van outisme is) het aktief deelgeneem en met mekaar oor algebra gepraat en geredeneer. Leerders het selfs idees tussen groepe uitgeruil.

Die meeste deelnemers (A1–A4 en B1–B5) se abduktiewe redeneringsvorme is ontwikkel en die deelnemers was in staat om waarnemings te gebruik om verduidelikings te verskaf. Byvoorbeeld, die deelnemers was in staat om waarnemings van hoe 'n getalpatroon groei, te gebruik om te verduidelik wat die volgende getal in die getalpatroon sal wees. Deelnemers C1–C5 het eerder aan- of teruggetel as wat hulle bewerkings gedoen het. Deelnemer C1 het steeds op 'n honderdkaart gesteun om te verstaan hoe 'n getalpatroon groei (sien figuur 4-21).

2	33	34	35	36	37	38	39	40
42	43	44	45	46	47	48	49	50
52	53	54	55	56	57	58	59	60
62	63	64	65	66	67	68	69	70
72	73	74	75	76	77	78	79	80
82	83	84	85	86	87	88	89	90
92	93	94	95	96	97	98	99	100

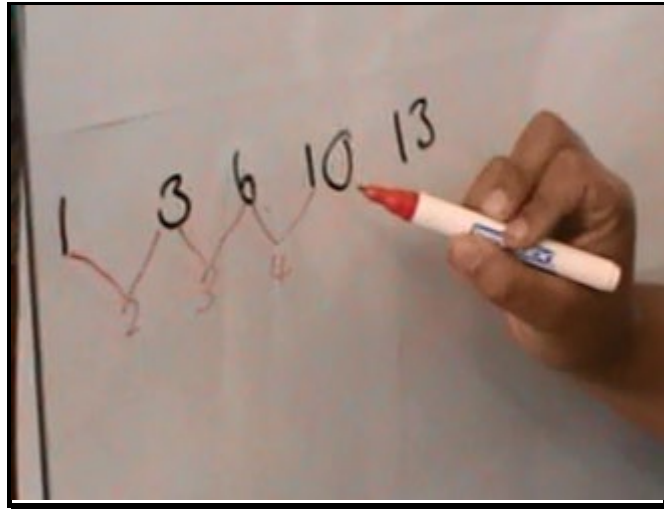
Figuur 4-21: Deelnemer C1 gebruik honderdkaart vir berekeninge

Induktiewe redenering, wat leerders in staat stel om voorspellings te maak, is ook nodig om algebraïese denke te ontwikkel (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:968). Vir die gemiddelde deelnemers (B1-B5) was dit soms nodig om die voorspelling te teken, soos in figuur 4-22. Dit wil sê dat gemiddelde deelnemers in staat was om induktief te redeneer indien die probleem konkreet is.



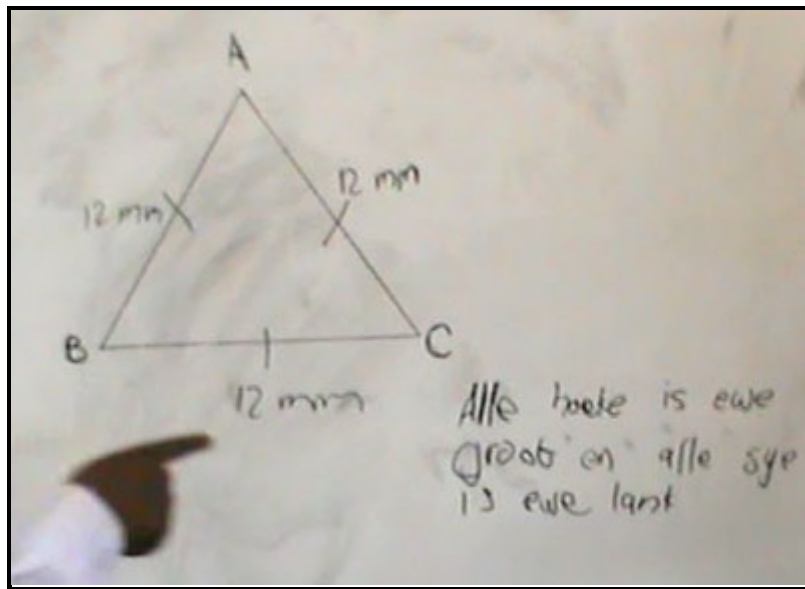
Figuur 4-22: Deelnemer B5 voorspel 'n patroon

Deelnemers A1 - A5 kon meer abstrak redeneer en was in staat om getalpatrone met numeriese modellering voor te stel, soos gesien in figuur 4-23.



Figuur 4-23: Deelnemer A1 voorspel 'n getalpatroon

Deduktiewe redenering was glad nie by die C-kategorie deelnemers te bespeur nie. Die instruksies tydens die WLA was: "Bewys dat hoek A 60 grade is". Deelnemer C2 het met die lengte van die sye gewerk en nie die grootte van die hoeke nie. Deelnemer B3 het in figuur 4-24 die driehoek as 'n gelyksydige driehoek herken en kon die bewys lewer.



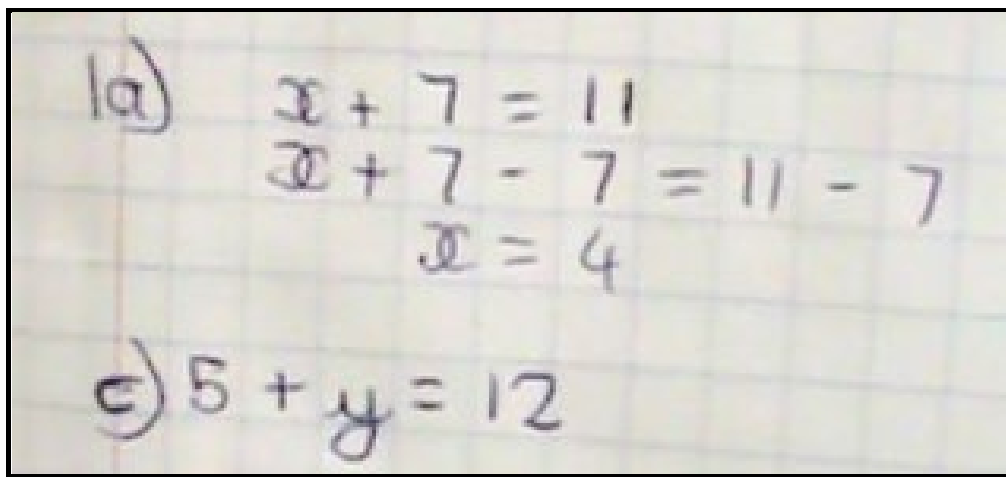
Figuur 4-24: Deelnemer B3 bewys hoek A is 60 grade

Die navorser het aan die deelnemer gevra: “As al die hoeke ewe groot is, hoe groot is hoek A dan?” Die deelnemer het geantwoord: “Die hoeke saam is 180 grade, so 180 gedeel deur 3 is 60, dan is hoek A 60 grade.” Dit wil sê dat die deelnemer in staat was om verbaal deduktief te redeneer. (In die algebratake was dit duidelik dat die leerder met deduktiewe redenering gesukkel het indien die opdrag net skriftelik en nie verbaal was nie.)

4.2.2.5 Metakognitiewe strategieë wat tydens waarnemings van leerderaktiwiteite gebruik is

Metakognitiewe strategieë wat gebruik word om nuwe kennis te konstrueer, sluit beplanning, monitering, evaluering en refleksie in, soos bespreek in paragraaf 2.3. Metakognitiewe strategieë ontwikkel wanneer leerders aangemoedig word om te ontdek, te bespreek, te dink, te vergelyk, te voorspel en ander leerders te begelei (Bakar & Ismail, 2019:2).

Die eerste metakognitiewe strategie wat tydens die WLA ondersoek is, was beplanning. Deelnemer B3 het hardop gedink om te beplan. In die plek van die veranderlike het hy gesê “Wat plus sewe is elf?” (sien figuur 4-25).



$$1a) \quad x + 7 = 11$$

$$x + 7 - 7 = 11 - 7$$

$$x = 4$$

$$c) \quad 5 + y = 12$$

Figuur 4-25: Deelnemer B3 dink hardop

Vele deelnemers het hulle wiskundewoordeboeke (indeksboekies waarin hulle wiskundeterme opskryf) gebruik om probleme op te los, wat daarop dui dat hulle beplan het voor hulle die probleem oplos. Sommige deelnemers beplan deur te modelleer. Om inligting te sorteer in 'n tabel, help leerders om probleme op te los.

Getal	1	2	3	4	5	6	7	8
massa stukke	48	58	64	72	80	88		

Figuur 4-26: Beplanning deur modellering en samewerking

Tydens die WLA het deelnemers saamgewerk om die oplossing van die woordsom te beplan, soos in figuur 4-26. Terwyl die deelnemer aan die regterkant die patroon uitbrei, skryf die een aan die linkerkant hoe die patroon groei. Die navorser is van mening dat leerders 'n groter verskeidenheid metakognitiewe strategieë (beplanning, samewerking, modellering, hardop dink en vrae vra) beoefen het wanneer hulle in groepe saamgewerk het terwyl hulle by 'n uitveerbare skryfoppervlak staan. Leerders was meer bereidwillig om in 'n "dinkklaskamer" te dink en te kommunikeer (Liljedahl *et al.*, 2021:6).

Deelnemer A1 het haar aktiwiteite gemonitor deur vrae te vra. Tydens 'n klasaktiwiteit het sy die eerste twee algebraïese vergelykings gemaklik opgelos, maar met die derde algebraïese vergelyking wou sy weet of sy die 5 of die y se optellingsinverses moet gebruik. Die navorser se raad was om albei te doen en te kyk of die uitkoms dieselfde is.

a) $x + 7 = 11$ $x =$
 b) $d - 3 = 7$ $d =$
 c) $5 + y = 12$ $y =$
 d) $8 - n = 6$ $n =$

Figuur 4-27: Deelnemer A1 se monitering

Wanneer leerders 'n algebraïese vergelyking moes oplos, het hulle soms die isolasiemetode gebruik om die proses te monitor. Daarna het deelnemers deur middel van inverse bewerking gemonitor of hulle nog reg is (sien figuur 4-27).

Gesam massa seuke	1	2	3	4
Lengte van veer in cm	48	56	64	

64
-56

Figuur 4-28: Evaluering van bewerkingsproses

In figuur 4-28 het deelnemers eenkant 'n bewerking gedoen om seker te maak van die volgende en vorige terme in die getalpatroon. Die meeste deelnemers het die substitusiemetode gebruik om te evalueer of hulle die regte oplossing vir die algebraïese vergelyking gevind het.

Metakognitiewe strategieë wat leerders tydens die proses gebruik het, sluit beplanning, probleemoplossing, hardop dink, modellering en samewerking in.

4.2.3 Algebratake (AT)

Die doel van die algebratake is om te bepaal hoe graad 7-leerders se algebraïese denke ontwikkel. Soos bespreek in paragraaf 2.2, ontwikkel algebraïese denke aan die hand van vier dimensies: (1) algemene inhoudsvelde, (2) algebraïese konsepte, (3) algebraïese prosesse en (4) redeneringsvorme (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:2). In tabel 4-2 is die data van AT opgesom om ontleed te word.

Tabel 4-3: Opsomming van data van AT

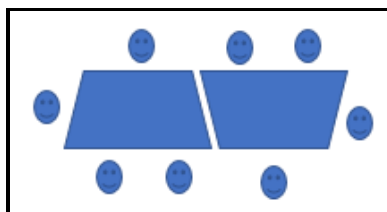
		A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2	C3	C4	C5
1	a	Algemene algoritmes													
	b	Funksionele denke													
	c	Modelleringstaal													
2	a	Gelykheid													
	b	Eienskappe van getalle													
	c	Eienskappe van bewerking													
	d	Veranderlikes													
	e	Simbole													
3	a	Waarneming													
	b	Veralgemening													
	c	Voorstelling													
	d	Toets vir geldigheid													
4	a	Abduktiewe redenering													
	b	Induktiewe redenering													
	c	Deduktiewe redenering													
Korrekte terugvoer															
Gedeeltelik korrekte terugvoer															
Verkeerde terugvoer															
Nie ingevul nie															

4.2.3.1 Algemene inhoudsvelde

Die eerste dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke is algemene inhoudsvelde en dit bestaan uit algemene algoritmes en funksionele denke, soos bespreek in paragraaf 2.2.1 (Chimoni *et al.*, 2019:2).

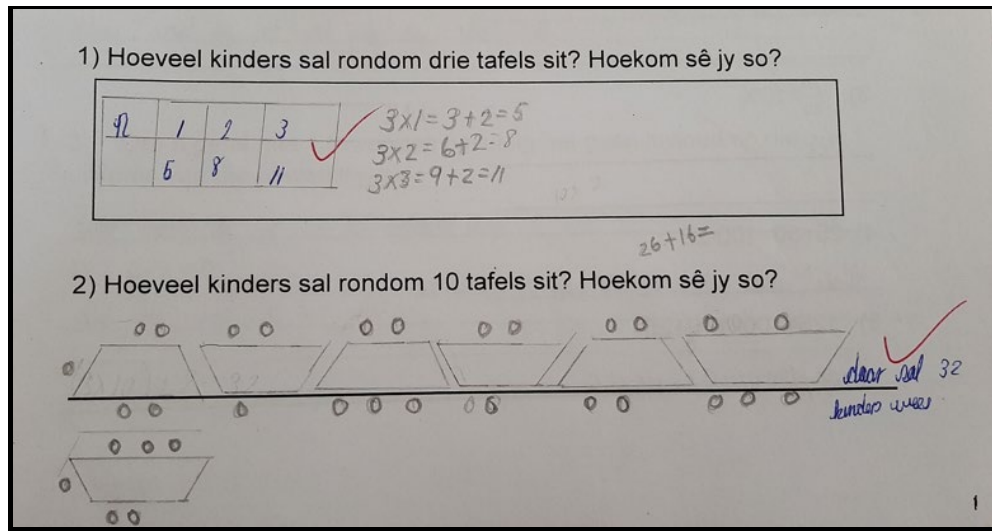
Algemene algoritmes (1a)

Algemene algoritmes (1a) is die eerste afdeling onder algemene inhoudsvelde. Die vraag in die AT was: 5 kinders sit rondom 'n trapesiumtafel. Wanneer daar 2 tafels langs mekaar gesit word, pas 8 kinders om die tafels. Hoeveel kinders sal rondom 3 tafels kan sit? Hoeveel sal om 10 tafels kan sit? Hoekom sê jy so? (sien figuur 4-29).



Figuur 4-29: Twee trapesiumtafels met 8 kinders

Drie deelnemers kon bogenoemde vrae korrek beantwoord. Deelnemers wat dit gedeeltelik korrek beantwoord het, was in staat om die eerste vraag met 'n visuele voorstelling ('n tabel of 'n skets van die tafels) te modelleer en beantwoord, maar wanneer hulle 'n berekening moes doen, het hulle foute gemaak. Die voorbeeld in figuur 4-30 wys dat deelnemer C4 se berekening reg was, maar die skryfwyse in potlood is nie wiskundig korrek nie. By die tweede vraag het sy soms 2 sirkels (wat kinders verteenwoordig) en soms 3 sirkels aan 'n sy van 'n tafel geteken, maar sy het by die korrekte antwoord uitgekom omdat sy haar deur die berekening en nie deur die foutiewe skets laat lei het nie.



Figuur 4-30: Voorbeeld van voorstelling van deelnemer C4

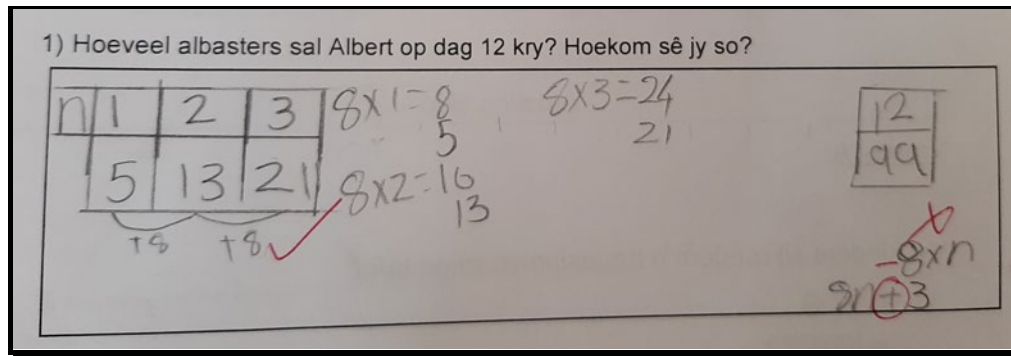
Deelnemers wat die vraag verkeerd beantwoord het, het nie die patroon in die algoritme herken nie. Dit is belangrik dat leerders 'n patroon herken om algemene algoritmes te bemeester.

Funksionele denke (1b)

Funksionele denke (1b) verwys na die veralgemening van verwantskappe tussen variërende hoeveelhede (Chimoni *et al.*, 2018:58). Die drie hoofmodusse van funksionele denke is rekursiewe patrone, kovariasies en ooreenstemmende verwantskappe (Stephens, 2017:144).

Om rekursiewe patrone te ondersoek, was die vraag in die AT: "Albert versamel albasters. Hy kry elke dag 'n sekere aantal albasters. Hy het op dag een 5 albasters gekry en op die tweede dag kry hy 13 albasters. Hy kry 21 albasters op die derde dag. Hoeveel albasters sal Albert op dag 12 kry? Hoekom sê jy so?"

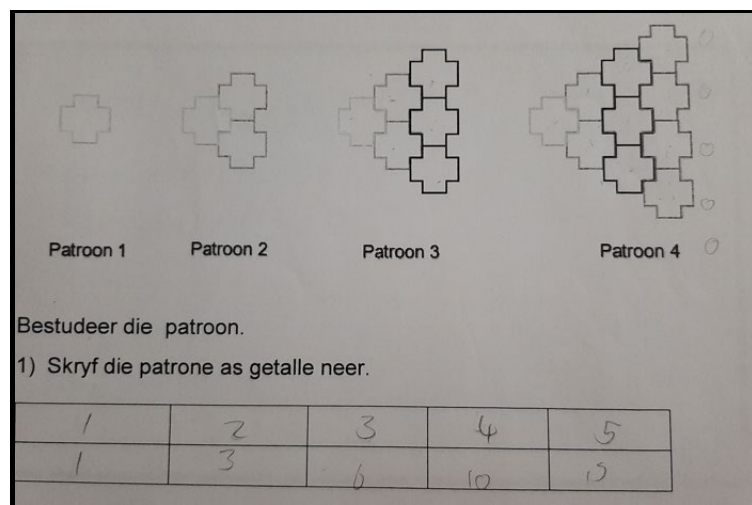
Die meeste deelnemers het gekies om die inligting in 'n tabel voor te stel, soos in figuur 4-31, maar slegs twee deelnemers kon die vraag korrek beantwoord.



Figuur 4-31: Deelnemer B1 se voorstelling in tabelformaat

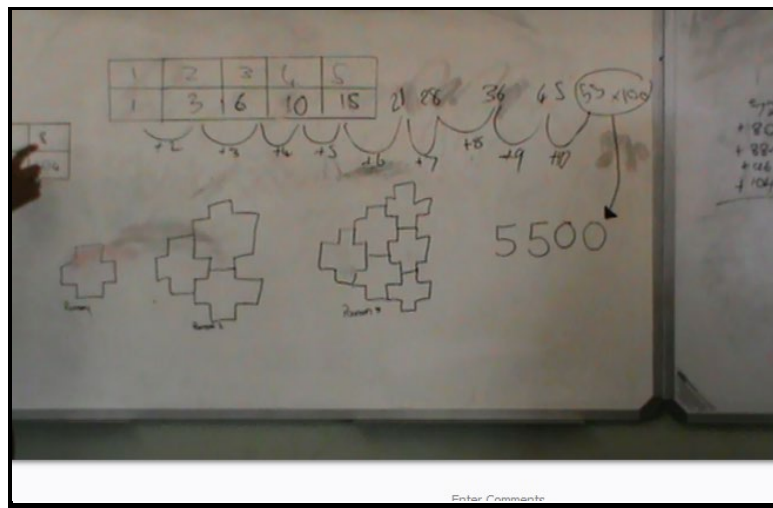
Weereens het die deelnemers wat gedeeltelik korrekte terugvoer gegee het, die patroon herken, maar agterlosige berekeningsfoute gemaak. Deelnemer A2 was in staat om die formule $8n - 3$ te ontdek, maar sy het berekeningsfoute gemaak toe sy die formule toegepas het. Die deelnemers wat verkeerde terugvoer gelewer het, kon nie eers die patroon herken nie. In graad 7 word dit as vanselfsprekend aanvaar dat leerders nie meer met sulke eenvoudige berekeninge berekeningsfoute moet maak nie, want algemene bewerkings word vanaf Grondslagfase ingeoefen. Hierdie kwessie veroorsaak 'n agterstand in die ontwikkeling van algebraïese denke.

Kovariasie-verwantskappe beskryf hoe twee hoeveelhede in verhouding tot mekaar verskil (Stephens, 2017:145). Om die kovariasie-verwantskappe te ondersoek, het die navorser 'n patroon soos in figuur 4-32 gebruik.



Figuur 4-32: Voorbeeld van kovariasie-verwantskappe

Deelnemers het dadelik die patroon oorgeteken en uitgebrei om die verwantskappe te ondersoek, soos in figuur 4-33.



Figuur 4-33: Deelnemers brei die legkaartpatroon uit

Die meeste deelnemers wat die kovariasie met tekeninge en tabelle gemodelleer het, was in staat om die patroon uit te brei, maar kon nie 'n algemene reël aflei nie. Tydens die aktiwiteit het wiskundetaal 'n belangrike rol gespeel. Deelnemers moes 'n begrip hê van terme soos “groei en vermeerder” om sin te maak van die woordprobleem (Verschaffel *et al.*, 2020:9).

'n Ooreenstemmende verwantskap is wanneer die onafhanklike veranderlike met die afhanklike veranderlike geassosieer word (Biza *et al.*, 2019:1107). Om ooreenstemmende verwantskappe te ondersoek, het die navorser in die AT gevra: “Jan is 3 jaar ouer as sy suster Susan. Susan is vanjaar 14 jaar oud. Skryf 'n algebraïese vergelyking en los die vergelyking op om te bepaal hoe oud Jan is.” Al die deelnemers het die letter x as veranderlike gebruik. Die meeste deelnemers was in staat om die korrekte algebraïese vergelyking te formuleer en het bepaal dat Jan vanjaar 17 jaar oud is. Die deelnemers wat onsuksesvol was in die oefening se oplossing was $x = 11$. Met ander woorde die deelnemers het 3 afgetrek en nie 3 by 14 getel nie.

