DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN KWADRATIESE VORME IN ONAFHANKLIKE STOGASTIESE VERANDERLIKES MET TOEPAS= SING OP SEKERE PASSINGSTOETSE

---

deur T. de Wet

Proefskrif voorgelê ter nakoming van die vereistes vir die graad Doctor Scientiae in die Fakulteit Natuurwetenskappe aan die Potchefstroomse Universiteit vir Christelike Hoër Onderwys

Potchefstroom
Januarie 1972

INHOUD

HOOFSTUK 1

INLEIDING EN OPSOMMING

1. 1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk word daar eerstens 'n oorsig gegee van die stogastiese proses benadering tot die bepaling van die asimptotiese verdeling van sekere passingstoetsgroothede. (Sien bv. Anderson en Darling (1952); Kac, Kiefer en Wolfowitz (1955); Parzen (1964) Bl. 99). Daar word ook gedui op sekere probleme van hierdie benadering wat veroorsaak dat dit nie toegepas kan word in gevalle wat ons graag sou wou beskou nie.

Vervolgens gee ons 'n toetsstatistiek wat gebasseer is op rangorde statistieke en wat nou verwant is aan die sogenaamde Cramér-Smirnov statistiek. Indien die stogastiese proses benadering op hierdie statistiek toegepas word, sal bogemelde probleem ook hier voorkom. As alternatiewe benadering word aangetoon hoedat die statistiek effektief geskryf kan word as 'n kwadratiese vorm in onafhanklik en iden= ties verdeelde stogastiese veranderlikes. Die probleem herlei dus na die bepaling van die asimptotiese verdeling van 'n kwadratiese vorm en hierdeur word die pro= bleem hierbo gemeld, vermy.

In die daaropvolgende paragraaf word 'n kort samevatting van die inhoud van elke hoofstuk gegee. Aan die einde van die hoofstuk word sekere notasies, wat deurgaans gebruik word, verklaar.

1. 2 STOGASTIESE PROSES BENADERING

Gestel ons het 'n onafhanklike steekproef van grootte n uit 'n populasie met kontinue distribusie funksie (df) F en gestel F_n is die empiriese df. van die data.

As toetsstatistiek kan die Cramér-Smirnov statistiek, nl.

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F_o(x)]^2 W(F_o(x))\, dF_o(x) \qquad (1.2.1)$$

gebruik word. W (≥ 0) is hier 'n gewigsfunksie op $(0, 1)$. (Sien bv. Darling (1957)). Die asimptotiese verdeling, onder H_o, van W_n^2 word in Anderson en Darling (1952) m.b.v. die stogastiese proses benadering as volg bepaal:

Aangesien F_o kontinu is, kan W_n^2 m.b.v. die transformasie $u = F_o(x)$ geskryf word as:

$$W_n^2 = n \int_o^1 (G_n(u) - u)^2 W(u)du \qquad (1.2.2)$$

Hier is G_n die empiriese df. van 'n onafhanklike steekproef van grootte n uit die uniforme verdeling oor $(0, 1)$.

Vir elke $0 \leq u \leq 1$ geld nou dat $X_n(u) = n^{\frac{1}{2}}(G_n(u) - u)$ 'n stogastiese veranderlike is, en die versameling van hierdie stogastiese veranderlikes kan dan beskou word as 'n stogastiese proses met parameter u.

$$\therefore W_n^2 = \int_o^1 X_n^2(u)W(u)du.$$

Die probleem is dan om

$$A(x) = \lim_{n \to \infty} P[\int_o^1 X_n^2(u)W(u)du \leq x]$$

te bepaal. Anderson en Darling toon nou onder sekere voorwaardes aan dat $A(x) = P[X^2 \leq x]$, waar met waarskynlikheid 1 geld dat:

$$X^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r Y_r^2.$$

Die $\{Y_r\}$ is onafhanklik normaal verdeel met $EY_r = 0$ en $EY_r^2 = 1$, $r = 1, 2, \ldots,$ terwyl $\{\rho_r\}$ die eiewaardes van $[W(x)W(y)]^{\frac{1}{2}}$ $(\min(x, y) - xy)$ is. (Sien Anderson en Darling (1952) Bl. 199.) Dit volg dan maklik dat die karakteristieke funksie van X^2 gegee word deur:

$$E\exp(itX^2) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - 2\, it\, \rho_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

In die geval waar $W \equiv 1$ volg bv. dat $\rho_r = (\pi r)^{-2}$, $r = 1, 2, \ldots$ sodat

$$X^2 = \sum_{r=1}^{\infty} (\pi r)^{-2} Y_r^2 . \qquad (1.\,2.\,3)$$

'n Probleem wat voorkom by gebruik van hierdie benadering is dat aange= neem word dat $\sum_r \rho_r < \infty$ of, wat dieselfde is:

$$\int_0^1 W(x)x(1 - x)dx < \infty.$$

Nou bestaan daar egter keuses van W waarin ons belangstel, maar waarvoor $\Sigma_r \rho_r = \infty$ en $\Sigma_r \rho_r^2 < \infty$. Indien ons in hierdie geval EX^2 bereken as $E(\Sigma\rho_r Y_r^2) = \Sigma\rho_r EY_r^2 = \Sigma\rho_r = \infty$, en Var X^2 as $\mathrm{Var}(\Sigma\rho_r Y_r^2) = \Sigma\rho_r^2 \,\mathrm{Var}\, Y_r^2 = 2\Sigma\, \rho_r^2 < \infty$, dan beteken dit rofweg dat X^2 'n bona fide verdeling het, maar by ∞ gesentreer. Om hierdie probleem te oorbrug moet 'n ry normeringskonstantes $\{a_n\}$ van W_n^2 afgetrek word, sodat $W_n^2 - a_n$ 'n asimpto= tiese verdeling het wat nie by ∞ gesentreer is nie. Hierdie benadering gee egter vir ons geen duidelike idee van wat $\{a_n\}$ moet wees nie.

Hierdie probleem van die stogastiese proses benadering het daartoe aanlei= ding gegee dat 'n alternatiewe benadering tot die probleem gevind moes word, en ons dui dit vervolgens aan:

1. 3 ALTERNATIEWE BENADERING

Om 'n toetsstatistiek vir die hipotese $H_o : F = F_o$ te vind, kan ons as volg te werk gaan:

Laat $X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{nn}$ die rangorde statistieke van die steekproef $X_1, \ldots, X_n$ wees. Stel $U_{jn} = F_o(X_{jn})$ dan geld onder H_o dat $U_{1n}, U_{2n}, \ldots, U_{nn}$ verdeel is soos die rangorde statistieke van 'n onafhanklike steekproef van grootte n uit die uniforme verdeling oor (0, 1). Dus is $EU_{jn} = {}^j/_{n+1}$, $j = 1, \ldots, n$, onder H_o, en 'n intuïtief aanneemlike toetsstatistiek vir H_o kan verkry word deur die af= stande tussen U_{jn} en ${}^j/_{n+1}$, $j = 1, \ldots, n$, te meet. Ons kan bv. gebruik:

$$Q_n^{(W)} = \sum_{j=1}^{n} (U_{jn} - {}^j/_{n+1})^2 W({}^j/_{n+1}) \qquad (1.3.1)$$

met W 'n gewigsfunksie soos tevore. Ons sien dat $Q_n^{(W)}$ nou verwant is aan W_n^2 soos gegee deur (1.2.2). Ons beskou net die geval $W \equiv 1$ en $W = (H')^2$ (sien paragraaf 1.5 vir notasie). Die geval $W = (H')^2$ sal ons intensief bestudeer en latere werk dui daarop dat dit minstens beter is as $W \equiv 1$. (Sien hoofstuk 5.)

Op $Q_n^{(W)}$ kan ons nou wel die stogastiese proses benadering van die vorige paragraaf toepas, maar die probleem wat daar voorgekom het sal duidelik ook hier voorkom. As 'n alternatiewe benadering kan ons as volg te werk gaan:

Gestel deurgaans H_o is waar. Dan is dit bekend dat die gesamentlike verde= ling van $U_{1n}, \ldots, U_{nn}$ dieselfde is as dié van ${}^{S_1}/_{S_{n+1}}, \ldots, {}^{S_n}/_{S_{n+1}}$ waar

$$S_k = Z_1^* + \ldots + Z_k^*$$

met $\{Z_i^*\}$ onafhanklike stogastiese veranderlikes, elk eksponensieel verdeel met parameter 1. (Sien Breiman (1968) Bl. 285.) Wat verdelings betref kan ons dus skryf:

$$U_{jn} = {}^{S_j}/_{S_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\therefore U_{jn} - {}^j/_{n+1} = {}^{S_j}/_{S_{n+1}} - {}^j/_{n+1}$$

$$= S_{n+1}^{-1}(S_j - ({}^j/_{n+1})S_{n+1})$$

$$= S_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^{n+1} \beta_{ijn} Z_i^*$$

waar:

$$\beta_{ijn} = \begin{cases} 1 - {}^{j}/_{n+1} & \text{vir } i \leq j \\ -{}^{j}/_{n+1} & \text{vir } i > j \end{cases}$$

$$= \psi({}^{i}/_{n+1}, {}^{j}/_{n+1}) \qquad \text{(sê)}$$

met $\psi(x, y) = \begin{cases} 1 - y & \text{vir } x \leq y \\ -y & \text{vir } x > y\,. \end{cases}$

Aangesien egter $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_{ijn} = 0$, kan ons ook skryf:

$$U_{jn} - {}^{j}/_{n+1} = S_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^{n+1} \beta_{ijn}(Z_i^* - 1). \tag{1. 3. 2}$$

Kwadreer (1. 3. 2), vervang in (1. 3. 1) en ruil die volgorde van sommering om, dan volg dat:

$$Q_n^{(W)} = S_{n+1}^{-2} \sum_{i,j=1}^{n+1} (Z_i^* - 1)(Z_j^* - 1)\Big[\sum_{k=1}^{n} W({}^{k}/_{n+1})\psi({}^{i}/_{n+1}, {}^{k}/_{n+1}) \;\; \psi({}^{j}/_{n+1}, {}^{k}/_{n+1})\Big].$$

Aangesien $(n+1)^{-1} S_{n+1} \to 1$ met waarskynlikheid 1, volgens die sterk wet van groot getalle, kan ons in bostaande S_{n+1} deur n+1 vervang sonder om die asimp= totiese verdeling te affekteer. Stel nou:

$$c_{ijn} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} W({}^{k}/_{n})\psi({}^{i}/_{n}, {}^{k}/_{n})\psi({}^{j}/_{n}, {}^{k}/_{n})$$

en $Z_i = Z_i^* - 1$, sodat $\{Z_i\}$ onafhanklike, identies verdeelde stogastiese veranderlikes is met $EZ_1 = 0$ en $EZ_1^2 = 1$. Dit is dus redelik om te verwag dat $Q_n^{(W)}$ asimptoties dieselfde verdeling sal hê as $(n+1)^{-1} \sum_{i,j} c_{ijn+1} Z_i Z_j$ met c_{ijn} soos hierbo.

Bepaling van die asimptotiese verdeling van $Q_n^{(W)}$ reduseer dus na die volgende probleem:

Laat $\{Z_i\}$ onafhanklik en identies verdeelde stogastiese veranderlikes wees, met $EZ_1 = 0$, $EZ_1^2 = 1$ en laat $\{c_{ijn};\ i, j = 1, \ldots, n\}$ reële getalle wees. Stel:

$$T_n^{(1)} = n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn} Z_i Z_j,$$

dan is die probleem om die asimptotiese verdeling van $T_n^{(1)}$ te vind. Ter wille van wyer toepassings sal ons die meer algemene probleem beskou, nl. bepaling van die asimptotiese verdeling van:

$$T_n = n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn} Z_i Z_j + n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} d_{in} Z_i \tag{1.3.3}$$

waar $\{d_{in};\ i = 1, \ldots, n\}$ reële getalle is. Let op dat indien alle $c_{ijn} = 0$, reduseer T_n na 'n lineêre vorm waarop sentrale limiet teorie toegepas kan word (Sien bv. lemma a1 in die aanhangsel), terwyl as $c_{ijn} \neq 0$, is sentrale limiet teorie nie van toepassing nie. Bestudering van kwadratiese vorme is reeds gedoen deur bv. Varberg (1966) en Schach (1970), maar hulle resultate kan nie sonder meer in ons geval toegepas word nie. In hierdie situasie moet daar dus nuwe teorie ontwikkel word, en dit sal in die volgende hoofstuk gedoen word. Hierdie teorie is van só 'n aard dat dit die geval $\Sigma_r \rho_r = \infty$ kan behartig, en dus nie hierdie probleem van die stogastiese proses benadering het nie.