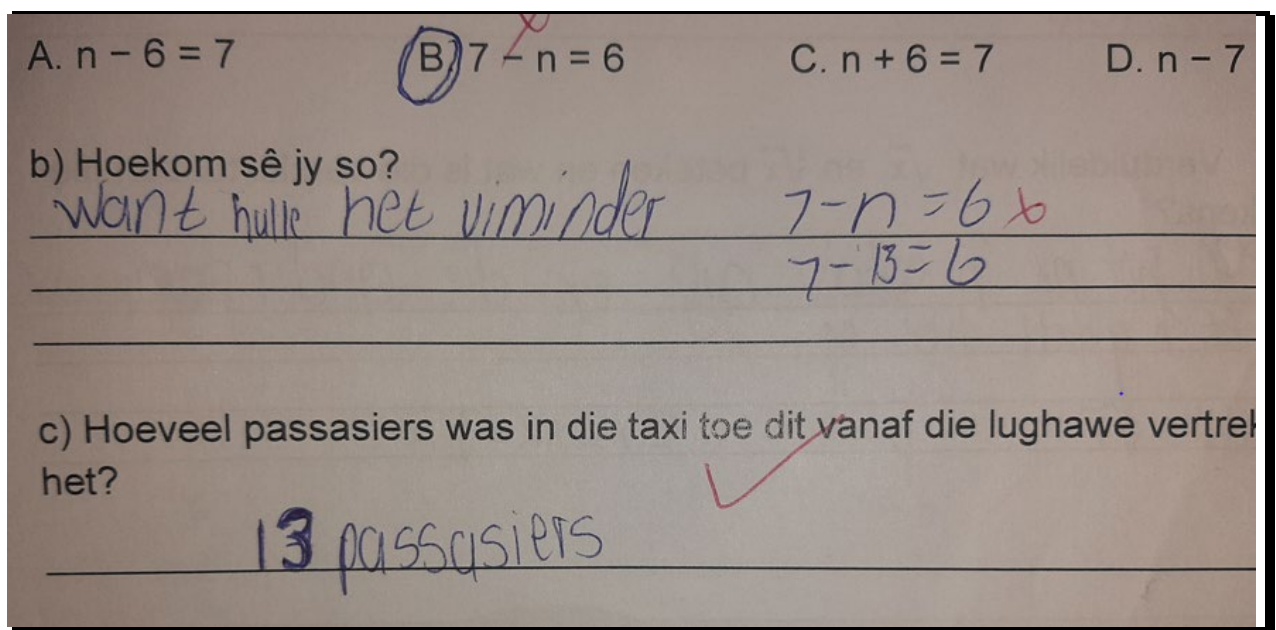
The image shows three lines of handwritten algebraic work on lined paper. The first line is $x + 3 = 14$. The second line is $x + 3 - 3 = 14 - 3$. The third line is $x = 11$. This represents a common error where the student subtracts 3 from the left side but only subtracts 3 from the right side, failing to subtract 3 from 14.

Figuur 4-34: Deelnemer A2 maak 'n formuleringsfout

Deelnemers wie se algemene algoritmes en funksionele denke (rekursiewe patrone, kovariasies en ooreenstemmende verwantskappe) goed ontwikkel is, ervaar minder struikelblokke in die aanleer van algebra en daarom is algemene inhoudsvelde belangrik vir die ontwikkeling van algebraïese denke.

Modelleringstaal (1c)

Modelleringstaal (1c) is wanneer die leerder wiskundetaal gebruik om algebraïese reëls te manipuleer en/of lewenswerklike voorbeelde gebruik om wiskundeprobleme op te los (Czocher & Maldonado, 2015:332). Die woordprobleem wat gegee is in die AT om modelleringstaal te ondersoek, was: “'n Minibustaxi laai passasiers by die lughawe op en ry na die naaste hotel. Toe die taxi by die hotel kom, het die getal met 6 passasiers verminder. Daar was toe 7 passasiers in die taxi.” Vele leerders het by die oplossing uitgekom, maar het nie die regte algebraïese vergelyking gekies nie, soos in figuur 4-35.



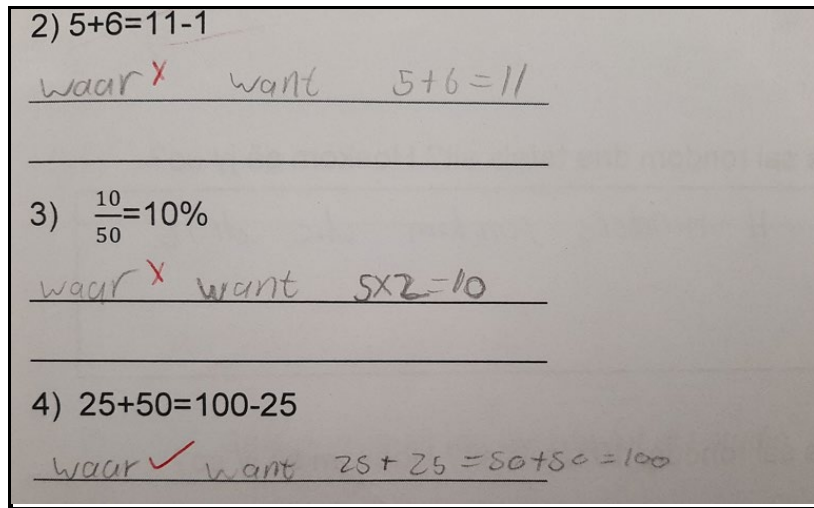
Figuur 4-35: Nie-korrekte modelleringstaal

4.2.3.2 Algebraïese konsepte

Die tweede dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke is algebraïese konsepte wat bestaan uit konsep van gelykhede, eienskappe van getalle, eienskappe van bewerkings, veranderlikes en begrip van simbole (Chimoni *et al.*, 2018:59).

Gelykheid (2a)

Tydens die WLA is daar verskeie waninterpretasies van die gelykaanteken waargeneem. Die navorser het toepaslike intervensies aan leerders gebied en vyf van die deelnemers het tydens die AT die konsep van gelykheid bemeester. Die instruksies in die AT vir die konsep van gelykheid bestaan uit vyf vergelykings (sonder veranderlikes) wat deelnemers as waar of onwaar moes klassifiseer. Die deelnemers wat die konsep van gelykheid nog nie bemeester het nie, het nog probleme ondervind met vergelykings wat persentasie bevat, soos gesien in figuur 4-36.



Figuur 4-36: Deelnemer C3 ondervind nog probleme met persentasie

Die tweede gedeelte van die afdeling oor gelykheid het algebraïese vergelykings met onbekende waardes behels. Deelnemers wie se terugvoer as gedeeltelik korrek geklassifiseer is, het die eerste instruksies (klassifisering van waar/onwaar-vergelykings) korrek verstaan, maar in die tweede gedeelte, waar daar algebraïese vergelykings gebruik is, het deelnemers begin foute maak. Die data toon dat die meeste deelnemers die konsep van gelykheid in algemene algoritmes verstaan het, maar die konsep van gelykheid was steeds 'n uitdaging in algebra. Leerders het die gelykaanteken die “doen-simbool”, die “antwoord” en die “telbymekeer”-teken genoem (Fyfe *et al.*, 2020:66). Leerders is gewoond daaraan dat die bewerking aan die linkerkant van die gelykaanteken staan. In die AT het die navorser gevra of $125 = 100 \times 1 + 0 + 25$ waar is of nie en die meeste deelnemers het geantwoord dat dit waar is, omdat hulle die eenvoudige algoritme bemeester het. Die meeste deelnemers kon onbekende waardes in 'n algebraïese vergelyking oplos indien die bewerking waarin die x voorkom, aan die linkerkant van die gelykaanteken was. Algebraïese vergelykings soos $187 = 154 + y$ was 'n uitdaging, omdat die gelykaanteken links van die bewerking staan.

$$\begin{array}{l}
 x - 110 = 175 \\
 \underline{x - 110 + 110 = 175 + 110} \\
 175 + 110 = 285 \\
 x = 285 \quad \checkmark
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{d} \quad 187 = 154 + y \\
 \underline{187 = 154 + y - y} \\
 187 - y = 154 \quad \times
 \end{array}$$

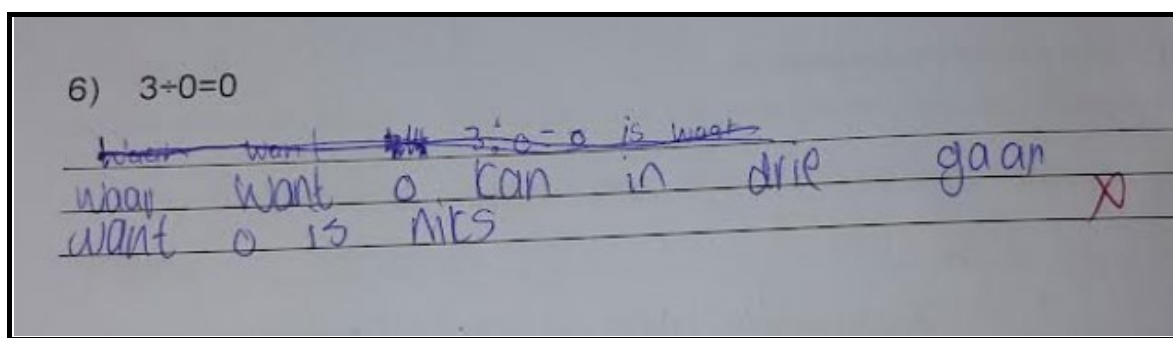
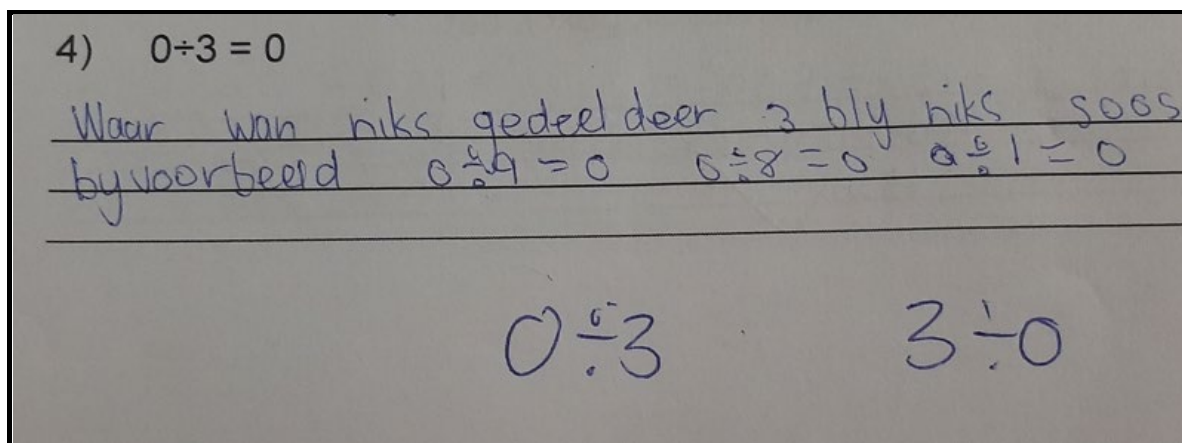
Figuur 4-37: Twee algebraïese vergelykings

Die meeste leerders het gesukkel om 'n konstante aan die linkerkant van die gelykaanteken en 'n veranderlike regs van die gelykaanteken te skryf, byvoorbeeld $33 = y$. Die struikelblok oor gelykhede het voorgekom in die AT en daarom is gelykhede weer in die volgende data-insamelingsinstrument (taakgebaseerde onderhoude) ondersoek.

Eienskappe van getalle (2b)

Slegs vier deelnemers het al die vrae wat die eienskappe van getalle toets, korrek beantwoord. Deelnemers wie se begrip van eienskappe van getalle as gedeeltelik korrek geklassifiseer is, het eienskappe van telgetalle bemeester, maar het nie die eienskappe van heelgetalle bemeester nie. Dit wil sê dat deelnemers positiewe getalle verstaan het, maar sommige deelnemers het berekeningsfoute met negatiewe getalle gemaak. Alle deelnemers het nie die eienskap van 1 as identiteitselement van vermenigvuldiging verstaan nie.

Deelnemers B1, B3, C2 en C3 was bewus dat $0 \div 3 = 0$, maar hulle het gedink dat $3 \div 0 = 0$ ook waar is. Deelnemers A1, A3, A4 en B5 het die term “ongedefinieerd” korrek gebruik by die vraag $3 \div 0$. Deelnemer C5 het gedink $3 \div 0 = 3$.



Figuur 4-38: Wanbegrip van eienskappe van nul

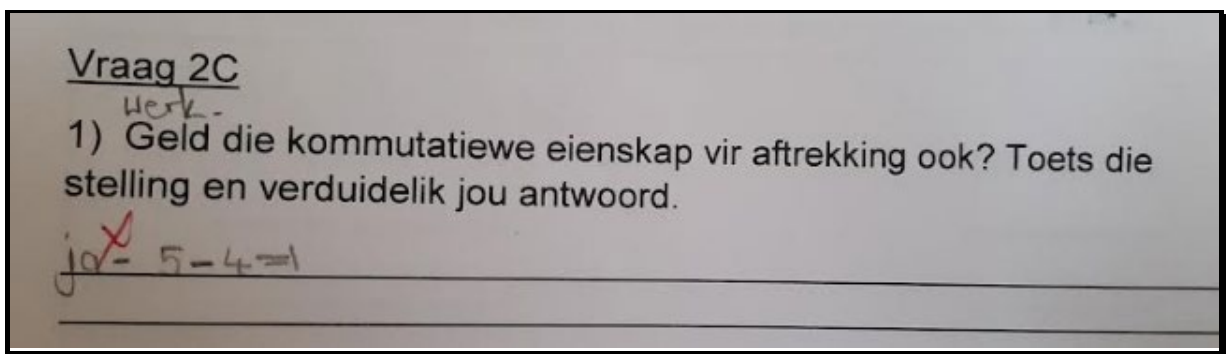
Hierdie deelnemers het dus nie die eienskappe van 0 bemeester nie (sien figuur 4-38). Leerders moet eienskappe van getalle bemeester om hoofreken te ontwikkel wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is (Pourdavood *et al.*, 2020:243).

Eienskappe van bewerkings (2c)

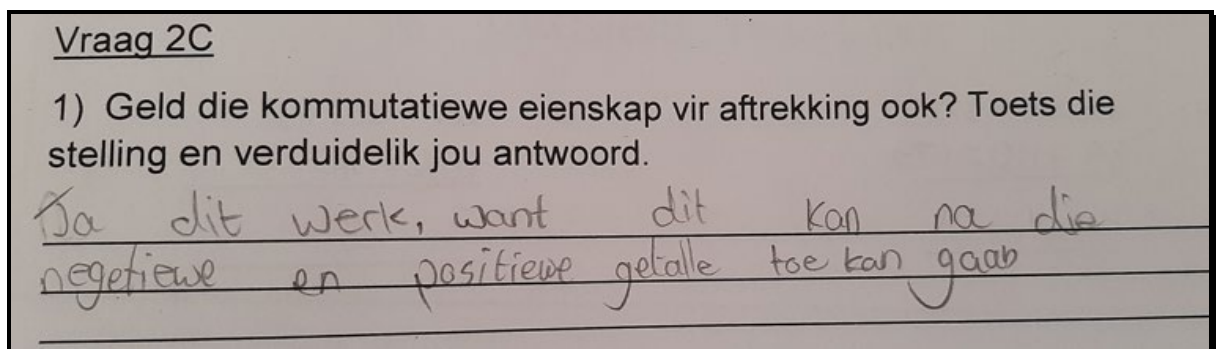
Eienskappe van bewerkings wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke in graad 7 nodig is, sluit die kommutatiewe eienskap, assosiatiewe eienskap en distributiewe eienskap in (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:667). Slegs twee van die deelnemers het eienskappe van bewerkings suksesvol bemeester. Deelnemer B4 het doelbewus vrae oor eienskappe van bewerking oop gelos, omdat hy gesê het dat hy bang is vir mislukking. Hy het gesê: “Ek wil nie ’n fout maak nie.” Die meeste deelnemers wat gedeeltelik korrekte terugvoer gegee het, het die kommutatiewe eienskap verstaan, maar nie die distributiewe eienskap nie. Omdat kommutatiewe en assosiatiewe eienskappe op optelling en vermenigvuldiging betrekking het, verwag deelnemers “’n wet” wat op aftrekking en deel betrekking het. Toe die navorser getalle gebruik het om die

distributiewe eienskappe aan die hand van die omtrek van 'n reghoek te verduidelik, het die deelnemers die distributiewe eienskap verstaan, maar toe die navorser die getalle vervang met veranderlikes soos l vir lengte en b vir breedte, het sommige deelnemers nie die distributiewe eienskap verstaan nie.

Die vier deelnemers wat eienskappe van bewerkings verkeerd beantwoord het, was onder die indruk dat die kommutatiewe eienskap ook van toepassing is op aftrekking en deling, soos in figuur 4-39.



Figuur 4-39: Deelnemer se wanbegrip van kommutatiewe eienskap



Figuur 4-40: Deelnemer weet nie wat beteken kommutatiewe eienskap nie

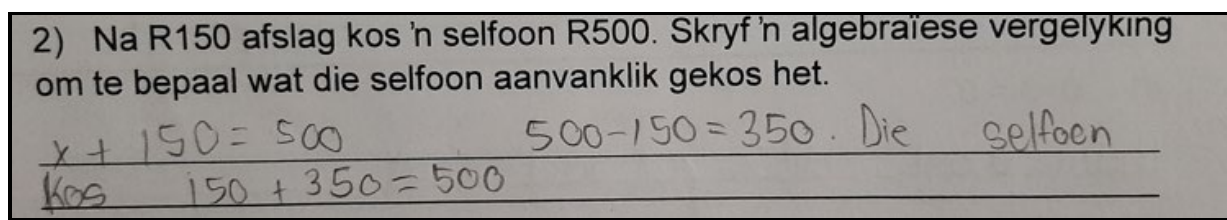
Hierdie wanbegrip (figuur 4-40) van die kommutatiewe eienskap kan deur middel van gesprekke opgelos word. Indien die wanbegrip nie hanteer word nie, ervaar leerders later struikelblokke met die oplos van algebraïese vergelykings.

Veranderlikes/onbekende waardes (2d)

'n Goeie begrip van 'n onbekende waarde is van kardinale belang in die ontwikkeling van algebraïese denke (Ayieko, 2018:32). Verder meen Ayieko (2018:31) dat die sukses van algebra in die inoefening van algebra lê. Indien leerders meer geleenthede kry om die onbekende waarde te bepaal, sal algebraïese denke beter ontwikkel. In die AT het slegs drie deelnemers al die oefeninge om onbekende waardes op te los suksesvol voltooi.

Die eerste vraag in die AT om deelnemers se begrip van die onbekende waardes te toets, was : Na R150 afslag kos 'n selfoon R500. Skryf 'n algebraïese vergelyking om te bepaal wat die selfoon aanvanklik gekos het.

Die meeste van die deelnemers kon die algebraïese vergelyking korrek skryf, maar deelnemers wat die vraag gedeeltelik korrek beantwoord het, het R150 afgetrek en nie opgetel nie, soos in figuur 4-41.



2) Na R150 afslag kos 'n selfoon R500. Skryf 'n algebraïese vergelyking om te bepaal wat die selfoon aanvanklik gekos het.

$$\begin{array}{l} x + 150 = 500 \qquad 500 - 150 = 350 \text{ . Die selfoon} \\ \text{kos} \quad 150 + 350 = 500 \end{array}$$

Figuur 4-41: Berekeningsfoute om onbekende waarde te bepaal

Deelnemers het berus by die verkeerde oplossings, totdat die navorser hulle in die TGO gevra het of dit sin maak dat 'n mens meer betaal ná afslag. Dit is 'n aanduiding dat hulle nie oor die sinvolheid van hulle oplossings dink nie. Met ander woorde, daar was 'n gebrek aan metakognitiewe strategieë.

Die tweede vraag in die AT om deelnemers se begrip van onbekende waardes te toets, was: 'n Minibustaxi laai n passasiers by die lughawe op en ry na die naaste hotel. Toe die taxi weer by die hotel wegry, het die getal passasiers met 6 verminder. Daar was toe net 7 passasiers in die taxi. Watter vergelyking beskryf die gebeure en hoekom sê jy so? a) $n - 6 = 7$ b) $7 - n = 13$ c) $n + 6 = 13$ of d) $n - 7 = 6$.

Die meeste deelnemers het opsie (a) gekies, wat korrek was. Deelnemer C5 het opsie (d) gekies. Waar deelnemers redes vir hulle antwoord moes verskaf, het hulle die onbekende waarde bereken en suksesvol by $n = 13$ uitgekom.

In die Grondslagfase-kurrikulum word 'n blokkie of strepie in die plek van 'n onbekende waarde gebruik, byvoorbeeld: $3 + __ = 7$, waar algebra van 'n letter gebruik maak om 'n onbekende waarde voor te stel. Leerders in die Grondslagfase is in staat om die onbekende waarde te bepaal. Die begrip van 'n onbekende waarde is slegs gedeeltelik ontwikkel indien die leerder nie sin maak van 'n veranderlike in die plek van die onbekende waarde nie.

Die navorser het tot die slotsom gekom dat graad 7-leerders onbekende waardes vinniger en meer akkuraat kan bereken indien hulle die geleentheid kry om dit in te oefen en dit verbaal kan verwoord. Die vereenvoudiging/isolasie-metode (waar al die veranderlikes aan die een kant van die gelykaanteken is en al die bekende waardes aan die ander kant is) of vervangingsmetodes (waar die leerder die probeer-en-tref-metode gebruik om 'n waarde te vervang en te toets of die vergelyking waar is en aanhou vervang totdat die regte waarde bepaal is) is geskikte strategieë vir die aanleer van onbekende waardes in graad 7-wiskunde (Otten *et al.*, 2019:617).

Simbole (2e)

Florio (2020:2) stel dit dat die simbole van algebrataal vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is. In die AT het deelnemers die aftreksimbool goed verduidelik en deelnemers was bewus dat die minussimbool aftrekking of 'n negatiewe getal kan beteken. Die meeste deelnemers was bewus dat twee veranderlikes langs mekaar vermenigvuldiging impliseer, byvoorbeeld: $a \times b = ab$. Deelnemers wat simbole net gedeeltelik bemeester het, se struikelblok was eksponente, vierkantswortels en derdemagswortels. In die AT was die instruksies: skryf die volgende in algebrataal, $x + x + x + x = 8$. Die korrekte respons was: $4x = 8$, maar die meeste deelnemers het geskryf: $x^4 = 8$ of $4^x = 8$. Deelnemers het ook nie die verskil tussen $\sqrt{x}$ en $\sqrt[3]{x}$ geken nie.

Verder was deelnemers nie bewus dat die breukvorm vir deling gebruik word nie. Dit is weereens 'n bewys dat algebrataal aan die begin van die graad 7-jaar onderrig moet word, sodat konsepte soos eksponente en wortels aan die hand van algebrataal onderrig kan word. Die huidige kurrikulum behandel eksponente en wortels in kwartaal 1 en algebrataal in kwartaal 3.

4.2.3.3 Algebraïese prosesse

Vir die ontwikkeling van algebraïese denke is die volgende prosesse nodig: waarneming, herkenning van verbande tussen konsepte om veralgemenings te maak, voorstelling van konsepte en toets vir geldigheid/bewyslewering (Chimoni *et al.*, 2018:58). Die algebrataak is gebruik om bogenoemde prosesse te ondersoek.

Waarneming (3a)

In die AT is 'n getalpatroon gebruik om deelnemers se waarnemingsprosesse te ondersoek. Die meeste deelnemers het 'n korrekte waarneming gemaak dat die patroon elke keer met 4 groei. Deelnemers wat die vraag gedeeltelik korrek beantwoord het, het die patroon uitgebrei, maar kon nie die uitbreiding van die patroon verwoord nie. Deelnemer C3, wie se terugvoer as verkeerd geklassifiseer is, het nie die patroon uitgebrei nie en het slegs geskryf: tel net 'n getal op.

Die eerste term in die reeks is, 5. Daarna volg 9, 13 en 17.

1) Teken die getalpatroon in die tabel op.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y									

2) Wat let jy op?

tel net 'n getal op

Figuur 4-42: Deelnemer C3 se onvermoë om 'n getalpatroon waar te neem

Die proses van waarneming verg akkurate wiskundetaal, wat lees- en skryfvaardighede insluit (Çelik, 2020:328), maar deelnemer C5 (wie se wiskundetaalvaardighede ondergemiddeld was) het baie motivering nodig gehad om te lees.

Veralgemening (3b)

Die vraag in die AT wat verbande ondersoek om te bepaal watter veralgemening leerders maak, volg op die vorige vraag (wat handel oor waarneming). Die navorser wou bepaal of die deelnemers die verband tussen die n de term en die groei van die patroon kon herken. Drie deelnemers kon die verband suksesvol beskryf, naamlik: $4n + 1$. Deelnemers wat dit gedeeltelik

korrek beantwoord het, het by $4n$ uitgekom, maar het die res van die algebraïese uitdrukking verkeerd gehad.

Die eerste term in die reeks is, 5. Daarna volg 9, 13 en 17.

1) Teken die getalpatroon in die tabel op.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	9	13	17	21	25	29	33

+4

2) Wat let jy op?