1.4 OPSOMMING

In hoofstuk 2 word teorie ontwikkel wat die asimptotiese verdeling gee van kwadratiese vorme van die tipe (1.3.3). Aan die einde van dié hoofstuk word 'n voor=

beeld gegee van die toepassing van hierdie teorie. Die asimptotiese verdeling van $Q_n^{(W)}$ word nl. gevind vir die geval waar $W \equiv 1$. Hierdie verdeling is dieselfde as die asimptotiese verdeling van W_n^2 in die geval $W \equiv 1$, en daar word aangetoon dat $Q_n^{(W)}$ en W_n^2 in hierdie geval asimptoties ekwivalent is.

<u>Opmerking</u>: Vanaf hoofstuk 3 werk ons net in die normale geval.

In hoofstuk 3 word $\Sigma_{j=1}^{n} (\Phi^{-1}(U_{jn}) - \Phi^{-1}(j/_{n+1}))^2$ (Sien paragraaf 1.5 vir definisie van Φ) beskou as toetsstatistiek vir die hipotese $H_o : F = \Phi$, en daar word aangetoon hoedat hierdie statistiek reduseer na $Q_n^{(W)}$ hierbo, met $W(x) = (\frac{d}{dx} \Phi^{-1}(x))^2$, plus 'n resterm wat na nul gaan. In hoofstuk 4 word aangetoon dat die teorie van hoofstuk 2 op $Q_n^{(W)}$, met W soos hierbo, van toepassing is. Die vorm van die asimptotiese verdeling word gevind asook die karakteristieke funksie en sekere kritieke waardes. In hoofstuk 5 word die statistiek van hoofstuk 3 t.o.v. doeltreffendheid vergelyk met sekere ander toetsgroothede. As maatstaf van doel=treffendheid gebruik ons die teorie van benaderde Bahadur hellings. Daar word ook aangetoon dat die gewigsfunksie $W(x) = (\frac{d}{dx}\Phi^{-1}(x))^2$, in die geval van skuif alterna=tiewes, optimaal is. In hoofstuk 6 word die mag van die toetsstatistiek van hoof=stuk 3 in die geval van skuif en skaal alternatiewes bepaal.

In hoofstuk 7 word 'n statistiek gegee vir die toets van die hipotese $H_o : F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, met μ en $\sigma > 0$ onbekend. Motivering vir die gebruik van hierdie statistiek word gegee en daar word aangedui hoedat dit reduseer na 'n kwadratiese vorm plus 'n resterm, wat na nul gaan. In hoofstuk 8 word die teorie van hoofstuk 2 op hierdie statistiek toegepas om die vorm van die asimptotiese verdeling te vind. Die karakteristieke funksie en sekere kritieke waardes van die asimptotiese verde=ling word ook gevind. In hoofstuk 9 word die statistiek van hoofstuk 7 vergelyk met die ekwivalent van W_n^2 (sien paragraaf 1.2) vir die huidige hipotese. As maatstaf van doeltreffendheid gebruik ons weer die teorie van Bahadur hellings. Die mag van die statistiek van hoofstuk 7 word ook gevind vir bepaalde klasse van alternatiewes.

In die aanhangsel word 'n aantal algemene resultate gegee wat deurgaans gebruik word.

1.5 NOTASIE

Sekere simbole word deurgaans gebruik en ons gee hier die betekenis daarvan:

(i) $\phi(x)$ dui die N(0, 1) digtheidsfunksie aan, d.w.s.:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)$$

terwyl $\Phi(x)$ die N(0, 1) distribusiefunksie aandui, d.w.s:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy.$$

Ons sal ook skryf: $H(x) = \Phi^{-1}(x)$ (die inverse van $\Phi(x)$) en $h(x) = H'(x)^2 = \phi(H(x))^{-2}$, met $H'(x) = \frac{d}{dx}H(x)$.

(ii) $\alpha_n = \Phi^{-1}(1/n+1)$

$= H(1/n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$

(iii) Die orde simbole o, O, o_p en O_p het hulle gewone betekenis terwyl $g(x) \sim g^*(x)$, as $x \to x_o$, beteken dat:

$$g(x)/g^*(x) \to 1 \qquad \text{as } x \to x_o.$$

(iv) Vir 'n ry stogastiese veranderlikes $\{X_n\}$ en 'n stogastiese veranderlike X beteken $D(X_n) \to D(X)$, as $n \to \infty$, dat die verdeling van X_n konvergeer na die verdeling van X, as $n \to \infty$.

(v) X_{in}, $i = 1, 2, \ldots, n$, word in die algemeen gebruik vir die i-de rangorde sta= tistiek in 'n steekproef van grootte n uit 'n populasie met distribusiefunksie F, ter= wyl U_{in}, $i = 1, 2, \ldots, n$ altyd daarop dui dat F die distribusiefunksie van die uni= forme verdeling oor (0, 1) is.

(vi) Vir die verskil $U_{in} - i/n+1$ sal ons V_{in} ($i = 1, 2, \ldots, n$) skryf.

(vii) Vir 'n funksie g(x) sal ons g_{in} skryf vir $g(i/n+1)$. Netso sal ons vir 'n funksie $g^*(x, y)$, g^*_{ijn} skryf vir $g^*(i/n+1, j/n+1)$, ens. vir funksies in hoër dimensies. Soms sal dit wel gebeur dat $\{g_{in}\}$ bloot 'n ry getalle is en nie gelyk is aan $g(i/n+1)$ nie. (Sien bv. (vi) hierbo.) Dit sal egter uit die bespreking volg waarvoor g_{in} staan.

(viii) Die simbole R_n, R_{1n}, R_{2n}, ..., sal altyd terme aandui wat na nul gaan indien $n \to \infty$. Dieselfde simbool kan op verskillende plekke egter verskillende resterme aan= dui.

(ix) Vir 'n reële getal x dui $[x]$ die grootste heelgetal kleiner of gelyk aan x aan.

(x) Vir k en m heelgetalle dui δ_{km} die Kronecker-delta aan, d. w. s.

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 \text{ as } k \neq m \\ 1 \text{ as } k = m \end{cases}$$

HOOFSTUK 2

ALGEMENE STELLINGS IN VERBAND MET DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN KWADRATIESE VORME

2.1 VOORAFGAANDE LEMMAS

Laat soos in hoofstuk 1, T_n gegee word deur

$$T_n = n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn} Z_i Z_j + n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} d_{in} Z_i = T_{1n} + T_{2n} \text{ (sê)} \tag{2.1.1}$$

Ons neem deurgaans aan dat $\{Z_i\}$ onafhanklik en identies verdeelde stogastiese veranderlikes is, met $EZ_1 = 0$, $EZ_1^2 = 1$, $EZ_1^3 = \beta$ en $EZ_1^4 = \alpha$ met α, $|\beta| < \infty$. Die $\{c_{ijn}\}$ en $\{d_{in}\}$ is reële getalle wat voldoen aan die vereiste dat:

$c_{ijn} = c_{jin}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Ons stel en bewys nou 'n aantal lemmas wat nodig is vir die bewyse van die latere stellings.

In die eerste lemma gee ons uitdrukkings vir die eerste twee momente van T_n:

<u>Lemma 2.1:</u> Met T_n soos in (2.1.1) geld dat

$$ET_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} c_{iin}$$

en:
$$\text{Var } T_n = (\alpha - 3)n^{-2} \sum_{i=1}^{n} c_{iin}^2 + 2n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn}^2 + n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_{in}^2 + 2\beta n^{-3/2} \sum_{i=1}^{n} c_{iin} d_{in}.$$