4 is plus 4 ✓

3B)

Skryf die bogenoemde getalpatroon in algebraïese taal

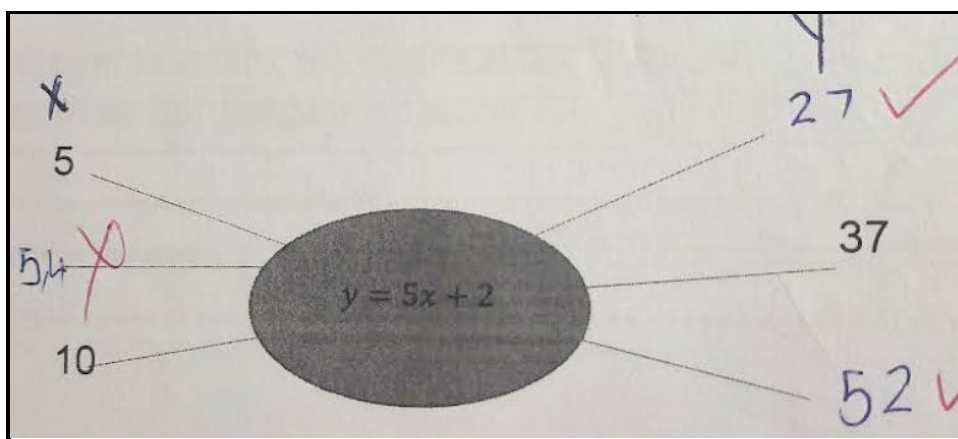
$4n + 2$ ✗

Figuur 4-43: Deelnemer C4 se gedeeltelik korrekte terugvoer

Deelnemers wat die vraag verkeerd beantwoord het, het nie die verband tussen die groei van die patroon (vermeerder met 4) en die $4n$ herken nie. Dit wil sê dat die algebraïese proses van waarneming en die algebraïese proses van verbande trek interafhanklik ontwikkel (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:967). Leerders moet kan waarneem om verbande te kan trek en veralgemenings te maak.

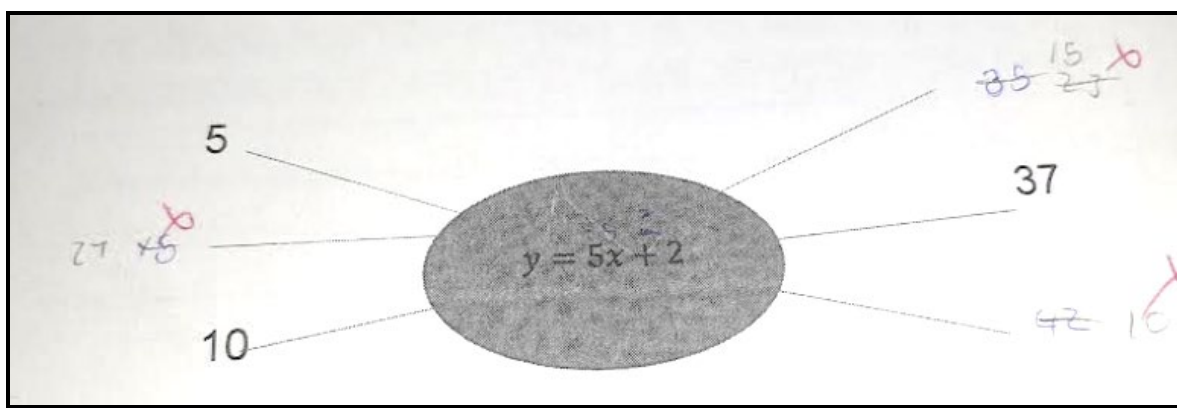
Voorstelling (3c)

In die AT is voorstelling in tabelvorm herhaaldelik ondersoek en die meeste deelnemers was gemaklik met hierdie vorm van voorstelling. Die navorser wou ander vorms van voorstelling ook ondersoek en het besluit op 'n invoer-uitvoerdiagram. Vier deelnemers het die voorstellingsvorm suksesvol bemeester. Die meeste deelnemers het die algebraïese gedeeltelik korrek beantwoord deur van links na regs korrek te beantwoord, maar van regs na links verkeerd te beantwoord. Die navorser vermoed dat die leerders nie die konsep van inverse bewerking verstaan het nie.



Figuur 4-44: Voorstelling in die vorm van invoer-uitvoerdiagram

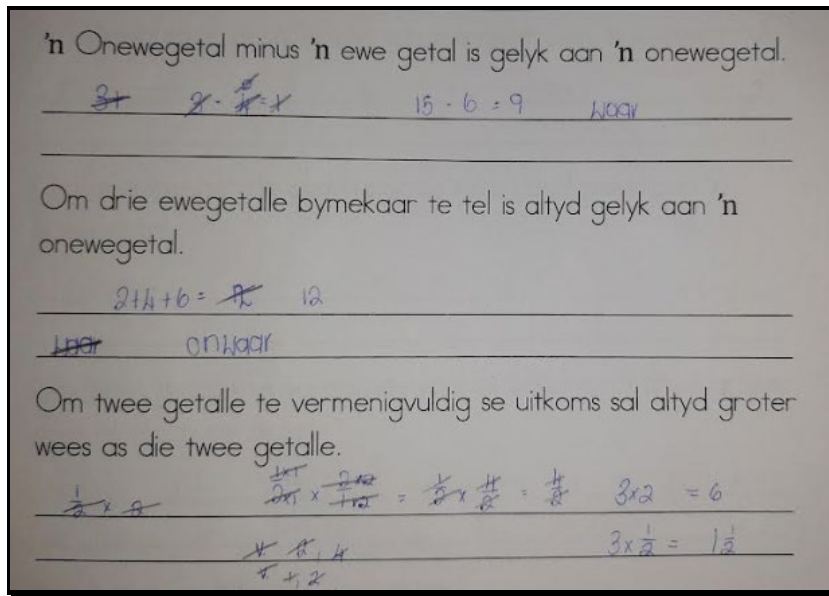
Deelnemer C2 het geen sin van die invoer-uitvoerdiagram vorm van voorstelling in figuur 4-44 en figuur 4-45 gemaak nie. Hierdie deelnemer het die voorstelling in tabelvorm verstaan, maar nie die invoer-uitvoerdiagramme nie.



Figuur 4-45: Deelnemer C2 se poging om onbekende waardes van voorstelling te bepaal

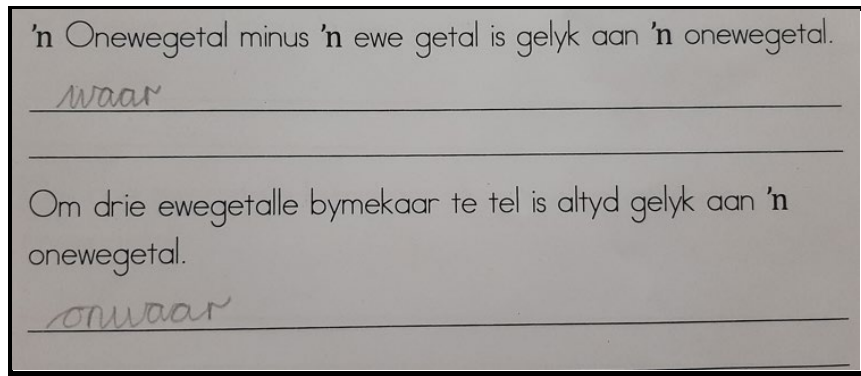
Veralgemening/toets vir geldigheid (3d)

Die navorser het ervaar dat deelnemers die eindproduk van die vraag belangriker ag as die proses om by die produk uit te kom (hulle wou so gou as moontlik by die antwoord uitkom). Deelnemers het slegs een voorbeeld vir geldigheid getoets en dan dadelik 'n veralgemening gemaak. Indien hulle meer as een voorbeeld getoets het, dan het hulle dit met 'n potlood doodgetrek om slegs die beste resultate te gee, soos vertoon in figuur 4-46.



Figuur 4-46: Toets vir geldigheid

Ses deelnemers se antwoorde op die vraag om geldigheid te toets, was korrek. Vyf deelnemers het slegs geskryf “waar” of “onwaar” sonder om vir geldigheid te toets (verkeerde terugvoer, want hulle het net geraai). Wanneer leerders 'n oplossing raai, is dit 'n vorm van abduktiewe redenering (Kontorovich, 2019:1054), soos in figuur 4-47.



Figuur 4-47: Verkeerde terugvoer op vraag

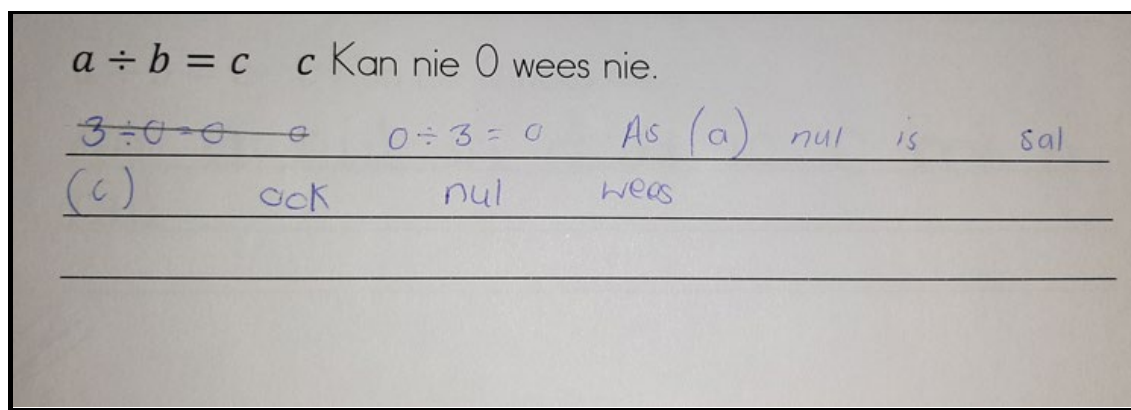
Die deelnemers wie se terugvoer as gedeeltelik korrek geklassifiseer is, het slegs sommige van die bewerings vir geldigheid getoets.

4.2.3.4 Redeneringsvorme

Die vierde dimensie vir die ontwikkeling van algebraïese denke is redeneringsvorme (abduktiewe, induktiewe en deduktiewe redeneringsvorme), soos bespreek in paragraaf 2.2.4 (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:968). Tydens 'n skriftelike taak wat leerders moes voltooi (soos die AT wat hier gebruik word), het dit voorgekom asof leerders lui was om te redeneer. Daarom was die data met betrekking tot redeneringsvorme wat met behulp van die WLA ingesamel is ryker as die data wat met behulp van die AT ingesamel is.

Abduktiewe redenering (4a)

Abduktiewe redenering behels dat 'n leerder 'n veralgemening gebruik om 'n ander veralgemening te maak (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:968) (sien paragraaf 2.2.4). Verder is abduktiewe redenering op die leerder se voorkennis gebaseer. Wanneer 'n leerder 'n antwoord raai of skat, is dit ook deel van abduktiewe redenering (Kaplan *et al.*, 2021:817). In die AT het geen leerder die vraag totaal en al verkeerd beantwoord nie, maar deelnemer B4 het die vraag oop gelaat. Die stelling in die AT was: $a \div b = c$, c kon nie 0 wees nie. Deelnemers moes bepaal of die stelling waar of vals is. Korrekte terugvoer het 'n berekening ingesluit om te toets of die stelling waar is, asook 'n gevolgtrekking, soos in onderstaande figuur 4-48. Die deelnemers het in figuur 4-48 voldoende abduktiewe redenering in die ontwikkeling van algebraïese denke getoon.



Figuur 4-48: Deelnemer A3 se verduideliking

Induktiewe redenering (4b)

Induktiewe redenering behels die veralgemening van wiskundige prosesse en formules (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:968) (sien par. 2.2.4). Induktiewe redenering kan deur algemene voorbeelde gefasiliteer word (Park & Kim, 2017:3771). Die veralgemening wat in die AT gebruik is om induktiewe denke te ondersoek, is 'n patroon wat groei. Die vraag was: "Albert versamel albasters. Hy kry elke dag 'n sekere aantal albasters by. Op dag 1 het hy 5, op dag 2 het hy 13 albasters en op dag 3 het hy 21 albasters. Hoeveel albasters sal hy op dag 12 hê?"

1) Hoeveel albasters sal Albert op dag 12 kry? Hoekom sê jy so?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	5	13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93
		+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8	+8

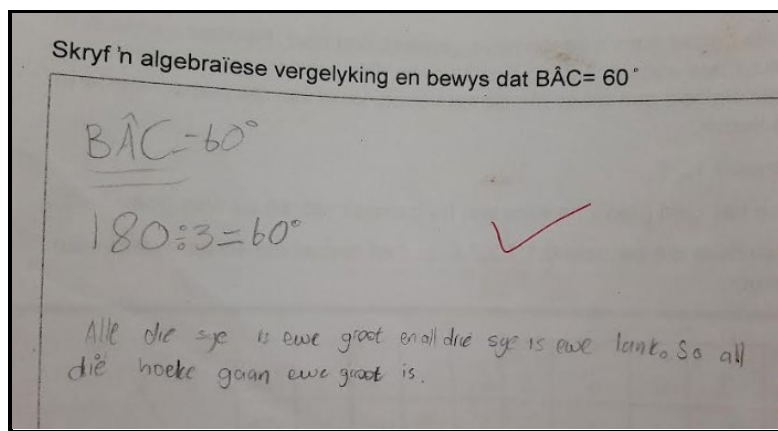
X ✓

Figuur 4-49: Deelnemer A4 se gedeeltelik korrekte antwoord

Deelnemer A4 kon wys hoe die patroon groei, maar het 'n berekeningsfout gemaak (sien figuur 4-49). Die deelnemer het induktiewe redeneringsvermoë getoon, maar dit moes nog ontwikkel.

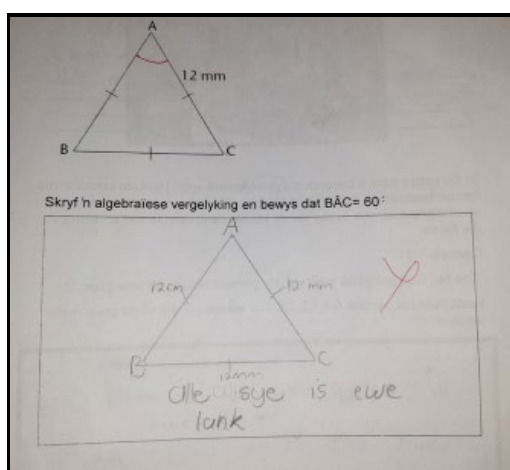
Deduktiewe redenering (4c)

Deduktiewe redenering stel leerders in staat om stellings te kan bewys (Kaplan *et al.*, 2021:818). Die deelnemers moes 'n algebraïese vergelyking skryf om te bewys dat hoek $\hat{BAC} = 60^\circ$. Slegs vier deelnemers het die hoekgrootte korrek aangetoon.



Figuur 4-50: Korrekte antwoord van deelnemer B4

In gedeeltelik korrekte antwoorde het die deelnemer saamgestem dat $\hat{BAC} = 60^\circ$, maar sonder die korrekte algebraïese vergelyking, soos uitgebeeld in figuur 4-50. Verkeerde antwoorde het oor die sye gehandel en nie oor die hoeke nie, soos in figuur 4-51.



Figuur 4-51: Deelnemer C3 se verkeerde terugvoer

In figuur 4-51 blyk dit dat leerders wat gemaklik was met induktiewe redenering nie noodwendig met deduktiewe denke gemaklik was nie. Redeneringsvorme bevorder kritiese denke (Chasanah, 2019:113), wat bevorderlik is vir die ontwikkeling van algebraïese denke.

4.2.3.5 Metakognitiewe strategieë in die AT

Die verkryging en gebruik van inligting is 'n kognitiewe proses, terwyl die bewus wees van die proses metakognisie is (Bulut, 2021:84). Die oplossing van algebraïese vergelykings is 'n kognitiewe proses en om bewus te raak van denke tydens die proses verg metakognitiewe strategieë. Beplanning, monitering, evaluering en refleksie is die metakognitiewe strategieë wat in die navorsing ondersoek word. Vir die ondersoek van bogenoemde metakognitiewe strategieë is daar eerstens op die “trapesiumvormige tafel-probleem” gefokus.

Die navorser het deelnemers gevra om te voorspel of hulle die algebra-probleem sal kan oplos. Slegs twee deelnemers het voorspel dat hulle 100% seker was dat hulle die probleem kon oplos. Hierdie twee deelnemers het wel die probleem korrek opgelos. Drie deelnemers het voorspel dat hulle die probleem kon oplos en heel waarskynlik reg sou wees. Een van die drie was wel reg. Die ander twee wat verkeerd was, het die tafels los van mekaar geteken om meer kinders rondom 'n tafel in te pas. (Sien par. 4.2.3.1 – algemene algoritmes.)

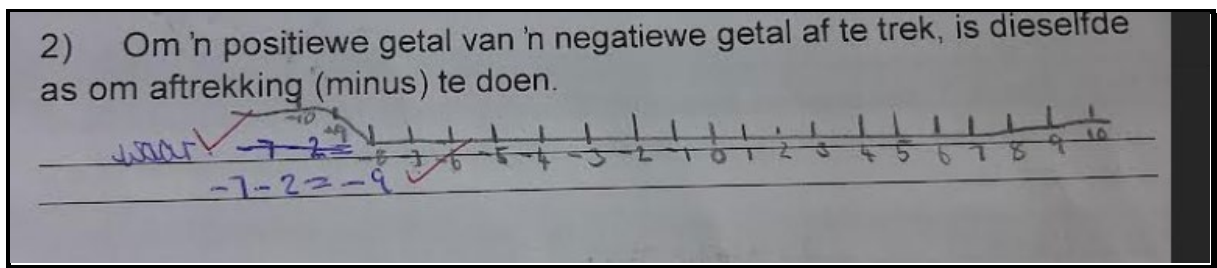
Nadat die navorser gevra het hoe seker hulle is dat hulle die vraag kan antwoord, het die res van die deelnemers gesê hulle is nie seker nie maar hulle sal probeer. Die deelnemers het die eerste vraag (hoeveel kinders sal rondom 3 tafels sit?) reg beantwoord, maar het die tweede vraag (hoeveel kinders sal rondom 10 tafels kan sit?) verkeerd beantwoord deur meer kinders in te pas as wat die getalpatroon moes wees. Dit wil sê hulle het nie die getalpatroon herken en korrek uitgebrei nie.

Om die deelnemers se beplanning van oplossingsstrategieë verder te ondersoek, het die navorser gevra watter planne hulle gaan maak om die trapesiumtafel-probleem op te los. 'n Deelnemer het gesê omdat sy weet dis herhaalde optel, gaan sy 'n vermenigvuldigingsom doen. Sy het deur die vraag gelees en besluit watter bewerking sy moes gebruik om die probleem op te los. 'n Ander deelnemer het gesê sy lees eers die vraag twee tot drie keer voordat sy begin bereken.

Deelnemers het hoofsaaklik die isolasiemethode gebruik om algebraïese vergelykings op te los, terwyl hulle die proses gemonitor het en die substitusiemethode gebruik het om te evalueer of hulle die vergelyking korrek opgelos het.

Na afloop van die tafel-probleem het die navorser 'n paar deelnemers gevra of hulle weet waar hulle 'n fout gemaak het. Een deelnemer het gesê: “ek het nie reg geteken nie”. Verdere vrae aan deelnemers is eers later in die TGO gevra om die metakognitiewe strategie evaluering te ondersoek.

Verder in die AT het deelnemers modellering gebruik om probleme op te los, soos in figuur 4-52.



Figuur 4-52: Modellering as metakognitiewe strategie

Deelnemers het getallelyne of tabelle getrek om probleme te modelleer. Indien 'n leerder 'n bewerking moes uitvoer, het hulle 'n getallelyn gebruik en indien 'n leerder die n de term moes bepaal, het hulle 'n tabel gebruik.

Sommige deelnemers het seker gemaak dat hulle wiskundeterme ken voordat hulle 'n algebraïese vergelyking probeer oplos het. Op die metakognitiewe strategiewiel is dit “ken wiskundewoorde”.

Ten slotte: Die hoofdoel met die algebrataak was om die ontwikkeling van algebraïese denke te ondersoek. Die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke is ontleed en daar is bevind dat dit vir graad 7-algebra toepaslik was. Die sekondêre doel was om metakognitiewe strategieë te ondersoek. Die gevolgtrekkings vanuit die data-ontleding van die AT stem ooreen met die data van die WLA.

4.2.4 Taakgebaseerde onderhoude (TGO)

Kristallisering verwys na praktyke van verifiëring van data deur van 'n verskeidenheid data-insamelings- en -ontledingsmetodes gebruik te maak (Maree, 2020:46).

Die doel van die taakgebaseerde onderhoude (TGO) is kristallisering deur met deelnemers 'n gesprek te voer oor wat hulle tydens die AT geskryf het. Die navorser het deelnemers se begrip van gelykheid en metodes van oplossing van onbekende waardes weer ondersoek. Die navorser

het tydens die TGO opgelet na die wiskundetaal en metakognitiewe strategieë wat die deelnemers gebruik het.

Data van die TGO is met behulp van gespreksanalise ontleed. Die deelnemers was minderjarig en het informele taal gebruik en daarom was gespreksanalise gepas vir die TGO. Gespreksanalise fokus eerder op wat gesê word en nie op taalreëls nie en sluit nieverbale aspekte soos sketse in (Nieuwenhuis, 2020a:127).

4.2.4.1 Begrip van gelykheid

Tydens die WL het die meeste deelnemers geskryf dat die gelykaanteken beteken “hier kom die antwoord”. Die navorser het klasgesprekke gevoer om te poog om die wanbegrip reg te stel. ’n Intervensie in die vorm van die weegskaalles is toegepas en meer deelnemers het met die AT ’n beter begrip van gelykheid gehad. In die TGO is daar vasgestel dat al die deelnemers behalwe deelnemer C4 verstaan het wat die gelykaanteken beteken. Nege van die 14 deelnemers het gesê: “Dit beteken die antwoord aan die linkerkant van die gelykaanteken is dieselfde hoeveelheid as die antwoord aan die regterkant van die gelykaanteken.” Deelnemers het nog steeds die gelykaanteken met die woord “antwoord” assosieer.

4.2.4.2 Metodes om onbekende waardes op te los

Lineêre algebraïese vergelykings kan met een van twee metodes opgelos word, naamlik vereenvoudiging/isolasie of die vervangingsmetode (sien par. 2.2.2) (Otten *et al.*, 2019:617). Onderhoudsvrae van die TGO het gehandel oor die onbekende waardes wat deelnemers in die AT moes oplos, byvoorbeeld “hoe het jy by die oplossing van die onbekende waarde uitgekome?”, om te bepaal watter metode die deelnemers gebruik het.

Herstrukturering is die eerste stap van die vereenvoudigingsmetode en dit het behels dat die deelnemer algebraïes gebruik om die vergelyking te herstrukturer, byvoorbeeld om $x + x + x$ te skryf as $3x$. Teen die tyd van die TGO was die deelnemers gemaklik met die herstrukturering van algebraïese vergelykings met optelling en aftrekking. Daarna het die leerder die onbekende waarde “geïsoleer” deur dieselfde bewerking aan albei kante van die gelykaanteken te doen (Otten *et al.*, 2019:617).

Die vervangingsmetode behels dat ’n leerder “raai en kontroleer”. Die leerders sou ’n getal in die plek van die veranderlike vervang en kontroleer of dit die regte oplossing vir die veranderlike is.

Indien dit nie die regte oplossing is nie, sou die leerder 'n volgende getal toets, totdat die leerder die onbekende waarde bepaal het (Otten *et al.*, 2019:617).