<u>Bewys:</u> Die eerste deel volg dadelik. Vir die tweede deel is:

$$T_{1n}^2 = n^{-2} \sum_{i,j,r,s} c_{ijn} c_{rsn} Z_i Z_j Z_r Z_s$$

$$\therefore ET_{1n}^2 = \alpha n^{-2} \sum_i c_{iin}^2 + n^{-2} \sum_{i \neq j} c_{ijn}^2 + n^{-2} \sum_{i \neq j} c_{ijn} c_{jin} + n^{-2} \sum_{i \neq j} c_{iin} c_{jjn}$$

$$= \alpha n^{-2} \sum_i c_{iin}^2 + 2n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2 + n^{-2} \sum_{i,j} c_{iin} c_{jjn} - 2n^{-2} \sum_i c_{iin}^2 - n^{-2} \sum_i c_{iin}^2$$

$$= (\alpha - 3) n^{-2} \sum_i c_{iin}^2 + 2n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2 + (n^{-1} \sum_i c_{iin})^2$$

Dit is duidelik dat:

$$ET_{1n} = ET_n = n^{-1} \sum_i c_{iin}$$

$$\therefore \text{Var } T_{1n} = ET_{1n}^2 - (ET_{1n})^2$$

$$= (\alpha - 3) n^{-2} \sum_i c_{iin}^2 + 2n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2$$

Ook geld dat:

$$T_{2n}^2 = n^{-1} \sum_{i,j} d_{in} d_{jn} Z_i Z_j$$

$$\therefore ET_{2n}^2 = n^{-1} \sum_i d_{in}^2$$

en: $$T_{1n} T_{2n} = n^{-3/2} \sum_{i,j,k} c_{ijn} d_{kn} Z_i Z_j Z_k$$

$$\therefore ET_{1n} T_{2n} = n^{-3/2} \sum_i c_{iin} d_{in} EZ_i^3$$

$$= \beta n^{-3/2} \sum_i c_{iin} d_{in}.$$

Nou is:

$$\text{Var } T_n = \text{Var } (T_{1n} + T_{2n})$$

$$= \text{Var } T_{1n} + \text{Var } T_{2n} + 2\text{Kov}(T_{1n}, T_{2n})$$

$$= \text{Var } T_{1n} + ET_{2n}^2 + 2ET_{1n} T_{2n}$$

$$\therefore \operatorname{Var} T_n = (\alpha - 3)n^{-2} \sum_i c_{iin}^2 + 2n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2 + n^{-1} \sum_i d_{in}^2 + 2\beta n^{-3/2} \sum_i c_{iin} d_{in}$$

wat die bewys voltooi.

Hierdie resultaat kom handig te pas in die bewys van die volgende lemma:

Laat $\{c^*_{ijn};\ i,j = 1, \ldots, n\}$ en $\{d^*_{in};\ i = 1, \ldots, n\}$ ook reële getalle wees sodat $c^*_{ijn} = c^*_{jin}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Dan geld die volgende:

<u>Lemma 2.2:</u> Laat T_n soos in (2.1.1) wees, en laat:

$$T^*_n = n^{-1} \sum_{i,j} c^*_{ijn} Z_i Z_j + n^{-1/2} \sum_i d^*_{in} Z_i.$$

Gestel dat as $n \to \infty$ geld:

(i) $n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = o(1)$

(ii) $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (d_{in} - d^*_{in})^2 = o(1)$.

Dan is $\operatorname{Var}(T_n - T^*_n) = o(1)$ as $n \to \infty$.

<u>Bewys:</u> Ons het dat:

$$T_n - T^*_n = n^{-1} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn}) Z_i Z_j + n^{-1/2} \sum_i (d_{in} - d^*_{in}) Z_i.$$

Op hierdie kwadratiese vorm kan ons nou lemma 2.1 toepas om te vind dat:

$$\operatorname{Var}(T_n - T^*_n) = (\alpha - 3)n^{-2} \sum_i (c_{iin} - c^*_{iin})^2 + 2n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 + n^{-1} \sum_i (d_{in} - d^*_{in})^2$$
$$+ 2\beta n^{-3/2} \sum_i (c_{iin} - c^*_{iin})(d_{in} - d^*_{in})$$

Die eerste drie terme is $o(1)$ volgens (i) en (ii). Vir die laaste term het ons dat:

$$\left| n^{-3/2} \sum_i (c_{iin} - c^*_{iin})(d_{in} - d^*_{in}) \right| \leq [(n^{-2} \sum_i (c_{iin} - c^*_{iin})^2)(n^{-1} \sum_i (d_{in} - d^*_{in})^2)]^{1/2}$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty$$

Die resultaat volg dus.

Opmerking: Die nut van hierdie lemma is die volgende:

Laat T_n en T_n^* soos hierbo wees en gestel dat:

$$D(T_n^* - ET_n^*) \rightarrow D(Y) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

vir een of ander stogastiese veranderlike Y.

Onder die kondisies van die lemma sal dan ook geld dat

$$D(T_n - ET_n) \rightarrow D(Y) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Ons sien dit as volg:

Aangesien $\mathrm{Var}(T_n - T_n^*) = o(1)$ is ook:

$$\mathrm{Var}[(T_n - ET_n) - (T_n^* - ET_n^*)] = o(1)$$

sodat $(T_n - ET_n) - (T_n^* - ET_n^*) = o_p(1)$ en dus het $T_n - ET_n$ en $T_n^* - ET_n^*$ dieselfde asimptotiese verdelings.

Ten slotte gee ons, sonder bewys, 'n lemma wat 'n belangrike rol sal speel in die bewys van die stellings wat volg. Die bewys kan gevind word in Billingsley (1968), bl. 25:

Lemma 2.3: Laat $\{X_{kn};\ k,n = 1, 2, \ldots\}$ stogastiese veranderlikes wees sodanig dat vir elke vaste k geld:

$$D(X_{kn}) \rightarrow D(X_k) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Gestel voorts dat:

$$D(X_k) \rightarrow D(X) \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

Indien nou vir elke $\delta > 0$ geld dat:

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P[\,|Y_n - X_{kn}| \geq \delta] = 0$$

dan sal ook $D(Y_n) \to D(X)$ as $n \to \infty$

2. 2 ASIMPTOTIESE VERDELINGS BY SPESIALE KEUSES VAN DIE KONSTANTES

Ons sal vervolgens spesiale keuses van $\{c_{ijn}\}$ en $\{d_{in}\}$ beskou en in dié gevalle die asimptotiese verdeling van T_n karakteriseer. Die aannames op die $\{Z_i\}$ soos in die vorige paragraaf word hier deurgaans gemaak.

In die eerste stelling is die vorm van die konstantes van só 'n aard dat ons die sentrale limiet teorie van lemmas a1 en a2 in die aanhangsel kan toepas.

<u>Stelling 2. 1:</u> Laat:

$T_n = n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn} Z_i Z_j + n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} d_{in} Z_i$ en gestel $\{c_{ijn}\}$ en $\{d_{in}\}$ is só dat:

$$c_{ijn} = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m b_{imn} b_{jmn} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

en

$$d_{in} = \sum_{m=1}^{M} \delta_m b_{imn} \qquad i = 1, \ldots, n$$

vir sekere getalle $\{\gamma_m\}$, $\{\delta_m\}$ en $\{b_{imn}\}$ wat voldoen aan:

(B1) $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} b_{imn} b_{ikn} \to \delta_{mk}$ as $n \to \infty$ en

(B2) Vir $m = 1, 2, \ldots, M$ geld dat

$$n^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq n} |b_{imn}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Dan geld dat:

$$D(T_n) \to D\Big(\sum_{m=1}^{M} \gamma_m Y_m^2 + \sum_{m=1}^{M} \delta_m Y_m \Big) \text{ en:}$$

$$D(T_n - ET_n) \to D\left(\sum_{m=1}^{M} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{M} \delta_m Y_m\right) \text{ as } n \to \infty$$

waar $Y_1, \ldots, Y_M$ onafhanklik normaal verdeelde stogastiese veranderlikes is met

$$EY_i = 0; \; EY_i^2 = 1 \qquad i = 1, \ldots, M.$$

Bewys: Substitusie van c_{ijn} en d_{in} in T_n lewer:

$$T_n = \sum_{m=1}^{M} [n^{-1/2} \sum_i b_{imn} Z_i][\delta_m + \gamma_m n^{-1/2} \sum_i b_{imn} Z_i].$$

Volgens lemma a2 volg dan dat:

$$D(T_n) \to D\left(\sum_{m=1}^{M} Y_m(\delta_m + \gamma_m Y_m)\right) \text{ as } n \to \infty.$$

Ook is: $ET_n = n^{-1} \sum_i c_{iin}$

$$= \sum_{m=1}^{M} \gamma_m [n^{-1} \sum_i b_{imn}^2] \to \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \quad \text{volgens (B1).}$$

$$\therefore D(T_n - ET_n) \to D\left(\sum_{m=1}^{M} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{M} \delta_m Y_m\right) \text{ wat die bewys voltooi.}$$

Opmerking:

Ons sien dat die asimptotiese verdeling in hierdie geval 'n redelik eenvou= dige vorm het, sodat die karakteristieke funksie bereken kan word. Hierdie karakte= ristieke funksie kan dan met mindere of meerdere moeite omgekeer word afhangende van $\{\gamma_m\}$ en $\{\delta_m\}$.