Die eerste algebraïese vergelyking in die AT was $a + 12 = 30$. Die vraag in die AT was: "Hoe het jy die waarde van a bepaal?". Al die deelnemers het die vereenvoudigingsmetode gebruik. Deelnemers met sterker wiskundetaal (deelnemers A1 tot A4) kon die stappe beter verwoord. Deelnemer A1 het gesê: "ek het eers 12 geminus aan albei kante om die som gelyk te maak. Toe is 30 minus 12 gelyk aan 18, dan is a gelyk aan 18." Die navorser het aan die deelnemer gevra of sy honderd persent seker was dat sy reg is. Die deelnemer het met selfvertroue geantwoord: "Ja Juffrou, want as ek 18 in die plek van a sit dan is die antwoord 30". Deelnemers het hulle antwoorde met behulp van die vervangingsmetode gemonitor.

Die tweede algebraïese vergelyking om die onbekende waarde op te los, was $b - 15 = 28$. Weereens het al die deelnemers die isolasiemetode gebruik om die onbekende waarde op te los en die vervangingsmetode gebruik om hulle antwoorde te monitor. Deelnemer A1 het gesê: "by vraag B het ek 15 aan albei kante geplus, toe is b gelyk aan 43."

Die derde onbekende waarde wat in die TGO ondersoek is, was 'n woordsom: "Jan is 3 jaar ouer as sy suster Susan. Susan is 14 jaar oud." In die AT moes leerders 'n algebraïese vergelyking skryf om die onbekende waarde op te los. Tydens die TGO was die vraag: "Hoe weet jy hoe oud is Jan?". Die meeste deelnemers het die vereenvoudigingsmetode gebruik. Deelnemers C3 het aangetel, "Jan is drie jaar ouer as sy sussie, dan ... 14, 15, 16, 17. Jan is 17." Sy het op haar vingers getel. Ander deelnemers het aangetel om die antwoord te toets, maar het die vereenvoudigingsmetode gebruik om die onbekende waarde te bepaal. Dit wil sê dat die vervangingsmetode nie vir die woordsom gebruik is nie.

Die laaste onbekende waarde wat in die TGO bepaal is, was "Ná R150 afslag kos 'n selfoon R500, wat het die selfoon aanvanklik gekos?". Deelnemers het die vereenvoudigingsmetode/isolasiemetode gebruik om die onbekende waarde te bepaal, soos uitgebeeld in figuur 4-53.

2) Na R150 afslag kos 'n selfoon R500. Skryf 'n algebraïese vergelyking om te bepaal wat die selfoon aanvanklik gekos het.

$$\cancel{x - 150 - 500 = 450}$$

$$x - 150 - 500 = 500 - 150 = 450 \quad \checkmark$$

Figuur 4-53: Deelnemer C2 maak berekeningsfout

Die vereenvoudigingsmetode is nie sonder struikelblokke nie. Leerders het steeds berekeningsfoute gemaak. In die TGO het die navorser aan deelnemer C2 gevra: “Hoe het jy die prys van die selfoon bereken?” Die deelnemer het geantwoord: “Ek het R150 geminus”. Daarna het die navorser gevra: “Hoekom minus?”. Die deelnemer het geantwoord: “Want... oo ek sien dit was minus, ek moes al twee kante R150 geplus het”.

Die navorser het tot die gevolgtrekking gekom dat graad 7-leerders gewoonlik die vereenvoudigingsmetode gebruik om onbekende waardes te bepaal en die substitusiemetode gebruik om te monitor (metakognisie) of die bewerking reg is.

4.2.4.3 Metakognitiewe strategieë

Die doel van die TGO was om te bepaal watter metakognitiewe strategieë 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke speel. Metakognitiewe strategieë bestaan hoofsaaklik uit die komponente beplanning, monitering, evaluering en refleksie (Djudin, 2017:127).

Om metakognitiewe strategieë prakties aan leerders te onderrig, het die navorser 'n metakognitiewe strategiewiel met tien strategieë ontwerp, naamlik **beplanning, vra vrae, doelstelling, ken struikelblokke, ken wiskundewoorde, probleemoplossing, hardop dink, om 'n joernaal te hou, samewerking en modellering** (Du Toit & Kotze, 2009:58). Hierdie strategieë vorm deel van die metakognitiewe strategieë beplanning, monitering, evaluering en refleksie.

Die metakognitiewe strategie beplanning is tydens die WLA ondersoek, want die TGO volg ná die WLA en beplanning kon dus nie tydens TGO ondersoek word nie.

Deelnemers het graag modellering gebruik om hulle algebraïese denke te monitor. Deelnemers in die A-kategorie (met sterk wiskundetaal) het dit nie nodig gevind om prente te teken nie; hulle het eerder grafieke en tabelle gebruik om getalpatrone te modelleer. Sommige deelnemers het hardop gedink om hulle algebraïese denke te monitor. Deelnemer A4 het net hardop gedink wanneer iets vir hom moeilik is. Ken wiskundewoorde is ook 'n tegniek wat deelnemers vir monitering gebruik het.

Hardop dink is die tegniek wat die meeste deelnemers gebruik het om hulle algebraïese denke te evalueer. Die navorser het in die TGO 'n vraag gevra om deelnemers se vermoë om hulle werk te evalueer, te ondersoek. Die vraag was hoe seker die deelnemer is dat hulle terugvoer van vraag 4c in die algebrataak korrek was. Dit het gehandel oor die som van die binnehoeke van 'n gelyksydige driehoek. Die meeste deelnemers het met selfvertroue gesê hulle is reg, want $180^\circ \div 3 = 60$. Deelnemer C3 het gepoog om haar antwoord te evalueer deur die hoek te gaan meet: "Ek het dit gemeet". By die woordsomme het deelnemers die inverse bewerking en die isolasiemetode gebruik om hulle denke te monitor.

4.3 Samevatting

Hierdie hoofstuk bespreek 'n empiriese ondersoek van die ontwikkeling van algebraïese denke. 'n Literatuurstudie is gebruik om die data te staaf. Deelnemers met beter wiskundetaal het beter in AT gevaar. Deelnemers A1–A5, wat goed gevaar het in die WL, het ook goed gevaar in die AT. Die meeste deelnemers wat met die WL gemiddeld gevaar het, het ook met die AT gemiddeld gevaar, behalwe deelnemer B3, wat swak gevaar het in die AT. Deelnemers wat swak gevaar het in die WL het ook swak gevaar in die AT. Deelnemer C3 het nie die swakste gevaar in die WL nie, maar het die swakste gevaar in die AT. Die navorser het uit die TGO die gevolgtrekking gemaak dat die meeste leerders nie van 'n joernaal as metakognitiewe strategie gebruik maak nie. Slegs een deelnemer het modellering as metakognitiewe strategie gebruik. Die meeste (11 uit die 14) deelnemers het vrae gevra. Deelnemers A1- A4 het nie gedink dit is nodig om hardop te dink nie, terwyl deelnemers B1, B2, B3, B5 en C2 hardop dink as metakognitiewe strategie gebruik het. Deelnemers wie se wiskundetaal sterk was, het 'n groter verskeidenheid metakognitiewe strategieë gebruik. Uit hierdie gevolgtrekking kan die navorser riglyne stel. Die volgende hoofstuk bied 'n opsomming van die studie en die navorsingsvrae word beantwoord.

HOOFSTUK 5

RIGLYNE VIR DIE ONTWIKKELING VAN ALGEBRAÏESE DENKE DEUR MIDDEL VAN WISKUNDETAAL EN METAKOGNITIEWE STRATEGIEË

5.1 Opsomming

Hoofstuk 5 is die slothoofstuk wat eers 'n opsomming van die studie bied en daarna word die navorsingsvrae beantwoord. Die bydrae van die navorsing asook die beperkings word ook in dié hoofstuk bespreek. Vervolgens word 'n opsomming van die voorafgaande vier hoofstukke verskaf.

5.1.1 Hoofstuk 1

Hoofstuk 1 het die agtergrond van die studie en die probleemstelling wat tot die navorsingsvrae aanleiding gegee het, verduidelik. In hierdie hoofstuk is sleutelwoorde soos algebraïese denke, metakognitiewe strategieë en wiskundetaal gedefinieer. Beplanning vir die navorsing is by die hoofstuk ingesluit.

5.1.2 Hoofstuk 2

Hoofstuk 2 is 'n konseptuele en teoretiese raamwerk wat tot die beantwoording van die navorsingsvrae bygedra het. Die vier dimensies van die ontwikkeling van algebraïese denke (algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:966) is volledig bespreek. Die literatuur is ondersoek om te bepaal wat die rol van wiskundetaal in die ontwikkeling van algebraïese denke is. Verder is die literatuur ondersoek om vas te stel watter metakognitiewe strategieë 'n rol in die ontwikkeling van algebraïese denke speel.

5.1.3 Hoofstuk 3

Hoofstuk 3 het oor die kwalitatiewe navorsingsmetodologie en navorsingsontwerp gehandel. OGN is in hierdie hoofstuk bespreek, asook die steekproef, deelnemers en data-insamelings- en ontledingsmetodes. Die rol van die navorser asook etiese aspekte het deel van hoofstuk 3 gevorm.

5.1.4 Hoofstuk 4

Hoofstuk 4 het die data-insamelingsproses, dataverwerking en ontleding wat van wat die empiriese afdeling van die studie is, beskryf. Daarna is bogenoemde resultate van die data in hoofstuk 4 gebruik om die navorsingsvrae te beantwoord.

5.2 Beantwoording van subnavorsingsvrae

Die uitkoms van die empiriese data is deur die literatuur ondersteun. Die navorser gebruik nou die empiriese data om die navorsingsvrae te beantwoord. Die hoofnavorsingsvraag: “Watter riglyne kan gebied word vir graad 7 leerders se ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë?”, word later in die hoofstuk beantwoord.

5.2.1 Die eerste subnavorsingsvraag

Die eerste subnavorsingsvraag is: “Wat is die graad 7-leerders se ontwikkeling van algebraïese denke aan die hand van die vier dimensies van algebraïese denke? Algebraïese denke (par. 2.2) kan opgesom word as funksionele denke, veralgemening van patrone en verstaan van onbekende waardes (Eriksson & Eriksson, 2021:365). Volgens die literatuur (Chimoni *et al.*, 2018:966; Pitta-Pantazi *et al.*, 2019) ontwikkel leerders se algebraïese denke aan die hand van vier dimensies (algemene inhoudsvelde, algebraïese konsepte, algebraïese prosesse en redeneringsvorme). Leerders in Suid-Afrikaanse openbare skole word vir die eerste keer in graad 7 aan algebra blootgestel (DvBO, 2011). Die eerste dimensie (algemene inhoudsvelde: algemene algoritmes en funksionele denke) en wiskundetaal is die fondasie van die ontwikkeling van algebraïese denke.

Uit die data-ontleding is dit duidelik dat leerders wie se algemene inhoudsvelde en/of wiskundetaal nie voldoende ontwikkel is nie, meer struikelblokke tydens die ontwikkeling van algebraïese denke ervaar. Deelnemer C3 het in graad 7 steeds met basiese berekeninge gesukkel, soos gesien in par. 4.2.2.1 en figuur 4-5. Sy het nog op haar vingers getel of 'n honderdkaart as hulpmiddel gebruik. Die deelnemer het nie die nodige algemene inhoudstring gehad om algebraïese denke te ontwikkel nie. Waar ander leerders soms deur middel van metakognitiewe strategieë van hulle berekeningsfoute bewus was, het deelnemer C3 nie geweet as sy berekeningsfoute maak nie. Leerders wie se algemene algoritmes goed ontwikkel is, beskik oor hoofrekenevaardighede wat redeneringvermoë bevorder (Pourdavood *et al.*, 2020:242), wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke.

Die tweede dimensie van ontwikkeling van algebraïese denke (algebraïese konsepte: gelykhede, eienskappe van getalle, eienskappe van bewerking, onbekende waardes en simbole) word op die eerste dimensie (algemene algoritmes) gebou (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:967). Leerders sal aanhou foute maak indien hulle nie algebraïese konsepte verstaan nie (Demonty *et al.*, 2018:2). In die ontleding van data is die wanbegrip van gelykhede bespeur. Tydens die WLA het

deelnemers gesê dat die gelykaanteken beteken “hier kom die antwoord”. Die intervensie was vir die meeste deelnemers suksesvol, maar deelnemer C3 het tot aan die einde van die studie nie geweet wat die gelykaanteken beteken nie.

Indien die leerders se algemene algoritmes en konsep van gelykheid, eienskappe van getalle en eienskappe van bewerkings voldoende ontwikkel is, is die graad 7-leerders gereed om algebraïese denke te ontwikkel deur onbekende waardes en veranderlikes te ondersoek. Die navorser onderrig algebraïes voordat sy met onbekende waardes begin. Na afloop van die algebraïes-les word onbekende waardes deur middel van die isolasiemetode aan leerders onderrig. Die eerste stap van die isolasiemetode is herstrukturering (Ottien *et al.*, 2019:615). Die isolasiemetode is om al die veranderlikes aan die een kant van die gelykaanteken te kry en al die getalwaardes aan die ander kant van die gelykaanteken te kry. Byvoorbeeld: $8 + x = 15$, dan word die inverse bewerking gedoen, $8 - 8 + x = 15 - 8$. Die onderwyser kan die inverse bewerking in kleur aandui, sodat leerders duidelik kan sien wat gebeur. Nou is 7 aan die een kant van die gelykaanteken en x aan die ander kant van die gelykaanteken. Dit is belangrik dat daar aan leerders voorbeelde van algebraïese vergelyking gegee word waar die veranderlike ook regs van die gelykaanteken gegee word, byvoorbeeld $3 = 5 - y$. In die data-ontleding is daar gevind dat vele leerders gemaklik is met die veranderlike aan die linkerkant, maar struikelblokke ondervind wanneer die veranderlike aan die regterkant is, soos in die literatuur bevestig is (Madej, 2022:325).

Verder ontwikkel algebraïese denke van graad 7-leerders beter indien daar 'n verskeidenheid voorstellings (die derde dimensie: algebraïese prosesse) aan leerders onderrig word. Leerders het konseptuele begrip van algebraïese uitdrukkings wanneer hulle in staat is om verskeie vorms van voorstellings te kan vertolk (Moss *et al.*, 2019:1). In die data-ontleding is daar gevind dat leerders algebraïese uitdrukkings gemaklik kan verstaan indien dit in tabelvorm aangebied word (sien par. 4.2.2.3 en figuur 4-15). Die rede daarvoor is dat getalpatrone in vroeër grade in tabelvorm aan leerders gebied is. Demonty *et al.* (2018:2) meen dat algebraïese denke deur die konteks van lineêre patrone ontwikkel kan word. Die navorser het gevind dat getalpatrone die skakel is tussen algemene algoritmes en algebra, soos bevestig in die literatuur (Wilkie, 2020:317). Die substitusiemetode kan ingeoefen word wanneer leerders die n de term bepaal. So ontdek leerders verwantskappe tussen die afhanklike veranderlike en die onafhanklike veranderlike (Biza *et al.*, 2019:1107).

Invoer-uitvoerdiagramme word ook in vorige grade onderrig, maar graad 7-leerders sukkel om sin te maak van die algebraïese vergelyking wanneer die bewerking van regs na links gedoen moet word (sien par. 4.2.2.3 en figuur 4-14).

Die vierde dimensie (redeneringsvorme) ontwikkel beter as die klaskamer 'n dink-omgewing is (Liljedahl *et al.*, 2021:3). Tydens die WLA het alle deelnemers (behalwe deelnemer B4) saamgewerk en geredeneer om algebraïese vergelykings op te los. Deelnemers is meer gewillig om te probeer redeneer wanneer hulle in groepe, voor 'n uitveerbare skryfbord staan, as wanneer hulle in 'n tradisionele klas sit. Tydens die AT is die drie redeneringsvorme (abduktief, induktief en deduktief) ondersoek en sommige deelnemers het tydens die WLA beter as tydens die AT geredeneer, omdat die AT individuele werk, in 'n sittende posisie, met 'n pen is. Dit wil sê dat redeneringsvorme (wat nodig is vir die ontwikkeling van algebraïese denke) beter ontwikkel indien die klasomgewing gunstig is vir leerders om te redeneer (waar leerders bereid is om te waag) (Liljedahl *et al.*, 2021:5).

Ter samevatting: graad 7-leerders se algebraïese denke ontwikkel aan die hand van die vier dimensies met korrekte wiskundetaal en 'n verskeidenheid voorbeelde en genoeg geleentheid vir inoefening.

5.2.2 Die tweede subnavorsingsvraag

Die tweede subnavorsingsvraag is: "Watter metakognitiewe strategieë speel 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke?" Metakognisie bestaan uit kennis van denke en die regulering van denke, wat bestaan uit beplanning, monitering, evaluering en refleksie (Flavell, 1979:906). Om leerders te bemagtig om hulle denke te beplan, te monitor en te evalueer, rus die navorser hulle toe met tien metakognitiewe strategieë, alhoewel daar vele ander metakognitiewe strategieë bestaan. Om dit prakties aan leerders te onderrig, het die navorser 'n metakognitiewe strategiewiel ontwerp wat tien metakognitiewe strategieë vertoon: beplanning, vrae vra, doelstelling, ken struikelblokke, ken wiskundewoorde, probleemoplossing, hardop dink, om 'n joernaal te hou, samewerking en modellering (sien par. 2.3.1). Al bogenoemde metakognitiewe strategieë speel 'n rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke.

Met behulp van die data-ontleding het die navorser opgemerk dat metakognitiewe strategieë 'n belangrike rol speel wanneer graad 7-leerders onbekende waardes moet bepaal. Wanneer die leerder besig is om onbekende waardes met behulp van die isolasiemethode op te los, help dit as

hulle hardop dink. Hardop dink is 'n metakognitiewe strategie wat 'n belangrike rol in die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke speel. Leerders los probleme meer akkuraat op wanneer hulle hardop dink, want hardop dink gaan gepaard met die werkende geheue (Bonner *et al.*, 2021:31). Die deelnemers wat hardop gedink het wanneer hulle gesukkel het, het gesê dat Wiskunde meer sin maak as hulle dit hardop sê en hulleself hoor. Deelnemers **ken hulle struikelblokke** omdat hulle bewus is dat wanneer die veranderlike aan die regterkant van die gelykaanteken staan, hulle goed moet konsentreer om nie 'n berekeningsfout te maak nie. Die volgende metakognitiewe strategie, **monitering**, vind plaas wanneer die leerder monitor of hulle die egte inverse bewerking gebruik om die onbekende waarde te vind. Hardop dink is soms deel van monitering. Met die isolasiemethode is die doel om al die veranderlikes aan die een kant van die gelykaanteken te kry en al die konstante waardes aan die ander kant. **Evaluering** vind plaas wanneer die leerder die substitusiemethode gebruik om te bepaal of die oplossing vir die onbekende waarde korrek is.

Metakognitiewe strategieë bevorder selfgerigte leer, wat aan leerders die selfvertroue bied (Karlen, 2016:254) wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig is. Leerders wat selfgerig kan leer, is in staat om kennis (kognisie) toe te pas om algebra te doen (Ziegler *et al.*, 2021:188). In die navorsing is bevind dat deelnemers (veral deelnemer A4) wat algemene inhoudsvelde (soos algemene algoritmes) bemeester het, maar nie selfgerig kan leer nie, se algebraïese denke stadiger ontwikkel (Pitta-Pantazi *et al.*, 2019:967). Daarom is dit nodig om leerders met metakognitiewe strategieë te bemagtig sodat hulle in selfgerigte leerders kan ontwikkel, wat tot die ontwikkeling van algebraïese denke bydra.

Ten slotte: Metakognitiewe strategieë wat 'n rol speel in die ontwikkeling van algebraïese denke is beplanning, monitering (byvoorbeeld: isolasiemethode van algebraïese vergelykings oplos) en evaluering en refleksie (substitusiemethode om te bepaal of die oplossing korrek is).

5.2.3 Die derde subnavorsingsvraag

Die derde subnavorsingsvraag is: “Wat is die rol van wiskundetaal in die aanleer van algebra in graad 7?” “In Wiskunde word 'n eie, gespesialiseerde taal gebruik wat simbole en notasies behels om numeriese, meetkundige en grafiese verwantskappe te beskryf” (DvBO, 2011:8). Wiskundetaal bestaan uit subafdelings, byvoorbeeld simbole (Çelik, 2020:328). In die navorsing is wiskundetaal in drie afdelings verdeel om graad 7-algebra te ondersoek, naamlik algebrataal, wiskundeterme in verband met bewerkings en algemene wiskundetaal (sien figuur 4-1). Roberts

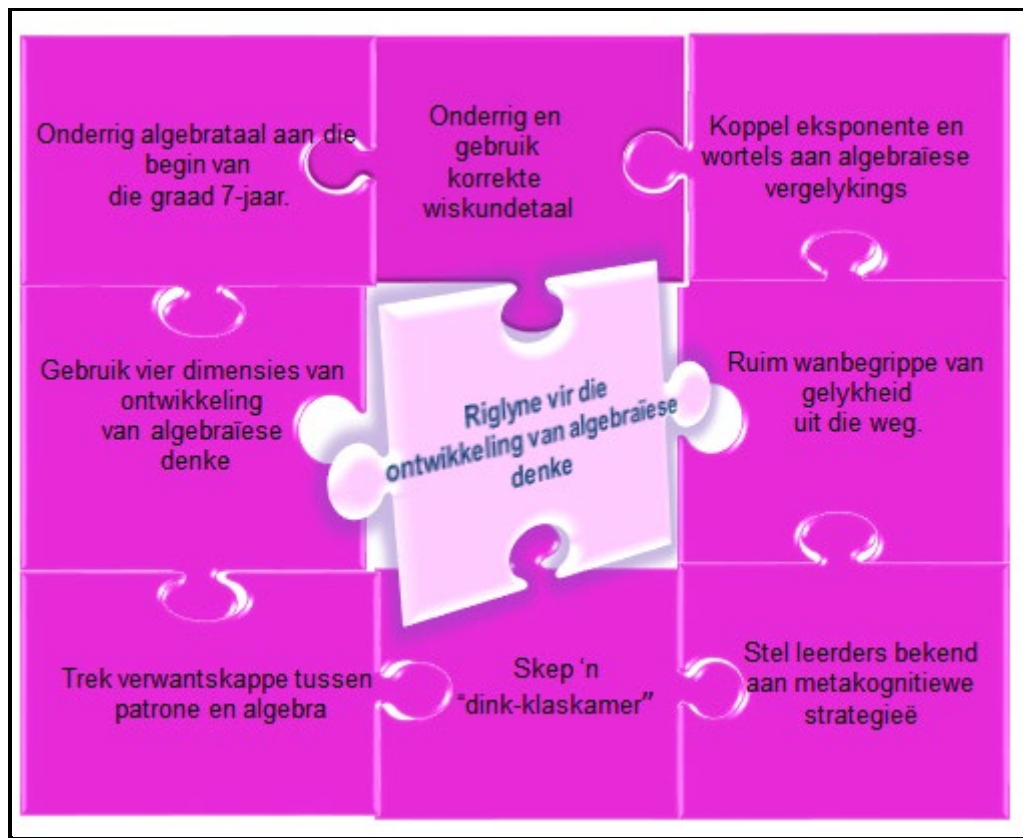
en Le Roux (2019:4) stel dit dat sleutelwoorde (algebraterme) aan 'n visuele voorstelling soos algebraïese uitdrukkings, tabelle, vergelykings en diagramme gekoppel kan word.

Wiskundetaal speel 'n kritieke rol in die aanleer van algebra omdat graad 7-leerders vir die eerste keer aan algebra blootgestel word en aanvanklik geen algebrataal ken nie. Wiskunde in die Intermediêre Fase is meer konkreet as in graad 7 en leerders kon makliker 'n konsepbeeld aan die betekenis van 'n konsep heg. Algebra is meer abstrak en konsepbeelde is meer kompleks as in die Intermediêre Fase. 'n Konsepbeeld is 'n beeld in 'n persoon se gedagtes wat 'n prent, 'n getal, 'n simbool of 'n prosedure kan wees, wat aan 'n konsepdefinisie gekoppel word (Tall & Vinner, 1981:151).

Somtyds is dit nodig om 'n verkeerde konsepbeeld reg te stel omdat individue hulle eie konsepbeelde genereer wat nie altyd korrek is nie (Tall & Vinner, 1981:153). 'n Voorbeeld is deelnemer B3, wat onder die indruk was dat inverse (soos inverse bewerking) nimmereindigend beteken, want dit klink soos die Engelse woord "infinity" (sien inverse in par. 4.2.1). In die navorsing is die konsepdefinisies informele beskrywende wiskundewoorde. Met ander woorde, die konsepdefinisie is buigbaar en in informele taal. Leerders vergeet soms die konsepdefinisies terwyl hulle die konsepbeeld onthou (Tall & Vinner, 1981:153). Semiotiek (die wetenskap van tekens en simbole) is nodig om die wiskundetaal te bevorder (Ferretti *et al.*, 2022:2). Verder is modelleringstaal ook deel van wiskundetaal. Modelleringstaal is wanneer die leerder wiskundetaal gebruik om algebraïese reëls te manipuleer en/of lewenswerklike voorbeelde gebruik om wiskundeprobleme op te los (Czocher & Maldonado, 2015:332) (sien par. 2.3.2).

5.3 Navorsingsvraag

Watter riglyne kan gebied word vir graad 7 leerders se ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van taal en metakognitiewe strategieë?



Figuur 5-1: Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke

In figuur 5-1 word die riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke in die vorm van 'n legkaart uitgebeeld. Hierdie riglyne is uit die gevolgtrekkings van die empiriese data geskep.

5.3.1 Eerste riglyn: Gebruik dimensies van ontwikkeling van algebraïese denke

Die eerste riglyn vir graad 7-wiskunde-onderwysers is om bewus te wees van hoe leerders se algebraïese denke ontwikkel. Algebraïese denke ontwikkel aan die hand van vier dimensies, soos bespreek in paragraaf 5.2.1. Leerders se algemene inhoudsvelde (eerste dimensie) moet goed ontwikkel word vir leerders om gereed te wees vir algebraïese denke. Indien wiskunde-onderwysers die vier dimensies gebruik, ontwikkel leerders se algebraïese denke meer effektief.

5.3.2 Tweede riglyn: Onderrig algebraataal

Die huidige Suid-Afrikaanse kurrikulum vir graad 7-Wiskunde begin by die eienskappe van getalle en bewerkinge, maar leerders weet nog nie wat 'n veranderlike is nie. Graad 7-leerders word eers

in die derde kwartaal aan algebraïese uitdrukkings en vergelykings blootgestel (DvBO, 2011:39). Tydens die COVID-19-pandemie is daar 'n nuwe jaarlikse onderrigplan (JOP) 2021-2023 vrygestel, maar algebra word steeds in die derde kwartaal onderrig. Die tweede riglyn wat gestel word vir die ontwikkeling van algebraïese denke is om algebrataal aan die begin van die eerste kwartaal aan graad 7-leerders te onderrig. Indien leerders weet wat 'n veranderlike is, sal hulle konsepte soos eienskappe van bewerkings beter verstaan.

In die kurrikulum word kommutatiewe eienskappe aan leerders onderrig as: $a \times b = b \times a$. Eerstens moet die wiskunde-onderwyser die reël met getalle toets en dan van voorbeelde gebruik maak om kommutatiewe eienskappe aan leerders te verduidelik. Daarna moet onderwysers aan leerders verduidelik dat daardie veranderlikes gebruik word om 'n reël te toets. Die substitusiemetode word gebruik om te bepaal of die reël waar is vir telgetalle, heelgetalle, desimale getalle en breuke. Daar moet ook duidelik en herhaaldelik aan leerders gesê word dat die konstante waarde altyd voor die veranderlike staan, byvoorbeeld $4x$ en nie $x4$ nie. Onderwysers moenie aanneem dat leerders weet dat die bewerking tussen die konstante en veranderlike vermenigvuldiging is nie. Tydens die algebrataal-les moet die verskil tussen 'n algebraïese uitdrukking en algebraïese vergelyking aan die hand van voorbeelde beklemtoon word.

5.3.3 Derde riglyn: Onderrig in korrekte wiskundetaal

Die derde riglyn vir die ontwikkeling van algebraïese denke is vir onderwysers om op korrekte wiskundetaal te fokus. Om wanbegrippe te voorkom, moet korrekte wiskundetaal ten alle tye gebruik word en onderwysers moet leerders reghelp indien hulle nie die korrekte algebrataal gebruik nie (Florio, 2020:1). Anglisismes soos *parallele lyne* in plaas van *ewewydige lyne* en *distansie* in plaas van *afstand* moet aan Afrikaanse leerders uitgewys word. Semiotiese taal en modelleringstaal vorm deel van die wiskundetaal wat leerders vir die ontwikkeling van algebraïese denke nodig het (Ferretti *et al.*, 2022:2).

Litke (2020:5) verduidelik hoe om wiskundetaal in vyf stappe aan leerders te onderrig. Die eerste stap is om algebraïese prosesse aan leerders te onderrig, soos om formules te gebruik. In stap 2 word meer buigbare algebraprocedures in korrekte wiskundetaal verduidelik. Derdens moet verwantskappe aan leerders verwoord word (Litke, 2020:7). Dit sluit verwantskappe tussen 'n verskeidenheid voorstellings (soos tabelle, grafieke en invoer-uitvoerdiagramme) in. Die vierde stap is om konsepbeelde verbaal aan konsepdefinisies te koppel. 'n Konsepbeeld kan enige vorm van gedagtebeeld aanneem – prente of simbole (Tall & Vinner, 1981:151). Die laaste stap is om

verwantskappe tussen bekende en minder bekende wiskunde-idees te trek (Litke, 2020:8). Graad 7-leerders se algebraïese denke kan nie sonder korrekte wiskundetaal ontwikkel nie.

5.3.4 Vierde riglyn: Onderrig eksponente en wortels met konkrete hulpmiddels

Die meeste graad 7-leerders is in staat om algebraïese vergelykings met gemak op te los indien daar nie eksponente of wortels in is nie. Tans word eksponente en wortels in die eerste kwartaal onderrig en algebraïese vergelykings in die derde kwartaal. Leerders sukkel om die konsepte by mekaar te bring. Die vierde riglyn wat gestel word vir die ontwikkeling van algebraïese denke is om eksponente en wortels terselfdertyd as algebraïese vergelykings te onderrig en verwantskappe aan te dui. Leerders moet bewus wees van die verskil tussen $2x$ en x^2 . Weereens kan dit nie as vanselfsprekend aanvaar word dat leerders weet dat die inverse van magsverheffing worteltrekking is nie. Wortels en eksponente moet visueel en/of konkreet aan leerders verduidelik word en leerders moet die geleentheid kry om die konsep in te oefen.

5.3.5 Vyfde riglyn: Ruim wanbegrippe uit die weg

Die vyfde riglyn wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke gestel word, handel oor die konsep van gelykheid. Vele leerders het 'n wanbegrip van gelykheid. Indien leerders nie weet wat die gelykaanteken beteken nie, sal algebraïese denke nie ontwikkel nie (Madej, 2022:1). Die gelykaanteken kan met 'n weegskaal vergelyk word (Fyfe *et al.*, 2020:67). Wanneer die skaal gebalanseerd is, dan is hoeveelhede aan albei kante dieselfde. Die weegskaalles was vir die meeste van die deelnemers 'n suksesvolle intervensie.

Verder moet leerders nie slegs blootgestel word aan algebraïese vergelykings waar die onbekende waarde aan die linkerkant en konstante waarde aan die regterkant van die vergelyking is nie (Khalid *et al.*, 2020:4169). Indien leerders die konsep van gelykheid goed verstaan, sal hulle in staat wees om algebraïese vergelykings met behulp van die isolasiemetode op te los. Die eerste stap van die isolasiemetode is herstrukturering. Byvoorbeeld, $4x - 3 = 3^2$ se herstruktureringstap is $4x = 9 + 3$ (die drie word weerskante bygetel), dit wil sê: $4x = 12$. Dan kan die leerder met 4 deel en die oplossing is dan $x = 3$. Om 'n algebraïese vergelyking so op te los, val onder die metakognitiewe strategie genaamd monitering, omdat die leerder die stappe deurlopend moet monitor. Evaluering vind plaas wanneer die leerder die substitusiemetode gebruik om die oplossing te toets.

5.3.6 Sesde riglyn: Stel metakognitiewe strategieë bekend

Om metakognitiewe strategieë aan leerders te onderrig bevorder die ontwikkeling van algebraïese denke (Öztürk, 2021:3). Die sesde riglyn vir die ontwikkeling van algebraïese denke is om leerders met metakognitiewe strategieë te bemagtig. Metakognitiewe strategieë bestaan uit beplanning, monitering, evaluering en refleksie (sien par. 2.3.1). Metakognitiewe strategieë (MKS) sluit in om vrae te vra, doelstelling, ken struikelblokke, ken wiskundewoorde, probleemoplossing, hardop dink, om 'n joernaal te hou, samewerking en modellering. Hierdie MKS word effektief aan leerders onderrig wanneer die metakognitiewe strategiewiel wat deur die navorser ontwerp is, gebruik word. Hardop dink is die MKS wat die meeste leerders suksesvol gebruik omdat leerders hulledenkprosesse monitor (Djudin, 2017:126). In die Vierde Industriële Revolusie word daar van leerders verwag om as selfgerigte leerders te kan funksioneer (Du Toit & Blignaut, 2019:514). MKS is 'n belangrike komponent van selfgerigte leer wat aan leerders selfvertroue bied. Dit is nodig vir die ontwikkeling van algebraïese denke (Karlen, 2016:254).

5.3.7 Sewende riglyn: Skep 'n “dinkklaskamer”

Die sewende riglyn wat vir die ontwikkeling van algebraïese denke gestel word, is om 'n “dinkklaskamer” en leeromgewing te skep wat leergesentreerd is. Data van die WLA en AT is met mekaar vergelyk en leerders was tydens die WLA meer gemotiveerd om oor algebra te dink, omdat leerders voor uitveerbare skryfborde gestaan het. Die AT het in 'n tradisionele leeromgewing plaasgevind en die meeste deelnemers het meer motivering nodig gehad om deel te neem. 'n “Dinkklaskamer” het uitveerbare skryfborde waar leerders in ewekansige groepe van drie leerders kan staan en werk (Liljedahl *et al.*, 2021:3). Leerders het meer vrymoedigheid om te waag indien die skryfoppervlak maklik kan uitvee. Leerders se algebraïese denke ontwikkel wanneer leerders die geleentheid kry om hulle gedagtes te verwoord en oor algebra kan kommunikeer (Litke, 2020:3).

5.3.8 Agtste riglyn: Trek verwantskappe tussen algebra en patrone

Die laaste riglyn vir die ontwikkeling van algebraïese denke is om getalpatrone te gebruik as voorkennis om algebra aan graad 7-leerders bekend te stel. Getalpatrone vorm deel van vroeë algebra en om die reël van 'n lineêre patroon te gebruik, bevorder die ontwikkeling van algebraïese denke (Demonty *et al.*, 2018:2).

In die Intermediêre Fase word formele algebra nie onderrig nie, maar slegs numeriese en meetkundige patrone, wat dien as vroeë algebra. In die graad 7-kurrikulum word patrone kort

voor algebra onderrig, maar die riglyn wat ontwikkel is, is dat wiskunde-onderwysers die verband tussen patrone en algebra aan graad 7-leerders moet beklemtoon. Om die *n*de term te bepaal, verg vroeë algebraïese denke (Biza *et al.*, 2019:1107). Die numeriese en meetkundige patrone moet in 'n verskeidenheid voorstellings aan leerders gebied word. Invoer- en uitvoerdiagramme moet in albei rigtings gebied word sodat leerders algebraïese vergelykings kan oplos en inverse bewerkings kan oefen om algebraïese denke te ontwikkel. Leerders het genoeg geleenthede nodig om algebraïese denke te oefen (Ayieko, 2018:30). Indien graad 7-wiskunde-onderwysers nie genoeg geleenthede vir leerders bied nie, of nie genoeg tyd en aandag aan die inleiding tot algebra gee nie, sal leerders se algebraïese denke nie optimaal ontwikkel nie.

5.4 Gevolgtrekkings en aanbevelings

Die navorser het tot die gevolgtrekking gekom dat swak algebrataal in graad 7 na swak algebraprestasies lei, wat Suid-Afrikaanse wiskundeprestasie benadeel. Deur algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë in graad 7 te ontwikkel, verbeter nie net die graad 7-algebraprestasies nie, maar lê 'n grondslag vir onderrig van algebra vir opleiding op sekondêre en tersiêre vlak. Omdat algebra die “hekwag” van wiskunde is (Powell *et al.*, 2019:1), is voldoende algebraïese denke nodig om in wiskunde te presteer.

Graad 7-leerders se algebraïese denke ontwikkel aan die hand van die vier dimensies. Daarom beveel die navorser aan dat die agt riglyne wat geskep is vir die ontwikkeling van algebraïese denke gevolg word. 'n Volgende aanbeveling is dat nie net algebra nie, maar ook wiskunde oor die algemeen met die korrekte wiskundetaal aan leerders onderrig word. Leerders met swak wiskundetaal ervaar meer uitdagings in wiskunde, wat hulle akademiese prestasie negatief beïnvloed (Wessel, 2020:654). Wiskundetaal speel 'n belangrike rol in die leer van graad 7-algebra, want (wiskunde-) taal is die medium waarin leerders dink en redeneer (Wessel, 2020:655). Ziegler *et al.* (2021:209) is van mening dat indien algebra soos 'n taal aan leerders onderrig word en daar gefokus word op reëls en gesprekke, het leerders konseptuele begrip van algebraïese uitdrukkings. Daar is 'n noue verband tussen selfgerigte leer en goeie wiskundeprestasies (Alotaibi & Alanazi, 2021:117). Daarom beveel die navorser aan dat wiskunde-onderwysers leerders met selfgerigteleervaardighede bemagtig deur aan hulle metakognitiewe strategieë te onderrig. Om leerders te bemagtig met metakognitiewe strategieë bevorder die ontwikkeling van algebraïese denke.

5.5 Beperkings

Hierdie navorsing het plaasgevind tydens die COVID-19-pandemie, waar leerders die heeltyd maskers moes dra. Die deelnemers het in hulle graad 6-jaar slegs elke tweede week skool bygewoon omdat die COVID-19-protokol slegs 50% van leerders op die skoolperseel toegelaat het. Dit wil sê dat die deelnemers in die graad 6-jaar baie akademiese tyd verloor het. Al het die wiskunde-onderwyser huiswerk gegee wat leerders in hulle tuisweek moes doen, is dit nie dieselfde as kontakssessies nie. Die onderwysdepartement het ook aan die einde van 2020 toegelaat dat graad 4- tot 6-leerders se wiskundepunt gekondoneer word en daarom het al die leerders geslaag, al het sommige leerders nie die nodige wiskunde bemeester nie.

'n Tweede beperking is dat die navorser te min tyd met die graad 7-leerders gehad het. Die navorser sou graag die deelnemers se algebraïese denke in die hoërskool ook wou ondersoek, veral in kwartaal 3 van die graad 8-jaar, omdat dit die eerste keer is wat die deelnemers weer met algebra te doen kry.

'n Derde beperking is dat al die deelnemers min of meer dieselfde wiskunde-agtergrond het omdat hulle deur dieselfde wiskunde-onderwysers per graad (graad 4–6) onderrig is. Dit veroorsaak dat dieselfde wanbegrippe (veral oor die gelykaanteken) aan al die leerders onderrig is. Ten spyte van bogenoemde beperking het die navorsing tot die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke bygedra.

5.6 Bydrae van die navorsing

Hierdie navorsing het bygedra tot die navorser se eie onderwyspraktyk, leerders se leer (ontwikkeling van algebraïese denke) en ander graad 7-wiskunde-onderwysers se onderrigmetodes. Die navorsing kan ook moontlik bydra tot die graad 7-Wiskundekurrikulum deur algebrataal aan die begin van die graad 7-jaar te onderrig, in plaas van eers in die derde kwartaal.

OGN dra deur inheemse navorsingsteorie tot praktyk by (Trimmer, 2020:2). Dit wil sê dat die navorser haar onderwyspraktyk verbeter deur middel van navorsing en haar inheemse kennis van die leeromgewing. Die navorser was bewus van die swak wiskundeprestasies in haar onderrigpraktyk en het deur middel van die navorsing oplossings probeer vind vir leerders se ontwikkeling van algebraïese denke. Omdat OGN 'n sikliese proses is, sal die navorser 'n volgende probleem, soos breuke of meetkunde, navors om 'n oplossing in die praktyk te kry.

Die volgende bydrae wat hierdie navorsing bied, is tot leerders se leerprosesse. Hierdie navorsing het wanbegrippe (soos wanbegrippe oor die gelykaanteken) wat in die literatuur aangeteken is, bevestig en hanteer. Omdat korrekte wiskundetaal algebraïese denke bevorder, baat die leerders by die navorsing. Die navorser het 'n metakognitiewe strategiese ontwerp om aan graad 7-leerders metakognitiewe strategiese praktiese te verduidelik. Hierdie leerders is deur middel van metakognitiewe strategiese bemagtig om in selfgerigte leerders te ontwikkel en lewenslange leerders te word.

Derdens is riglyne vir graad 7-wiskunde-onderwysers geskep om leerders se algebraïese denke te ontwikkel. Graad 7-wiskunde-onderwysers van ander skole kan hierdie riglyne gebruik om hulle onderrigpraktyk te verbeter. Korrekte wiskundetaal is oor alle onderwerpe van wiskunde belangrik, nie net algebra nie. Ander graad 7-leerders en onderwysers kan ook by die navorsing baat vind.

Die huidige graad 7-Wiskundekurrikulum onderrig algebra slegs in die derde en vierde kwartaal. In hierdie navorsing is daar bewys dat leerders eienskappe van getalle (kommutatiewe, assosiatiewe en distributiewe eienskappe) wat in kwartaal 1 onderrig word, beter verstaan as algebrataal ter voorbereiding verduidelik word. Die inhoud van die kurrikulum is voldoende, maar die jaarlikse onderrigplan (JOP) se volgorde kan meer effektief gerangskik word deur algebra in die eerste kwartaal in plaas van in die derde kwartaal te onderrig.

5.7 Aanbevelings vir toekomstige navorsing

In hierdie kwalitatiewe navorsing is OGN gebruik om data in te samel om die navorsingsvrae te beantwoord. Met behulp van die literatuuroorsig en empiriese data is die ontwikkeling van graad 7-leerders se algebraïese denke en wiskundetaal ondersoek. Die navorser het bepaal watter metakognitiewe strategiese 'n rol in die ontwikkeling van algebraïese denke speel. Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategiese is ontwikkel. Vir toekomstige navorsing kan 'n basislyn assessering as voortoets gebruik word. Die bogenoemde riglyne kan en intervensie kan toegepas word. Na afloop van die natoets kan die resultate van die natoets vergelyk word met die resultate van die voortoets.

'n Tweede aanbeveling vir toekomstige navorsing is om nie slegs kwalitatiewe navorsing te gebruik nie, maar eerder gemengde navorsing. Kwantitatiewe data-insamelingsinstrumente kan moontlik die OGN versterk en die bydrae tot navorsing verbreed.

VERWYSINGSLYS

- Alex, J. & Juan, A. 2017. Quality education for sustainable development: Are we on the right track? Evidence from the TIMSS 2015 study in South Africa. *Perspectives in Education*, 35(2):1-15. <https://journals.co.za/doi/pdf/10.18820/2519593X/pie.v35i2.1>
- Allsopp, D., Lovin, L.H. & van Ingen, S. 2017. Supporting mathematical proficiency: Strategies for new special education teachers. *Teaching Exceptional Children*, 49(4):273-283. <https://doi.org/10.1177/0040059917692112>
- Alotaibi, K. & Alanazi, S. 2021. The influences of conceptions of mathematics and self-directed learning skills on university students' achievement in mathematics. *European Journal of Education*, 56(1):117-132. <https://doi.org/10.1111/ejed.12428>
- Altarawneh, A.F. 2021. Mathematical Proficiency and Preservice Classroom Teachers Instructional Performance. *International Journal of Education and Practice*, 9(2):354-364. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1295515.pdf>
- Ansaldo-Leyva, J.C., Peralta-García, J.X., Encinas-Pablos, F.J., Cuevas-Salazar, O., Rangel-Lucas, L. & Londoño-Millán, N. 2019. Semiotic Representations of the Linear Function by Students Studying Administration. *International Education Studies*, 12(9):97-104. <https://doi.org/10.5539/ies.v12n9p97>
- Apsari, R.A. & Putri, R.I.I. 2020. Geometry Representation to Develop Algebraic Thinking: A Recommendation for a Pattern Investigation in Pre-Algebra Class. *Journal on Mathematics Education*, 11(1):45-58. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1237692>
- Astriani, D., Susilo, H., Suwono, H., Lukiati, B. & Purnomo, A. 2020. Mind mapping in learning models: A tool to improve student metacognitive skills. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 15(6):4-17. <https://www.learntechlib.org/p/217193/>
- Ayieko, R.A. 2018. The Relationship between Opportunities to Learn Algebra and Students' Algebra Achievement: A Comparative Study. *Global Education Review*, 5(3):29-56. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1193967>
- Babbie, E. & Mouton, J. 2001. *The practice of social research: South African edition*. Cape Town: (Cape Town: Oxford University Press Southern Africa).
- Bakar, M.A.A. & Ismail, N. 2019. Metacognitive learning strategies in mathematics classroom intervention: a review of implementation and operational design aspect. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1):em0555. <https://doi.org/10.29333/iejme/5937>
- Bakker, A. & Van Eerde, D. 2015. An introduction to design-based research with an example from statistics education. In. *Approaches to qualitative research in mathematics education*: Springer. pp. 429-466.
- Biccard, P. 2017. Mathematical modelling competencies of lower-achieving grade 7 learners. *Journal of Educational Studies*, 16(1):218-235. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-c23560c11>
- Biza, I., Hewitt, D., Watson, A. & Mason, J. 2019. Generalization Strategies in Finding the nth Term Rule for Simple Quadratic Sequences. *International Journal of Science and Mathematics Education*:1-22. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-019-10009-0>
- Bonner, S., Chen, P., Jones, K. & Milonovich, B. 2021. Formative assessment of computational thinking: Cognitive and metacognitive processes. *Applied Measurement in Education*, 34(1):27-45. <https://doi.org/10.1080/08957347.2020.1835912>

- Bozkurt, G. 2017. Social Constructivism: Does It Succeed in Reconciling Individual Cognition with Social Teaching and Learning Practices in Mathematics? *Journal of Education and Practice*, 8(3):210-218. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1131532>
- Breed, B. & Bailey, R. 2018. The influence of a metacognitive approach to cooperative pair problem-solving on self-direction in learning. *TD: The Journal for Transdisciplinary Research in Southern Africa*, 14(1):1-11. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-f99b3a07f>
- Bulut, A.S. 2021. An Empirical Investigation of Mathematics Learning Approaches and Metacognitive Awareness of Students. *Participatory Educational Research*, 8(4):84-102. <https://doi.org/10.17275/per.21.80.8.4>
- Burrows, P., Raymond, L. & Clarke, D. 2020. A powerful image of mathematical thinking, doing and being: The four proficiencies as verbs. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 25(3):3-5. <https://search.informit.org/doi/epdf/10.3316/informit.428800586191409>
- Çelik, H.C. 2020. Development of symbolic mathematics language literacy perception scale for junior high school students and analysis of literacy perceptions based on certain variables. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(3):327-343. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1555724>
- Chang, Y.-P., Lin, F.-L. & Yang, K.-L. 2020. A Mathematics teacher's learning in Design-based research: The brokering support through different collaborative groups. *ICMI STUDY*25:597.
- Chasanah, A.N. 2019. Cognitive Growth Learning Model to Improve the Students' Critical Thinking Skills. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 4(2):112-123. <https://journals.ums.ac.id/index.php/jramathedu>
- Chimoni, M. & Pitta-Pantazi, D. 2017. Parsing the notion of algebraic thinking within a cognitive perspective. *Educational Psychology*, 37(10):1186-1205. <https://doi.org/10.1080/01443410.2017.1347252>
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. 2018. Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1):57-76. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x>
- Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. 2019. Investigating early algebraic thinking abilities: a path model. In. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.
- Cobb, P., Jackson, K. & Dunlap, C. 2015. Design research: An analysis and critique. In. *Handbook of international research in mathematics education*: Routledge. pp. 493-515.
- Creswell, J.W. & Poth, C.N. 2016. *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications.
- Czoher, J.A. & Maldonado, L. 2015. A Mathematical Modeling Lens on a Conventional Word Problem. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,
- Daher, W., Anabousy, A. & Jabarin, R. 2018. Metacognition, Positioning and Emotions in Mathematical Activities. *International Journal of Research in Education and Science*, 4(1):292-303. DOI:10.21890/ijres.383184
- Daniels, H. 2016. *Vygotsky and Pedagogy: Classic Edition*. New York: Routledge.
- Demonty, I., Vlassis, J. & Fagnant, A. 2018. Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1):1-19. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9>

- Denke, J., Jarson, J. & Sinno, S. 2020. Making the Invisible Visible: Enhancing Information Literacy and Metacognition with a Constructivist Activity. *International Journal for the Scholarship of Teaching and Learning*, 14(2):7. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1278218>
- Desender, K. & Sasanguie, D. 2022. Math anxiety relates positively to metacognitive insight into mathematical decision making. *Psychological Research*, 86(3):1001-1013. <https://doi.org/10.1007/s00426-021-01511-8>
- Djudin, T. 2017. Using metacognitive strategies to improve reading comprehension and solve a word problem. *Journal of Education, Teaching and Learning*, 2(1):124-129. <https://DOI:10.26737/JETL.V2I1.151>
- Dogan, M.F. & Williams-Pierce, C. 2019. Supporting Teacher Proving Practices with Three Phases of Proof. *Teacher Education Advancement Network Journal*, 11(3):48-59. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1266388>
- Dogan, M.F. & Williams-Pierce, C. 2020. The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics*:1-18. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10002-3>
- du Toit-Brits, C. 2018. Die onderwyser as beoefenaar en bemiddelaar van selfgerigte leer. *Tydskrif vir Geesteswetenskappe*, 58(2):376-386. <https://journals.co.za/doi/pdf/10.17159/2224-7912/2018/v58n2a11>
- Du Toit, C. & Blignaut, H. 2019. Posisionering van voortgesette selfgerigte leervaardighede in een-en-twintigste-eeuse onderwys. *Tydskrif vir Geesteswetenskappe*, 59(4):512-529.
- Du Toit, S. & Kotze, G. 2009. Metacognitive strategies in the teaching and learning of mathematics. *Pythagoras*, 2009(70):57-67. <https://hdl.handle.net/10520/EJC20916>
- Engelbrecht, A. 2016. Kwalitatiewe navorsing: data- insameling en analise. In: Joubert, I.H., C. Lombard, K., ed. *Navorsing: 'n Gids vir die beginnervorsers*. Pretoria: Van Schaik uitgewers. pp. 109-129.
- Eriksson, H. & Eriksson, I. 2021. Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3):363-378. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10007-y>
- Ferretti, F. 2020. The Manipulation of Algebraic Expressions: Deepening of a Widespread Difficulties and New Characterizations. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1),
- Ferretti, F., Santi, G.R.P. & Bolondi, G. 2022. Interpreting difficulties in the learning of algebraic inequalities, as an emerging macro-phenomenon in Large Scale Assessment. *Research in Mathematics Education*:1-23. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.2010236>
- Flavell, J.H. 1979. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist*, 34(10):906.
- Florio, E. 2020. A Synergy between History of Mathematics and Mathematics Education: A Possible Path from Geometry to Symbolic Algebra. *Education Sciences*, 10(9):243. <https://doi.org/10.3390/educsci10090243>
- Fyfe, E.R., Matthews, P.G. & Amsel, E. 2020. College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104:65-85. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09947-2>
- Gallagher, T.L. & Fazio, X. 2019. Multiple layers: Education faculty reflecting on design-based research focused on curricular integration. *Qualitative Research in Education*, 8(1):27-59. <https://doi.org/10.17583/qre.2019.3795>

- Gilliam, S. 2019. Elevating diagnostic skills with logical reasoning. *The Nurse Practitioner*, 44(5):51-55. DOI: 10.1097/01.NPR.0000554675.55073.5a
- Ginga, U.A. & Zakariya, Y.F. 2020. Impact of a Social Constructivist Instructional Strategy on Performance in Algebra with a Focus on Secondary School Students. *Education Research International*, 2020, <https://doi.org/10.1155/2020/3606490>
- Girit, D. & Akyüz, D. 2016. Algebraic thinking in middle school students at different grades: Conceptions about generalization of patterns. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2):243-272. DOI: 10.17522/balikesirnef.277815
- Glassmeyer, D. & Edwards, B. 2016. How Middle Grade Teachers Think about Algebraic Reasoning. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(2):92-106.
- Grothérus, A., Jeppsson, F. & Samuelsson, J. 2019. Formative Scaffolding: how to alter the level and strength of self-efficacy and foster self-regulation in a mathematics test situation. *Educational action research*, 27(5):667-690. <https://doi.org/10.1080/09650792.2018.1538893>
- Güler, G. & Dikici, R. 2014. Examining prospective mathematics teachers' proof processes for algebraic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4):475-497. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.837528>
- Herrington, J., McKenney, S., Reeves, T. & Oliver, R. 2007. Design-based research and doctoral students: Guidelines for preparing a dissertation proposal. In. EdMedia+ Innovate Learning. Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). pp. 4089-4097.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. 1992. Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*:65-97.
- Hunter, J. 2015. Teacher Actions to Facilitate Early Algebraic Reasoning. *Mathematics Education Research Group of Australasia*,
- Jagals, D. & Van der Walt, M. 2016. Enabling metacognitive skills for mathematics problem solving: A collective case study of metacognitive reflection and awareness. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 20(2):154-164. <https://hdl.handle.net/10520/EJC191937>
- Junpeng, P., Marwiani, M., Chiajunthuk, S., Suwannatrai, P., Chanayota, K., Pongboriboon, K., ... Wilson, M. 2020. Validation of a Digital Tool for Diagnosing Mathematical Proficiency. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, 9(3):665-674. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1274724>
- Kaplan, H.A., Gulkilik, H. & Emul, N. 2021. Role of formal constraints in reasoning: an approach through 2D Euclidean geometry in undergraduate mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6):815-832. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1738578>
- Kapucu, M.S. 2019. Students' Experiences of Design-Based Research in Science Applications Course: A Design and Development Research. *International Journal of Progressive Education*, 15(5):70-91. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1232520>
- Karakus, F. 2018. Investigation of Pre-Service Teachers' Pedagogical Content Knowledge Related to Division by Zero. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 19(1):90-111.
- Karlen, Y. 2016. Differences in students' metacognitive strategy knowledge, motivation, and strategy use: A typology of self-regulated learners. *The Journal of Educational Research*, 109(3):253-265. <https://doi.org/10.1080/00220671.2014.942895>

- Kenan, K.X.-F. 2017. Using Linear and Quadratic Functions to Teach Number Patterns in Secondary School. *Australian Senior Mathematics Journal*, 31(2):42-52.
<https://search.informit.org/doi/abs/10.3316/informit.286344260331480>
- Khalid, M., Yakop, F.H. & Ibrahim, H. 2020. Year 7 Students' Interpretation of Letters and Symbols in Solving Routine Algebraic Problems. *The Qualitative Report*, 25(11):4167-4181.
<https://www.proquest.com/openview/1a57a90f297136d34acb0e14e9b5f224/1?pq-origsite=gscholar&cbl=55152>
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. 2001. *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: Mathematics Learning Study Committee. (Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, National Research Council, National Academy Press).
- Kızıltoprak, A. & Köse, N.Y. 2017. Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(1):131-145.
- Klichowicz, A., Lippoldt, D.E., Rosner, A. & Krems, J.F. 2021. Information stored in memory affects abductive reasoning. *Psychological Research*, 85(8):3119-3133.
<https://doi.org/10.1007/s00426-020-01460-8>
- Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. & Gardiner, A. 2016. Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, 97(6):65-68. <https://doi.org/10.1177/0031721716636877>
- Kontorovich, I. 2019. Why do students not check their solutions to mathematical problems? A field-based hypothesis on epistemological status. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(7):1050-1062.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1650304>
- Kwok, M., Vela, K., Rugh, M., Lincoln, Y., Capraro, R. & Capraro, M. 2020. STEM words and their multiple meanings: the intricacies of asking a clarifying question. *Communication Education*, 69(2):176-198. <https://doi.org/10.1080/03634523.2020.1723803>
- Leavy, P. 2017. Research design: Quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches.
- Ledibane, M., Kaiser, K. & van der Walt, M. 2018. Acquiring Mathematics as a Second Language: A Theoretical Model to Illustrate Similarities in the Acquisition of English as a Second Language and Mathematics. *Pythagoras*, 39(1):347. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-11fe0b00bc>
- Lemmer, E.M. 2015. "Navorsing voed my siel": die verkenning van passie en produktiwiteit in die vertellings van erkende navorsers: geesteswetenskappe. *Litnet Akademies: 'n Joernaal vir die Geesteswetenskappe, Natuurwetenskappe, Regte en Godsdienswetenskappe*, 12(3):211-238. <https://hdl.handle.net/10520/EJC182674>
- Liljedahl, P., Clarke, A. & Morrison, N. 2021. Building Thinking Classrooms: A Conversation With Dr. Peter Liljedahl. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 12(1):1-7.
<https://journals.library.columbia.edu/index.php/jmetc/article/view/8150>
- Ling, L. 2017. The power of the paradigm: Methods and paradigms in education research. In. *Methods and paradigms in education research*: IGI Global. pp. 19-41.
- Litke, E. 2020. Instructional practice in algebra: Building from existing practices to inform an incremental improvement approach. *Teaching and Teacher Education*:12.
<https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103030>
- Lombard, K. 2016. Steekproefneming. In: Joubert, I.H., C. Lombard, K., ed. *Navorsing: 'n Gids vir die beginnervorsers*. Pretoria: Van Schaik Uitgewers. pp. 93-106.

- Madej, L. 2022. Primary School Students' Knowledge of the Equal Sign—the Swedish Case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(2):321-343.
<https://doi.org/10.1007/s10763-020-10144-z>
- Maree, K. 2020. Planning a research proposal. In: Maree, K., ed. *First steps in research 3*. Pretoria: Van Schaik Publishers. pp. 26-53.
- Maree, K. & Pietersen, J. 2020. Sampling. In: Maree, K., ed. *First steps in research. 3*. Pretoria: Van Schaik Publishers. pp. 214-224.
- McKenney, S. & Reeves, T.C. 2014. Educational design research. In. *Handbook of research on educational communications and technology*: Springer. pp. 131-140.
- McKenney, S. & Brand-Gruwel, S. 2018. Roles and competencies of educational design researchers: One framework and seven guidelines. *Learning, design, and technology*, 41:1-26.
- McKenney, S. & Reeves, T.C. 2021. Educational design research: portraying, conducting, and enhancing productive scholarship. *Medical Education*, 55(1):82-92.
- Mentz, E. & De Beer, J. 2021. Cultural-historical activity theory as a lens in mixed methods research on self-directed learning. *South African Journal of Higher Education*, 35(5):163-183.
https://hdl.handle.net/10520/ejc-high_v35_n5_a10
- Moffett, P. & Eaton, P. 2019. The impact of the Promoting Early Number Talk project on classroom mathematics talk. *Early Child Development and Care*, 189(11):1763-1775.
- Molin, F., Haelermans, C., Cabus, S. & Groot, W. 2020. The effect of feedback on metacognition-a randomized experiment using polling technology. *Computers & Education*, 152:103885. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103885>
- Morris, J.E. & Paris, L.F. 2021. Rethinking arts-based research methods in education: enhanced participant engagement processes to increase research credibility and knowledge translation. *International Journal of Research & Method in Education*:1-14.
<https://doi.org/10.1080/1743727X.2021.1926971>
- Moss, D.L., Boyce, S. & Lamberg, T. 2019. Representations and Conceptions of Variables in Students' Early Understandings of Functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2):em0564.
- Mulligan, J., Oslington, G. & English, L. 2020. Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM*, 52:663-676.
<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9>
- Ndlovu, Z.A. & Chiromo, L. 2019. Pre-service mathematics teachers' development process in using manipulatives in number operations. *South African Journal of Childhood Education*, 9(1):1-11. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-1f91becc87>
- Nieuwenhuis. 2020a. Analysing qualitative data. In: Maree, K., ed. *First steps in research. 3*. Pretoria: Van Schaik. pp. 118-152.
- Nieuwenhuis, J. 2020b. Introducing Qualitative research. In: Maree, K., ed. *First steps in Research 3*: Van Schaik. pp. 56-77.
- Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. & Heinze, A. 2019. Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool/El desarrollo del razonamiento algebraico en educación primaria utilizando una balanza como herramienta de apoyo. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3):615-663.
<https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1612137>

- Ozturk, M. 2021. Cognitive and Metacognitive Skills Performed by Math Teachers in the Proving Process of Number Theory. *Athens Journal of Education*, 8(1):53-71.
- Öztürk, M. 2021. An embedded mixed method study on teaching algebraic expressions using metacognition-based training. *Thinking Skills and Creativity*, 39:100787.
- Park, J. & Kim, D.-W. 2017. How can students generalize examples? Focusing on the generalizing geometric properties. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(7):3771-3800. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00758a>
- Parmaxi, A. & Zaphiris, P. 2020. Lessons learned from a design-based research implementation: a researcher's methodological account. *International Journal of Research & Method in Education*, 43(3):257-270. <https://doi.org/10.1080/1743727X.2019.1671327>
- Pedro, M. & Van der Merwe, M. 2020. Taalonderwysers se perspektiewe aangaande vervlegte leer as onderrig-en leerbenadering vir die 21ste-eeuse leerder. *Litnet Akademies: 'n Joernaal vir die Geesteswetenskappe, Natuurwetenskappe, Regte en Godsdienswetenskappe*, 17(1):372-409. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-1d8da68c10>
- Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M. & Christou, C. 2019. Different Types of Algebraic Thinking: an Empirical Study Focusing on Middle School Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*:1-20. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10003-6>
- Pourdavood, R., McCarthy, K. & McCafferty, T. 2020. The Impact of Mental Computation on Children's Mathematical Communication, Problem Solving, Reasoning, and Algebraic Thinking. *Athens Journal of Education*, 7(3):241-253. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1256896>
- Pournara, C. 2020. Grade 9 learners' algebra performance: Comparisons across quintiles, insights from errors and curriculum implications. *South African Journal of Science*, 116(9-10):1-7. <http://dx.doi.org/10.17159/sajs.2020/8125>
- Powell, S.R., Gilbert, J.K. & Fuchs, L.S. 2019. Variables influencing algebra performance: Understanding rational numbers is essential. *Learning and Individual Differences*, 74:101758. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.101758>
- Powell, S.R., Berry, K.A. & Barnes, M.A. 2020. The role of pre-algebraic reasoning within a word-problem intervention for third-grade students with mathematics difficulty. *ZDM*, 52(1):151-163. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01093-1>
- Rademeyer, A. 2009. Suid-Afrika se wiskunde-krisis: Innoverende oplossings nou nodig. *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, 28(4):393-398. <https://hdl.handle.net/10520/ejc-aknat-v28-n4-a10>
- Radford, L. 2022. Introducing equations in early algebra. *ZDM—Mathematics Education*, 54(6):1151-1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>
- Radmehr, F. & Drake, M. 2019. Revised Bloom's taxonomy and major theories and frameworks that influence the teaching, learning, and assessment of mathematics: a comparison. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(6):895-920. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1549336>
- Rahayuningsih, S., Sirajuddin, S. & Nasrun, N. 2020. Cognitive flexibility: exploring students' problem-solving in elementary school mathematics learning. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, 6(1):59-70. <https://journals.ums.ac.id/index.php/jramathedu/article/view/11630>
- Reddy, V. & Hannan, S. 2018. TIMSS in South Africa: Making global research locally meaningful. *Pretoria: Human Sciences Research Council*. Retrieved August, 23:2019.

https://www.timss-sa.org/wp-content/uploads/2021/07/ReddyHannan_A-history-of-TIMSS-in-SA_2021.pdf

Reid, D.A. 2018. Abductive reasoning in mathematics education: Approaches to and theorisations of a complex idea. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(9):em1584. <https://doi.org/10.29333/ejmste/92552>

Riccomini, P.J., Smith, G.W., Hughes, E.M. & Fries, K.M. 2015. The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31(3):235-252. <https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995>

Rissanen, A. 2018. A Design-Based Approach to Course Planning and Development. *Education Reform Journal*, 3(2):78-87. <https://doi.org/10.22596/erj2018.0302.78.87>

Roberts, A. & le Roux, K. 2019. A commognitive perspective on Grade 8 and Grade 9 learner thinking about linear equations. *pythagoras*, 40(1):1-15. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-16142fa081>

Robertson, S.-A. & Graven, M. 2020. Language as an including or excluding factor in mathematics teaching and learning. *Mathematics Education Research Journal*, 32(1):77-101.

Roos, H. 2019. Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics*, 100(1):25-41. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z>

Saal, P.E., Van Ryneveld, L. & Graham, M.A. 2019. The relationship between using information and communication technology in education and the mathematics achievement of students. <http://hdl.handle.net/2263/75563>

Schraw, G. & Moshman, D. 1995. Metacognitive theories. *Educational psychology review*, 7(4):351-371. <https://doi.org/10.1007/BF02212307>

Sebsibe, A.S. & Feza, N.N. 2019. Assessment of Students' Conceptual Knowledge in Limit of Functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2):em0574. <https://doi.org/10.29333/iejme/6294>

Shore, B.M. 2021. Context Matters in Gifted Education. *Education Sciences*, 11(8):424. <https://doi.org/10.3390/educsci11080424>

Smith, C.R., Julie, C. & Gierdien, F. 2020. The integration of semiotic resources and modalities in the teaching of geometry in a Grade 9 class in a South African high school: The four cases of congruency. *South African Journal of Education*, 40(2),

Stahl, N.A. & King, J.R. 2020. Expanding approaches for research: Understanding and using trustworthiness in qualitative research. *Journal of Developmental Education*, 44(1):26-29. <https://www.jstor.org/stable/45381095>

Stephens, A.C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. & Murphy Gardiner, A. 2017. A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3):143-166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>

Stylianou, D.A., Stroud, R., Cassidy, M., Knuth, E., Stephens, A., Gardiner, A. & Demers, L. 2019. Putting early algebra in the hands of elementary school teachers: examining fidelity of implementation and its relation to student performance/El álgebra temprana en manos del docente de primaria: un análisis de la fidelidad de ejecución y su relación con el rendimiento de los escolares. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3):523-569. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604021>

Tall, D. & Vinner, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2):151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

- Thanh, N.C. & Thanh, T. 2015. The interconnection between interpretivist paradigm and qualitative methods in education. *American journal of educational science*, 1(2):24-27.
- Trimmer, K. 2020. Skilling up: evaluation of a design-based research methodology. *The Australian Educational Researcher*, 47(2):357-375. <https://doi.org/10.1007/s13384-019-00336-0>
- Tshuma, L. & Le Cordeur, M. 2017. Taal as hulpbron in intermediere fase wiskunde-onderrig in die Oos-Kaap: op soek na'n effektiewe pedagogiek vir wiskunde-onderrig. <https://hdl.handle.net/10520/EJC-a4a20f74c>
- Uygun, T. & Güner, P. 2019. Representation of algebraic reasoning in sets through argumentation. *International Journal of Contemporary Educational Research*, 6(2):215-229.
- Van der Walt, M. 2009. Studieoriëntasie en basiese woordeskat in wiskunde in die laerskool: navorsings-en oorsigartikel. *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, 28(1):378-392. <https://hdl.handle.net/10520/EJC20459>
- Van der Walt, M.S. 2014. Metakognitiewe bewustheid, selfgerigtheid in leer en een leerprestasie van voornemende wiskundeonderwysers vir die intermediere en senior fase: oorspronklike navorsing. *Suid-Afrikaanse tydskrif vir natuurwetenskap en tegnologie*, 33(1):1-9. <https://hdl.handle.net/10520/EJC163035>
- Van Zyl, S. & Mentz, E. 2019. Moving to deeper self-directed learning as an essential competency for the 21st century. *Self-directed learning for the 21st century: Implications for higher education*:67-102.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. & Van Dooren, W. 2020. Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM*, 52(1):1-16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vula, E., Avdyli, R., Berisha, V., Saqipi, B. & Elezi, S. 2017. The impact of metacognitive strategies and self-regulating processes of solving math word problems. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(1):49-59. DOI:10.26822/iejee.2017131886
- Wasserman, N.H. & Rossi, D. 2015. Mathematics and science teachers' use of and confidence in empirical reasoning: Implications for STEM teacher preparation. *School Science and Mathematics*, 115(1):22-34. <https://doi.org/10.1111/ssm.12099>
- Wessel, L. 2020. Vocabulary in learning processes towards conceptual understanding of equivalent fractions—specifying students' language demands on the basis of lexical trace analyses. *Mathematics Education Research Journal*, 32(4):653-681. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00284-z>
- Wilkie, K.J. 2020. Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalisation context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(2):315-336. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09955-6>
- Wilkinson, L.C. 2019. Learning language and mathematics: A perspective from Linguistics and Education. *Linguistics and Education*, 49:86-95. <https://doi.org/10.1016/j.linged.2018.03.005>
- Xu, A., Baysari, M.T., Stocker, S.L., Leow, L.J., Day, R.O. & Carland, J.E. 2020. Researchers' views on, and experiences with, the requirement to obtain informed consent in research involving human participants: a qualitative study. *BMC medical ethics*, 21(1):1-11. <https://doi.org/10.1186/s12910-020-00538-7>
- Ziegler, E., Edelsbrunner, P.A. & Stern, E. 2021. The benefit of combining teacher-direction with contrasted presentation of algebra principles. *European Journal of Psychology of Education*, 36(1):187-218. <https://doi.org/10.1007/s10212-020-00468-3>

Zydney, J.M., Warner, Z. & Angelone, L. 2020. Learning through experience: Using design based research to redesign protocols for blended synchronous learning environments. *Computers & Education*, 143:103678. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103678>

BYLAAG A: ETIEK GOEDKEURING

20 April 2021

Dear Dr Roux

ETHICS APPROVAL LETTER OF STUDY

Based on approval by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (NWU-NWU-EMELTEN-REC) on 19 April 2021, the NWU-EMELTEN-REC hereby approves your study as indicated below. This implies that the NWU-EMELTEN-REC grants its permission that, provided the general and specific conditions specified below are met and pending any other authorisation that may be necessary, the study may be initiated, using the ethics number below.

Study title: Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë														
Principal Investigator/Study Supervisor/Researcher: Dr Annalie Roux														
Student: Ms Mariliza Pieters														
Ethics number:														
N	W	U	-	0	0	0	0	1	-	2	1	-	A	2
Institution			Study Number					Year		Status				
<u>Status:</u> S = Submission; R = Re-Submission; P = Provisional Authorisation; A = Authorisation														
Application Type: Single study										Greater than minimal, but provides the prospect of direct benefit				
Commencement date: 13/04/2021														
Expiry date: 12/04/2022														
Risk:														
Approval of the study is provided for a year, after which continuation of the study is dependent on receipt and review of a twelve-monthly monitoring report and the concomitant issuing of a letter of continuation.														

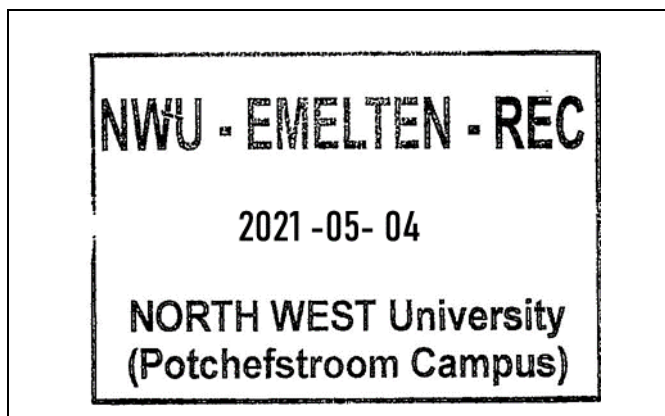
General conditions:

While this ethics approval is subject to all declarations, undertakings and agreements incorporated and signed in the application form, the following general terms and conditions will apply:

- The principal investigator/study supervisor/researcher must report in the prescribed format to the NWU-EMELTEN-REC:
 - twelve-monthly on the monitoring of the study, whereby a letter of continuation will be provided annually, and upon completion of the study; and
 - without any delay in case of any adverse event or incident (or any matter that interrupts sound ethical principles) during the course of the study.
- The approval applies strictly to the proposal as stipulated in the application form. Should any amendments to the proposal be deemed necessary during the course of the study, the principal investigator/study supervisor/researcher must apply for approval of these amendments at the NWU-EMELTEN-REC, prior to implementation. Should there be any deviations from the study proposal without the necessary approval of such amendments, the ethics approval is immediately and automatically forfeited.

BYLAAG B: BRIEF AAN OUERS VAN DEELNEMERS

The Faculty of Health Sciences Ethics Office of the North-West University is acknowledged for the use of their document with minor adjustments made by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (NWU-EMELTEN-REC).



INGELIGTE TOESTEMMINGVORM VIR DIE OUERS VAN GRAAD 7 LEERDERS WAT DEELNEEM AAN DIE NAVORSINGSPROJEK

TITEL VAN DIE STUDIE: Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë.

Etiek nommer: NWU – 00001-21A2

Studie promotor: Dr Annalie Roux

Nagraadse student: Mev Mariliza Pieters

Adress: 56 Republiek Straat, Baillie Park, Potchefstroom, 2531

Kontak nommer: 018 299 1895/ 084 580 5989

Geagte ouer/voog

Ek is Mariliza Pieters, u kind se Wiskunde-onderwyser. Ek is tans besig met 'n nagraadse studie in Wiskunde-onderwys by die Noordwes Universiteit, Potchefstroom kampus en daarom is vir my nodig om navorsing in Wiskunde-onderrig te doen. Ek het u kind gekies as deelnemer van die studie en ek het u toestemming nodig voordat u kind mag deelneem aan die studie.

Alle aktiwiteite vind in skooltyd, by die skool plaas. Ek beplan om vas te stel wat gebeur as Graad 7 leerders algebra aanleer met die regte wiskundetaal. Ek maak ook leerders bewus van metakognitiewe strategieë, wat die verstaan van wiskunde bevorder. My doel is om leerders te bemagtig om verantwoordelikheid vir eie leer te neem. Dit word selfgerigte leer genoem.

Neem u tyd om deur die inligtingstuk te lees. Voel vry om vrae te vra aan die persoon wat die navorsing aan u verduidelik. Dit is belangrik dat u tevrede is en dat u duidelik verstaan wat die navorsing behels. U is enige tyd welkom om die navorser te skakel by die nommer wat onderaan die bladsy voorsien is, indien u nie iets verstaan nie.

Hierdie navorsing is goed gekeur deur die **Noordwes Universiteit Opvoedkunde, Ekonomiese Bestuur Wetenskappe, Regte, Teologie, Ingenieurs en Natuurwetenskap Navorsing Etiek komitee (NWU-00001-21-A2)** en sal uitgevoer word soos gestaaf deur die etiese riglyne en beginsels van etiek in Gesondheid navorsing: "Principles, Processes and Structures (DoH, 2015)". Dit mag dalk nodig wees vir die navorsing etiek komitee of ander relevante persone om inspeksie van rekords van die navorsing te doen.

Waaroor gaan die navorsing?

- Ek beplan om:
 1. Wiskunde taal van leerders te assesseer, deur middel van 'n geskrewe taak.
 2. om met individuele deelnemers onderhoude te voer en vrae te vra oor metakognitiewe strategieë

Sal u kind baat vind by die navorsing?

- U kind sal meer geïnteresseerd raak in Wiskunde, wat hom/haar in staat sal stel om verantwoordelikheid vir eie leer te neem.
- Met behulp van korrekte wiskundetaal sal leerders algebra beter verstaan.

Hou die navorsing enige risiko vir jou kind in en hoe sal risiko voorkom word?

- Die risiko is minimaal en alle voorsorgmaatreëls is in plek om die risiko te voorkom.
- Die voordele van die navorsing is baie meer as die minimale voorsiene risiko.

Hoe sal u kind se identiteit beskerm word deur die navorsing?

- Elke deelnemer ontvang 'n navorsingskode en elke leerder sal anoniem bly tydens data-insameling.
- Alle data wat ingesamel word, is vertroulik en sal net met die betrokke leerder se ouers bespreek word.

Wat gebeur met die data wat ingesamel is?

- Die data word slegs vir navorsingsdoeleindes gebruik.

Hoe sal jou kind weet wat die resultate is van die navorsing

- 'n Terugvoer sessie word met elke deelnemer en sy/haar ouers gereël.

Word deelnemers betaal of is daar enige kostes betrokke om 'n deelnemer te wees?

- Deelnemers word nie betaal nie.
- Deelname aan die navorsing is gratis.

Is daar enige iets wat ek nog moet weet of doen?

- U kan die navorser skakel by 083 376 4012.
- U kan ook die Noordwes Universiteit Opvoedkunde, Bestuur en Ekonomiese Wetenskap, Regte, Teologie, Ingenieurs en Natuurwetenskap Navorsing Etiek komitee via Mev Villera le Roux by 018 299 4707 of villera.leroux@nwu.ac.za skakel.
- U sal 'n afskrif van hierdie getekende toestemming ontvang vir u eie doeleindes.

Bevestiging van ouer/voog

Deur te onderteken, stem ek _____ in dat die kinders

mag deel neem aan die navorsing by die skool.

Ek verklaar dat:

- Ek deur die inligting gelees het en dat ek verstaan wat die navorsing behels.
- Ek 'n geleentheid gekry het om vrae te vra.
- Ek verstaan dat my kind nie vergoed sal word vir die navorsing nie, maar dat dit ook nie geld kos nie.
- Ek verstaan dat as my kind die navorsing wil staak, sal hy/sy nie negatief beïnvloed word nie.

- Ek verstaan dat my kind se deelname beëindig mag word voordat die navorsing afgehandel is, indien die navorser dink dat dit in sy/haar beste belang is.

Geteken (plek) Potchefstroom op (datum) 2021

.....

Handtekening van ouer

Verklaring van persoon wat navorsingsproses verduidelik het

Ek (naam) Gwendi Foster verklaar dat:

- Ek die navorsing duidelik aan die persoon verduidelik het:
- Ek nie 'n tolk gebruik het nie, want ons praat albei Afrikaans.
- Ek het hom/haar aangemoedig om vrae te vra.
- Ek is tevrede dat die persoon alles verstaan wat ek aan hom/haar verduidelik het.
- Ek het die persoon tyd gegun om daaroor te dink.

Geteken in Potchefstroom op (datum) 2021

.....

Geteken deur persoon wat toestemming verwerf

Verklaring van navorser

Ek, Mariliza Pieters verklaar dat:

- Ek die inhoud van die dokument verduidelik het aan:
..... **of ek dit is verduidelik deur**
..... wie opleiding ontvang het vir die doeleindes.
- Ek nie 'n tolk gebruik het nie, want ons praat albei Afrikaans.
- Ek het hom/haar aangemoedig om vrae te vra.

- Ek is tevrede dat die persoon alles verstaan wat ek aan hom/haar verduidelik het.
- Ek het die persoon tyd gegun om daaroor te dink.

Geteken in Potchefstroom op (datum) 2021

M Pieters

Handtekening van navorser

BYLAAG C: BRIEF AAN DEELNEMERS



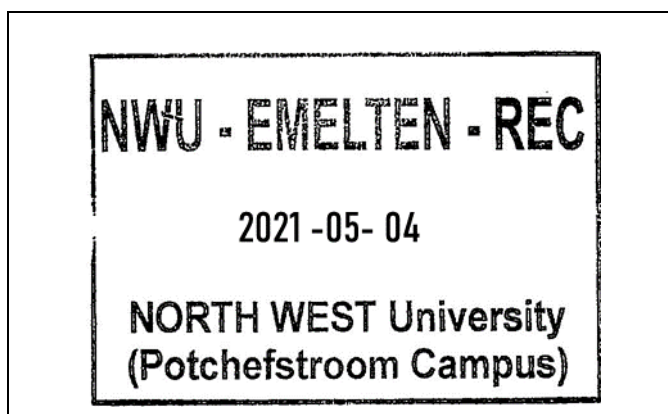
Private Bag X1290,
Potchefstroom
South Africa 2520

Tel: +2718 299-1111/2222

Fax: +2718 299-4910

Web: <http://www.nwu.ac.za>

The Faculty of Health Sciences Ethics Office of the North-West University is acknowledged for the use of their document with minor adjustments made by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (NWU-EMELTEN-REC).



INGELIGTE TOESTEMMINGVORM VIR DIE OUERS VAN GRAAD 7 LEERDERS WAT DEELNEEM AAN DIE NAVORSINGSPROJEK

TITEL VAN DIE STUDIE: Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë.

Etiëk nommer: NWU – 00001-21A2

Studie promotor: Dr Annalie Roux

Nagraadse student: Mev Mariliza Pieters

Adress: 56 Republiek Straat, Baillie Park, Potchefstroom, 2531

Kontak nommer: 018 299 1895/ 084 580 5989

Geagte ouer/voog

Ek is Mariliza Pieters, u kind se Wiskunde-onderwyser. Ek is tans besig met 'n nagraadse studie in Wiskunde-onderwys by die Noordwes Universiteit, Potchefstroom kampus en daarom is vir my nodig om navorsing in Wiskunde-onderwys te doen. Ek het u kind gekies as deelnemer van die studie en ek het u toestemming nodig voordat u kind mag deelneem aan die studie.

Alle aktiwiteite vind in skooltyd, by die skool plaas. Ek beplan om vas te stel wat gebeur as Graad 7 leerders algebra aanleer met die regte wiskundetaal. Ek maak ook leerders bewus van metakognitiewe strategieë, wat die verstaan van wiskunde bevorder. My doel is om leerders te bemagtig om verantwoordelikheid vir eie leer te neem. Dit word selfgerigte leer genoem.

Neem u tyd om deur die inligtingstuk te lees. Voel vry om vrae te vra aan die persoon wat die navorsing aan u verduidelik. Dit is belangrik dat u tevrede is en dat u duidelik verstaan wat die navorsing behels. U is enige tyd welkom om die navorser te skakel by die nommer wat onderaan die bladsy voorsien is, indien u nie iets verstaan nie.

Hierdie navorsing is goed gekeur deur die **Noordwes Universiteit Opvoedkunde, Ekonomiese Bestuur Wetenskappe, Regte, Teologie, Ingenieurs en Natuurwetenskap Navorsing Etiek komitee (NWU-00001-21-A2)** en sal uitgevoer word soos gestaaf deur die etiese riglyne en beginsels van etiek in Gesondheid navorsing: "Principles, Processes and Structures (DoH, 2015)". Dit mag dalk nodig wees vir die navorsing etiek komitee of ander relevante persone om inspeksie van rekords van die navorsing te doen.

Waaroor gaan die navorsing?

- Ek beplan om:
 1. Wiskunde taal van leerders te assesseer, deur middel van 'n geskrewe taak.
 2. om met individuele deelnemers onderhoude te voer en vrae te vra oor metakognitiewe strategieë

Sal u kind baat vind by die navorsing?

- U kind sal meer geïnteresseerd raak in Wiskunde, wat hom/haar in staat sal stel om verantwoordelikheid vir eie leer te neem.
- Met behulp van korrekte wiskundetaal sal leerders algebra beter verstaan.

Hou die navorsing enige risiko vir jou kind in en hoe sal risiko voorkom word?

- Die risiko is minimaal en alle voorsorgmaatreëls is in plek om die risiko te voorkom.
- Die voordele van die navorsing is baie meer as die minimale voorsiene risiko.

Hoe sal u kind se identiteit beskerm word deur die navorsing?

- Elke deelnemer ontvang 'n navorsingskode en elke leerder sal anoniem bly tydens data-insameling.
- Alle data wat ingesamel word, is vertroulik en sal net met die betrokke leerder se ouers bespreek word.

Wat gebeur met die data wat ingesamel is?

- Die data word slegs vir navorsingsdoeleindes gebruik.

Hoe sal jou kind weet wat die resultate is van die navorsing

- 'n Terugvoer sessie word met elke deelnemer en sy/haar ouers gereël.

Word deelnemers betaal of is daar enige kostes betrokke om 'n deelnemer te wees?

- Deelnemers word nie betaal nie.
- Deelname aan die navorsing is gratis.

Is daar enige iets wat ek nog moet weet of doen?

- U kan die navorser skakel by 083 376 4012.
- U kan ook die Noordwes Universiteit Opvoedkunde, Bestuur en Ekonomiese Wetenskap, Regte, Teologie, Ingenieurs en Natuurwetenskap Navorsing Etiek komitee via Mev Villera le Roux by 018 299 4707 of villera.leroux@nwu.ac.za skakel.
- U sal 'n afskrif van hierdie getekende toestemming ontvang vir u eie doeleindes.

Bevestiging van ouer/voog

Deur te onderteken, stem ek _____ in dat die kinders mag deel neem aan die navorsing by die skool.

Ek verklaar dat:

- Ek deur die inligting gelees het en dat ek verstaan wat die navorsing behels.
- Ek 'n geleentheid gekry het om vrae te vra.
- Ek verstaan dat my kind nie vergoed sal word vir die navorsing nie, maar dat dit ook nie geld kos nie.
- Ek verstaan dat as my kind die navorsing wil staak, sal hy/sy nie negatief beïnvloed word nie.

- Ek verstaan dat my kind se deelname beëindig mag word voordat die navorsing afgehandel is, indien die navorser dink dat dit in sy/haar beste belang is.

Geteken (plek) Potchefstroom op (datum) 2021

.....

Handtekening van ouer

Verklaring van persoon wat navorsingsproses verduidelik het

Ek (naam) Gwendi Foster verklaar dat:

- Ek die navorsing duidelik aan die persoon verduidelik het:
- Ek nie 'n tolk gebruik het nie, want ons praat albei Afrikaans.
- Ek het hom/haar aangemoedig om vrae te vra.
- Ek is tevrede dat die persoon alles verstaan wat ek aan hom/haar verduidelik het.
- Ek het die persoon tyd gegun om daaroor te dink.

Geteken in Potchefstroom op (datum) 2021

.....

Geteken deur persoon wat toestemming verwerf

Verklaring van navorser

Ek, Mariliza Pieters verklaar dat:

- Ek die inhoud van die dokument verduidelik het aan:
..... **of ek dit is verduidelik deur**
..... wie opleiding ontvang het vir die doeleindes.
- Ek nie 'n tolk gebruik het nie, want ons praat albei Afrikaans.
- Ek het hom/haar aangemoedig om vrae te vra.

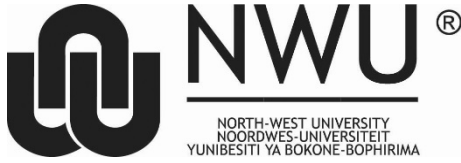
- Ek is tevrede dat die persoon alles verstaan wat ek aan hom/haar verduidelik het.
- Ek het die persoon tyd gegun om daaroor te dink.

Geteken in Potchefstroom op (datum) 2021

M Pieters

Handtekening van navorser

BYLAAG D: BRIEF AAN SKOOLBEHEERLIGGAAM



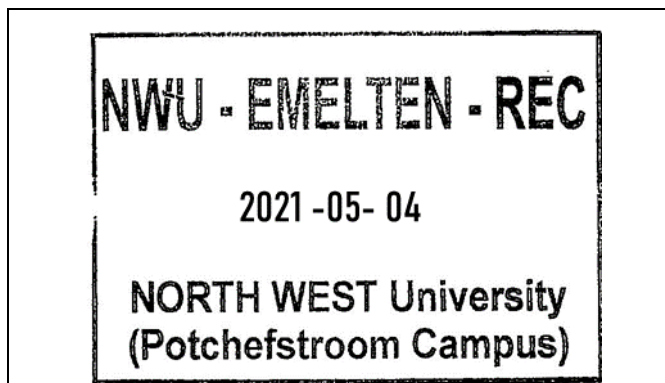
Private Bag X1290, Potchefstroom
South Africa 2520

Tel: +2718 299-1895

Email address: Annalie.roux@nwu.ac.za

Web: <http://www.nwu.ac.za>

The Faculty of Health Sciences Ethics Office of the North-West University is acknowledged for the use of their document with minor adjustments made by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (NWU-EMELTEN-REC).



The Chairperson
School Governing Body
Laerskool President Pretorius
Potchefstroom
North-West Province

**Request for permission to conduct research at Laerskool President Pretorius
in Potchefstroom**

TITLE OF THE RESEARCH STUDY: "Guidelines to develop algebraic thinking through mathematics languages and metacognitive strategies."

ETHICS REFERENCE NUMBERS: NWU – 00001-21A2

PRINCIPAL INVESTIGATOR: Dr Annalie Roux

POST GRADUATE STUDENT: Mrs Mariliza Pieters

ADDRESS: 56 Republiek Street, Baillie Park, Potchefstroom, 2531

CONTACT NUMBER: 018 299 1895 /084 580 5989

Dear Sir/Madam

I, Dr Annalie Roux, the promotor of Mrs Mariliza Pieters (a PhD student), hereby request your permission to allow her to conduct her research at your school. Mrs Pieters is a part-time student at the North-West University, studying towards a Doctor of Philosophy in Mathematics Education. This research forms part of the requirements of the above-mentioned degree.

The study aims to create guidelines to develop algebraic thinking through mathematics language and metacognitive strategies. The study seeks ways to improve grade 7 learners' algebraic thinking and would like to empower learners with metacognitive strategies.

Mrs. Pieters is an educator at Laerskool President Pretorius and selected the school as the site for conducting her research. This ought to ensure the safety of the learners since she is a staff member of the school. The research is expected to stretch over a period of 10 weeks from the day of commencement.

The findings of this study might be of great help in structuring guidelines and strategies for teaching mathematics in grade 7, since it is the introduction to algebra learning in the senior phase. Furthermore, learners ought to use the appropriate mathematics language to improve their mathematics learning.

This study has been approved by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (**NWU – 00001-21A2**) and will be conducted according to the ethical guidelines and principles of Ethics in Health Research: Principles, Processes and Structures (DoH, 2015) and other international ethical guidelines applicable to this study. It might be necessary for the research ethics committee members or other relevant people to inspect the research records.

You can contact Mrs Mariliza Pieters at 083 376 4012 or email her at marilizapieters4@gmail.com if you have any further questions or have any problems.

You can also contact the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee via Mrs Villera le Roux at 018 299 4707 or villera.leroux@nwu.ac.za if you have any concerns that were not answered about the research or if you have complaints about the research.

Thank you very much for your assistance.

Yours Sincerely



Dr A Roux (promoter of Mariliza Pieters)

Office telephone number: 018 299 1895 /Cell number 084 580 5989

Email address: Annalie.roux@nwu.ac.za

Declaration by SGB chairperson

By signing below, I, ... agree that Mrs Pieters may conduct her study at school.

I declare that:

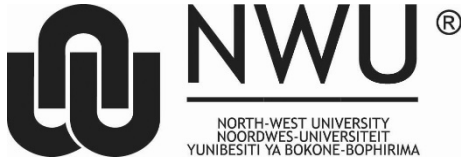
- I have read this information, or it was explained to me by a trusted person in a language that I understand.
- I had a chance to ask questions to both the person getting the permission from me, as well as the researcher and all my questions were answered.
- I understand that taking part in this study is out of free will and I have not been forced to give any child permission to take part.
- I understand that any child may choose to leave the study at any time and will not be treated in a negative way in such a case.
- I understand that any child might be asked to leave the study before it has finished, if the researcher feels it is in his/her best interest, or if they do not follow the agreed study plan.

Signed at (place) Potchefstroom on (date) 2021

.....

Signature of SGB chairperson

BYLAAG E: BRIEF AAN SKOOLHOOF



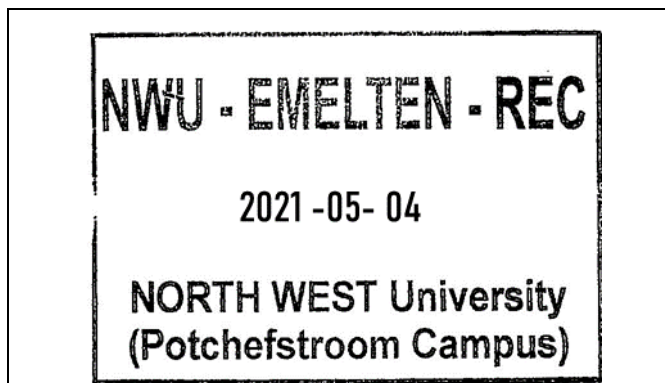
Private Bag X1290, Potchefstroom
South Africa 2520

Tel: +2718 299-1895

Email address: Annalie.roux@nwu.ac.za

Web: <http://www.nwu.ac.za>

The Faculty of Health Sciences Ethics Office of the North-West University is acknowledged for the use of their document with minor adjustments made by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (NWU-EMELTEN-REC).



The Principal
Laerskool President Pretorius
Potchefstroom
North-West province

**Request for permission to conduct research at Laerskool President Pretorius
in Potchefstroom**

TITLE OF THE RESEARCH STUDY: "Guidelines for the development of algebraic thinking through mathematics language and metacognitive strategies"

ETHICS REFERENCE NUMBERS: NWU – 00001-21A2

PRINCIPAL INVESTIGATOR: Dr Annalie Roux

POSTGRADUATE STUDENT: Mrs Mariliza Pieters

ADDRESS: 56 Republiek Street, Baillie Park, Potchefstroom, 2531

CONTACT NUMBER: 018 299 1895 / 084 580 5989

Dear Sir/ Madam

I, Dr Annalie Roux, the promotor of Mrs Mariliza Pieters (a PhD student), hereby request your permission to allow her to conduct her research at your school. Mrs Pieters is a part-time student at the North-West University, studying towards a Doctor of Philosophy in Mathematics Education. This research forms part of the requirements of the above-mentioned degree.

The study aims to create guideline to develop algebraic thinking through mathematics language and metacognitive strategies. The study seeks ways to improve grade 7 learners' algebraic thinking and would like to empower learners with metacognitive strategies.

The findings of this study might be of great help in structuring guidelines and strategies for teaching mathematics in grade 7, since it is the introduction to algebra learning in the senior phase. Furthermore, learners ought to use the appropriate mathematics language to improve their mathematics learning.

This study has been approved by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (**NWU – 00001-21A2**) and will be conducted according to the ethical guidelines and principles of Ethics in Health Research: Principles, Processes and Structures (DoH, 2015) and other international ethical guidelines applicable to this study. It might be necessary for the research ethics committee members or other relevant people to inspect the research records.

You can contact Mrs Mariliza Pieters at 083 376 4012 or email her at marilizapieters4@gmail.com if you have any further questions or have any problems.

You can also contact the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee via Mrs Villera le Roux at 018 299 4707 or villera.leroux@nwu.ac.za if you have any concerns that were not answered about the research or if you have complaints about the research.

Thank you very much for your assistance.

Yours Sincerely



Dr A Roux (promoter for Mariliza Pieters)

Office telephone number: 018 299 1895 /Cell number 084 580 5989

E-mail address: Annalie.roux@nwu.ac.za

Declaration by principal

By signing below, I, ... agree that Mrs Pieters may conduct her study at school.

I declare that:

- I have read this information, or it was explained to me by a trusted person in a language that I understand.
- I had a chance to ask questions to both the person getting the permission from me, as well as the researcher and all my questions were answered.
- I understand that taking part in this study is out of free will and I have not been forced to give any child permission to take part.
- I understand that any child may choose to leave the study at any time and will not be treated in a negative way in such a case.

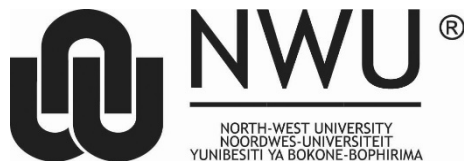
- I understand that any child might be asked to leave the study before it has finished, if the researcher feels it is in his/her best interest, or if they do not follow the agreed study plan.

Signed at (place) Potchefstroom on (date) 2021

.....

Signature of principal

BYLAAG F: BRIEF AAN ONDERWYSDEPARTEMENT



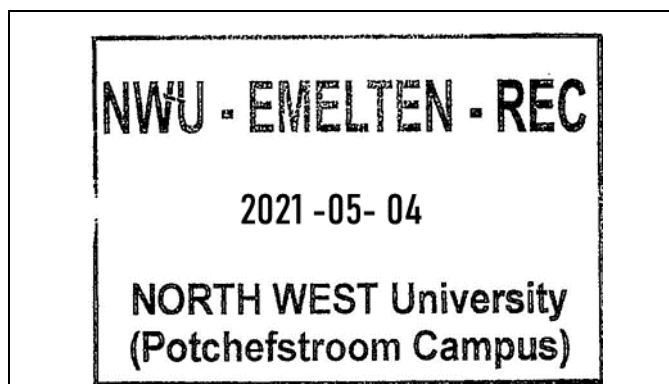
Private Bag X1290, Potchefstroom
South Africa 2520

Tel: +2718 299-1895

Email address: Annalie.roux@nwu.ac.za

Web: <http://www.nwu.ac.za>

The Faculty of Health Sciences Ethics Office of the North-West University is acknowledged for the use of their document with minor adjustments made by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (NWU-EMELTEN-REC).



Request for permission to conduct research at Laerskool President Pretorius in Potchefstroom

TITLE OF THE RESEARCH STUDY: 'Guidelines for the development of algebraic thinking through mathematics language and metacognitive strategies.'

ETHICS REFERENCE NUMBERS: NWU – 00001-21A2

PRINCIPAL INVESTIGATOR: Dr Annalie Roux

POSTGRADUATE STUDENT: Mrs Mariliza Pieters

ADDRESS: 56 Republiek Street, Baillie Park, Potchefstroom, 2531

CONTACT NUMBER: 018 299 1895 / 084 580 5989

Dear Sir/ Madam

I, Dr Annalie Roux, as the promotor for, Mrs Mariliza Pieters (a PhD student), hereby request your permission to conduct research at Laerskool President Pretorius located in Potchefstroom. Mrs Pieters is a part-time student at the North - West University, studying towards a Doctor of Philosophy in Mathematics Education. This research forms part of the requirement for the above-named degree.

The study aims to create guidelines to develop algebraic thinking through mathematics language and metacognitive strategies. The study seeks ways to improve grade 7 learners' algebraic thinking and would like to empower learners with metacognitive strategies.

The findings of this study might be of great help in structuring guidelines and strategies for teaching mathematics in grade 7, since it is the introduction to algebra learning. Furthermore, learners ought to learn the appropriate mathematics language to improve their mathematics learning.

This study has been approved by the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee (**NWU – 00001-21A2**) and will be conducted according to the ethical guidelines and principles of Ethics in Health Research: Principles, Processes and Structures (DoH, 2015) and other international ethical guidelines applicable to this study. It might be necessary for the research ethics committee members or other relevant people to inspect the research records.

You can contact Mrs Mariliza Pieters at 083 376 4012 or email her at marilizapieters4@gmail.com if you have any further questions or have any problems.

You can also contact the North-West University Education, Management and Economic Sciences, Law, Theology, Engineering and Natural Sciences Research Ethics Committee via Mrs Villera le Roux at 018 299 4707 or villera.leroux@nwu.ac.za if you have any concerns that were not answered about the research or if you have complaints about the research.

Thank you very much for your assistance.

Yours Sincerely



Dr A Roux (promoter for Mariliza Pieters)

Office telephone number: 018 299 1895 /Cell number 084 580 5989

E-mail address: Annalie.roux@nwu.ac.za

Declaration

By signing below, I, ... agree that Mrs Pieters may conduct her study at school.

I declare that:

- I have read this information, or it was explained to me by a trusted person in a language that I understand.
- I had a chance to ask questions to both the person getting the permission from me, as well as the researcher and all my questions were answered.
- I understand that taking part in this study is out of free will and I have not been forced to give any child permission to take part.
- I understand that any child may choose to leave the study at any time and will not be treated in a negative way in such a case.
- I understand that any child might be asked to leave the study before it has finished, if the researcher feels it is in his/her best interest, or if they do not follow the agreed study plan.

Signed at (place) Potchefstroom on (date) 2022

.....

Signature

BYLAAG G: ALGEBRA KLASAKTIWITEITE

WOORDSOEK

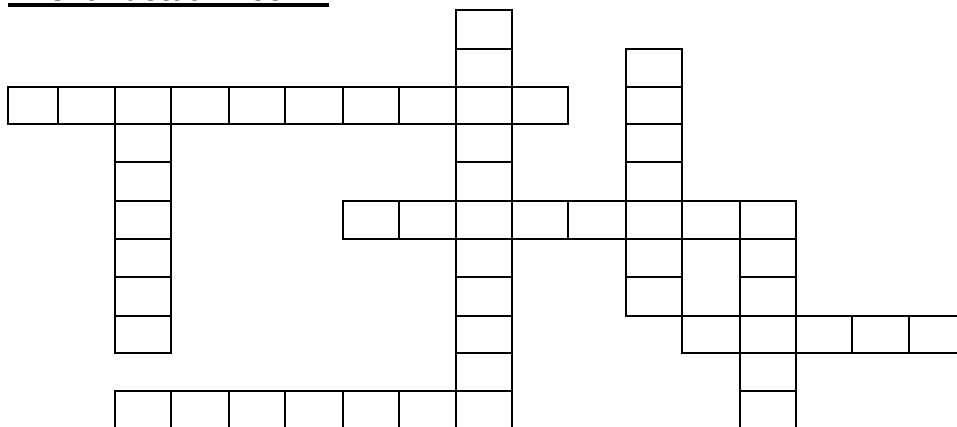
	W	I	S	K	U	N	D	E	☺	L	I	S
α	A	L	G	E	B	R	A	Σ	±	V	÷	O
O	F	K	O	N	S	T	A	N	T	E	C	M
Z	P	R	O	D	U	K	Z	Z	Z	R	Z	V
L	I	E	F	D	E	W	I	S	K	S	B	A
V	E	R	A	N	D	E	R	L	I	K	E	N
B	E	S	T	E	V	A	K	🔑	🌸	I	P	P
ℳ	K	W	O	S	I	ë	N	T	Y	L	Y	S

ALGEBRA, KONSTANTE, KWOSIËNT, PRODUK, SOM VAN, VERANDERLIKE, VERSKIL.

WOORDSOEK MEMORANDUM

												S
	A	L	G	E	B	R	A			V		O
		K	O	N	S	T	A	N	T	E		M
	P	R	O	D	U	K				R		V
										S		A
V	E	R	A	N	D	E	R	L	I	K	E	N
										I		
	K	W	O	S	I	ë	N	T		L		

Wiskundetaal week 2



6 LETTERS	7 LETTERS	8 LETTERS	9 LETTERS	10 LETTERS	11 LETTERS
GELYKE	FAKTORE	VEELVOUD		PRIEMGETAL	SAAMGESTELD
DALEND	STYGEN				
	INVERSE				

Pas kolom A by kolom B

	Woordeskat		Definisie	Antwoorde
1	Kommutatiewe eienskap		A. 81	1
2	Assosiatiewe eienskap		B. 7	2
3	Veelvoud van 9		C. Vergelyk twee hoeveelhede van dieselde soort	3
4	Priemgetal		D. $a \times b = b \times a$	4
5	Distributiewe eienskap		E. $f(12) = (1,2,3,4,6,12)$	5
6	Veranderlike		F 'n Kleinletter in die plek van n onbekende waarde	6
7	Verhouding		G. $0 \div 3$	7
8	Koers		H. Vergelyk twee hoeveelhede van verskillende soorte	8
9	Faktore van 12		I. $2(4 + 3) = (2 \times 4) + (2 \times 3)$	9
10	Ongedefinieerd		J. $k + (l + m) = (k + l) + m$	10

BYLAAG H: WOORDELYS

Naam: _____

Skryf of teken 'n beskrywing by elke wiskundige term.

Algebraïese taal/ Algebrataal	
Konstante	
Veranderlike	
Som van	
Verskil	
Kwosiënt	
Produk	
Priemgetal	
Saamgestelde getal	
Veelvoude	
Faktore	
Stygend	
Dalend	
Gelyk aan	
Telgetal	
Inverse bewerking	
HVDVOA	
Kommutatiewe eienskap	
Assosiatiewe eienskap	
Distributiewe eienskap	
Verhouding	
Koers	
Persentasie %	

BYLAAG I : ALGEBRATAAK

Wiskunde Graad 7

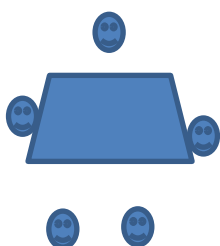
Die ontwikkeling van algebraïese denke.

Naam: _____ Deelnemer kode: _____

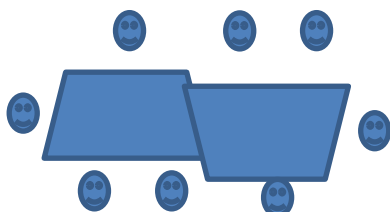
Afdeling Een

Vraag 1A:

Vyf kinders sit rondom 'n trapesium tafel.



Wanneer daar twee tafels langs mekaar gesit word, pas 8 kinders om die tafels.



Hoeveel kinders sal rondom drie tafels sit? Hoekom sê jy so?

Hoeveel kinders sal rondom 10 tafels sit? Hoekom sê jy so?

Vraag1 B:

Albert versamel albasters. Hy kry elke dag 'n sekere aantal albasters. Dit vermeerder elke dag. Hy het op dag1: 5 albasters gekry, op dag 2: 13 albasters en op dag 3: 21 albasters.

Hoeveel albasters sal Albert op dag 12 kry? Hoekom sê jy so?

Afdeling Twee

Vraag 2A

Sê of die volgende getalsinne waar of onwaar is en indien dit onwaar is, hoekom sê jy so?

$5+6=11-1$ _____

$\frac{10}{50}=10\%$ _____

$25+50=100-25$ _____

$125=100 \times 1 + 0 + 25$ _____

Bereken:

a $a + 12 = 30$

b $b - 15 = 28$

c $x - 110 = 175$

d $187 = 154 + y$

Vraag 2B

Sê of die volgende stellings waar of onwaar is. Gee 'n numeriese voorbeeld om jou antwoord te staaf:

Om 'n positiewe getal van 'n negatiewe getal af te trek, het dieselfde effek as om die optellingsinverses van die positiewe getal by te tel. _____

Om 'n positiewe getal van 'n negatiewe getal af te trek, is dieselfde as om aftrekking (minus) te doen. _____

Om 'n getal met 1 te vermenigvuldig het geen invloed op die uitkoms van die bewerking nie.

$0 \div 3 = 0$ _____

$3 \div 0 = 0$ _____

Vraag 2C

Is die kommutatiewe eienskappe net vir heelgetalle? Toets die stelling en verduidelik jou antwoord.

Werk die assosiatiewe eienskap vir aftrekking ook? Toets die stelling en verduidelik jou antwoord.

Verduidelik die distributiewe wet aan die hand van die omtrek van 'n reghoek

Vraag 2D

Jan is 3 jaar ouer as sy suster Susan. Susan is 14 jaar oud. Skryf 'n algebraïese vergelyking om te bepaal hoe oud Jan is.

Na R150 afslag kos 'n selfoon R500. Skryf 'n algebraïese uitdrukking om te bepaal wat het selfoon aanvanklik gekos.

'n Minibustaxi laai n passasiers by die lughawe op en ry na die naaste hotel. Toe die taxi weer by die hotel wegy, het die getal passasiers met 6 verminder. Daar was toe 7 passasiers in die taxi.

(a) Watter vergelyking beskryf hierdie gebeure?

A. $n - 6 = 7$

B. $7 - n = 6$

C. $n + 6 = 7$

D. $n - 7 = 6$

Hoekom sê jy so?

(b) Hoeveel passasiers was in die taxi toe dit vanaf die lughawe vertrek het?

Vraag 2E

Verduidelik wat die “-” teken beteken in die som.

$105 - 25 = 80$ _____

$-105 + 5 = -100$ _____

Skryf die volgende getalsinne in algebraïese taal

$a \times b = 2$ _____

$x + x + x + x = 8$ _____

$x \div 6 = 42$ _____

$(y + 2)(y + 2)$ _____

Verduidelik die betekenis van die “3” in m^3

Verduidelik wat $\sqrt{x}$ en $\sqrt[3]{x}$ beteken en wat is die verskil tussen die tekens?

Afdeling 3

Vraag 3A

Die eerste term in die reeks is, 5. Daarna volg 9, 13 en 17.

Teken die getalpatroon in die tabel op.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y									

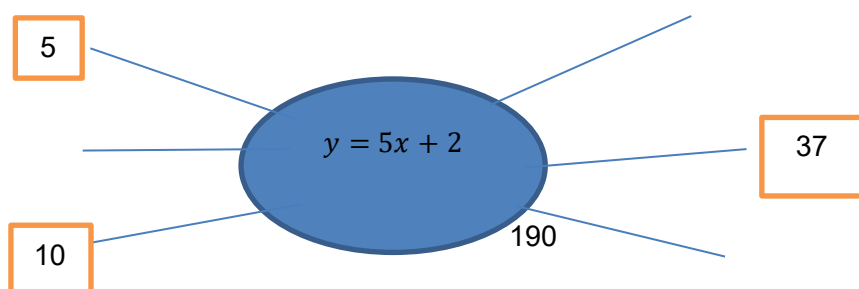
Wat let jy op? _____

Vraag 3B)

Skryf die bogenoemde getalpatroon in algebraïese taal

Wat sal die 100ste term wees? _____

Vraag 3C



Vraag 3D

Kom ons kyk na die vergelyking $82 + m = 23$. Ons moet 'n waarde vir m soek om die vergelyking waar te maak. Hier het ek 'n tabel gebruik om my te help om die waarde te soek.

	Vergelyking	Waar/Vals
Laat $m = -50$	$82 + (-50) = 82 - 50 = 32$	Vals
Laat $m = -30$	$82 + (-30) = 82 - 30 = 52$	Vals
Laat $m = -60$	$82 + (-60) = 82 - 60 = 22$	Vals
Laat $m = -59$	$82 + (-59) = 82 - 59 = 23$	Waar

Bepaal die waarde van t wat die vergelyking $28 - t = 82$ waar maak, deur van die probeer-en-verbetermetode gebruik te maak.

	Vergelyking	Waar/Vals

Oplossing:

+++++

Toets of die volgende stellings waar is:

'n Ewe getal plus 'n ewe getal is altyd gelyk aan 'n ewe getal.

'n Onewegetal minus 'n ewe getal is gelyk aan 'n onewegetal.

Om drie ewegetalle bymekaar te tel is altyd gelyk aan 'n onewegetal.

Om twee getalle te vermenigvuldig se uitkoms sal altyd groter wees as die twee getalle.

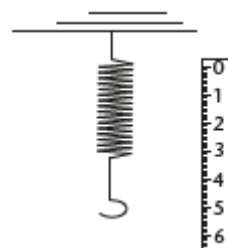
$a \div b = c$ c kan nie 0 wees nie.

Afdeling 4

Vraag 4A

'n Staalveer is aan 'n staander vas gemaak.

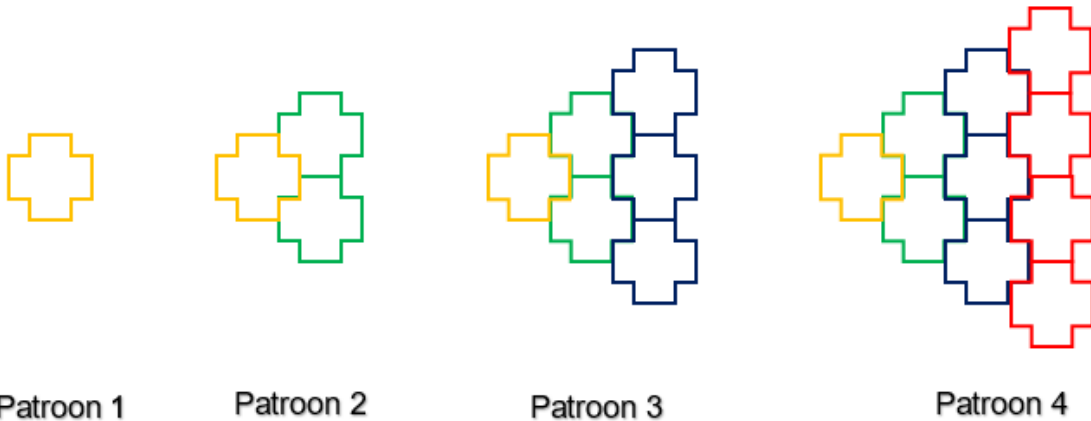
Massastukke word onder aan die veer vas gehaak. Die lengte wat die veer rek, bepaal die gewig van die massastuk. Dan word die veer gemeet met 1 massastuk, 2 massastukke ens.



Getal massa stukke	1	2	3	4	5	6	7	8
Lengte van veer in cm	48	56	64					

Voorspel hoe lank die veer sal rek wanneer daar 4, 5, 6, 7 en 8 massastukke op gehaak sal word. Skryf dit in die tabel.

Vraag 4B



Bestudeer die patroon.

Skryf die patrone as getalle neer _____

Hoeveel blokkies word in patroon 3 bygevoeg? _____

Het die ry 'n konstante verskil? Bewys jou antwoord. _____

Skryf 'n algebraïese uitdrukking vir die patroon _____

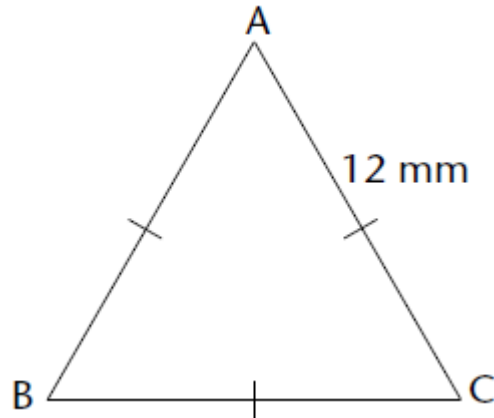


In die natuur kom 'n besondere getal patroon voor. Meeste natuurlike dinge bestaan uit, 1,2,3,5,8 of 13 dele. Die patroon gaan vir verewig aan tot by die aantal korrels sand van die see en sterre in die hemel.

Genesis 1:31: “Toe het God gekyk na alles wat Hy gemaak het, en dit was goed.”

Bestudeer die patroon en bepaal die 10 de getal in die patroon.

Vraag 4C



Skryf 'n algebraïese vergelyking en bewys dat $\hat{BAC} = 60^\circ$

Baie dankie vir jou bydrae tot die studie.

BYLAAG J: WAARNEMINGSKEDULE

Klasgesprek observasie skedule							
Onderwerp _____ Klas _____ Datum _____							
Navorser se vraag	Terugvoerder		Wiskundeterme gebruik			Terme nie gebruik nie	Navorser se terugvoer en intervensie
		Deelnemer van navorsing ja/nee	Terme korrek gebruik	Terme gedeeltelike korrek gebruik	Terme verkeerd gebruik		

BYLAAG K: TAAKGEBASEERDE ONDERHOUDSVRAE

<u>Semi gestruktureerde onderhoudsvrae.</u>
<u>Rooi=MKS</u> <u>Blou= algebraïese denke</u>
(Deelnemers het AT en metakognitiewe strategiewiel by hulle, tydens die onderhoud)
1. Wat is metakognitiewe strategieë?
2. Watse beplanning kan jy doen rondom Wiskunde?
3. Vra jy vrae oor Wiskunde, indien wel, vir wie?
4. Weet jy wat is jou struikelblokke in Wiskunde?
5. Watse woorde het mens nodig om algebra te doen?
6. Hoe los jy 'n woordsom op?
7. Is dit nodig om hardop te dink, indien wel, wat sê jy vir jouself?
8. Maak jy notas oor Wiskunde, indien wel, waar bêre jy dit en wanneer gebruik jy dit weer?
9. Kyk na jou antwoord van vraag 1a. Is jou antwoord reg en hoe weet jy dit?
10. Kyk na vraag 1b. Sou dit help om 'n prentjie vir die probleem te teken?
11. kyk na vraag 2a. Verduidelik wat beteken dit as 'n getal sin onwaar is.
12. Verduidelik hoe het jy die onbekende waarde bepaal?
13. Wat is die verskil tussen $0 \div 3$ en $3 \div 0$.
14. Kyk na vraag 2d. Hoe weet jy hoe oud is Jan?
15. Hoe het jy die afslag op die selfoon bereken?
16. Het minus een of meer betekenisse? Verduidelik vir my.

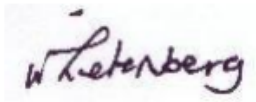
17. Kyk na vraag 4b. Verduidelik hoe die patroon groei.
18. Hoe seker is jy jou antwoord van vraag 4c is reg?
19. Watter metakognitiewe strategieë gebruik jy graag?
Maak aantekeninge van wiskundetaal (korrek en verkeerd)

BYLAAG L: VERKLARING VAN TAALVERSORGER

VERKLARING DEUR TEKSREDIGEERDER

Ek verklaar hiermee dat ek die teksredigering van hierdie skripsie, getiteld *Riglyne vir die ontwikkeling van algebraïese denke deur middel van wiskundetaal en metakognitiewe strategieë*, voorgelê ter vervulling van die vereistes vir die graad Philosophiae Doctor in Wiskunde-onderwys in die Fakulteit Opvoedkunde aan die Potchefstroomkampus van die Noordwes-Universiteit, hanteer het. Ek het nie die finale dokument voor inhandiging deurgegaan nie.

21 November 2022

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'W. Liebenberg', is shown on a light-colored background.

Wilna Liebenberg

MA Toegepaste Linguistiek

SAVI-geakkrediteerde teksredigeerder en vertaler

BYLAAG M: SERTIFIKAAT VAN ETIEKOPLEIDING



Private Bag X6001, Potchefstroom
South Africa 2520

Tel: 018 299-1111/2222
Web: <http://www.nwu.ac.za>

Research Ethics Committee of the Faculty of
Education (EduREC)

Faculty of Education

Tel: 018 295 2079
Email: Jako.Olivier@nwu.ac.za

4 September 2020

PROOF OF ATTENDANCE AND ASSESSMENT

Dear Mariliza Pieters

This letter certifies that the abovementioned individual attended a 1-day online workshop on 29 August 2020 and completed online assessment on:

Research Ethics for Education

The workshop was presented Prof. Jako Olivier, Chairperson of the Research Ethics Committee of the Faculty of Education (EduREC).

This letter of attendance, as proof of ethics training and assessment, is valid for 3 years and expires on 29 August 2023.

Yours sincerely

Prof JAK Olivier

Chairperson: Research Ethics Committee of the Faculty of Education (EduREC)

BYLAAG N: TURNITIN VERSLAG



Digital Receipt

This receipt acknowledges that **Turnitin** received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author:	MARILIZA PIETERS
Assignment title:	Turnitin
Submission title:	20884249:24_NOV_Mariliza_Pieters_Finale_proefskrif_sonder....
File name:	f9c10dc4cf_24_NOV_Mariliza_Pieters_Finale_proefskrif_sonde...
File size:	15.29M
Page count:	170
Word count:	38,658
Character count:	224,341
Submission date:	26-Nov-2022 08:00AM (UTC-0800)
Submission ID:	1963598314



Riglyne vir die ontwikkeling van
algebraïese denke deur middel van
wiskundetaal en metakognitiewe
strategieë

ME Pieters
orcid.org/0000-0002-1525-7170