In die volgende stelling is die kondisies op die getalle van so 'n aard dat die resultate van lemma 2. 2 toegepas kan word. Ons kry dieselfde resultaat as in stelling 2. 1, maar onder swakker kondisies.

<u>Stelling 2. 2:</u> Laat $\{c_{ijn}\}$, $\{d_{in}\}$, $\{\gamma_m\}$, $\{\delta_m\}$ en $\{b_{imn}\}$ reëele getalle wees, sodat $\{b_{imn}\}$ voldoen aan (B1) en (B2).

Gestel die volgende word ook bevredig:

(C1) $$n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn}^2 \to \sum_{m=1}^{M} \gamma_m^2 < \infty.$$

(D1) $$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_{in}^2 \to \sum_{m=1}^{M} \delta_m^2 < \infty.$$

(CB1) $$n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn}\, b_{imn}\, b_{jmn} \to \gamma_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M \text{ en}$$

(DB1) $$n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_{in}\, b_{imn} \to \delta_m, \quad \text{as } n \to \infty.$$

Met T_n soos tevore geld dan dat:

$$D(T_n - ET_n) \to D\Big(\sum_{m=1}^{M} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{M} \delta_m Y_m \Big).$$

<u>Bewys:</u> Stel:

$$c^*_{ijn} = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m\, b_{imn}\, b_{jmn}$$

dan volg dat:

$$n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - \sum_m \gamma_m\, b_{imn}\, b_{jmn})^2$$

$$= n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2 - 2 \sum_m \gamma_m (n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}\, b_{imn}\, b_{jmn}) + \sum_{m,k} \gamma_m \gamma_k (n^{-1} \sum_i b_{imn}\, b_{ikn})^2$$

$$\to \sum_{m=1}^{M} \gamma_m^2 - 2 \sum_{m=1}^{M} \gamma_m^2 + \sum_{m=1}^{M} \gamma_m^2 = 0, \text{ as } n \to \infty, \text{ volgens (B1), (C1) en (CB1).}$$

$$\therefore\ n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat nou:

$$d^*_{in} = \sum_{m=1}^{M} \delta_m b_{imn}.$$

Dan het ons dat:

$$n^{-1} \sum_i (d_{in} - d^*_{in})^2 = n^{-1} \sum_i (d_{in} - \sum_m \delta_m b_{imn})^2$$

$$= n^{-1} \sum_i d^2_{in} - 2 \sum_m \delta_m (n^{-1} \sum_i d_{in} b_{imn}) + \sum_{m,k} \delta_m \delta_k (n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{ikn})$$

$$\to \sum_{m=1}^{M} \delta^2_m - 2 \sum_{m=1}^{M} \delta^2_m + \sum_{m=1}^{M} \delta^2_m = 0, \qquad \text{as } n \to \infty \text{ volgens (B1), (D1) en (DB1).}$$

$$\therefore\ n^{-1} \sum_i (d_{in} - d^*_{in})^2 = o(1) \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Uit lemma 2. 2 volg dus dat

$$\mathrm{Var}(T_n - T^*_n) = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Maar volgens stelling 2. 1 geld $D(T^*_n - ET^*_n) \to D(\sum_m \gamma_m (Y^2_m - 1) + \sum_m \delta_m Y_m)$ as $n \to \infty$. Die resultaat volg dus.

<u>Opmerkings:</u> (i) Die motivering vir bostaande keuse van c^*_{ijn} en d^*_{in} sal later gegee word. (Sien opmerking (iv), bl. 30 .)

(ii) In bostaande twee stellings was M eindig. In die volgende twee stellings word dit uitgebrei na die geval waar M oneindig is. In hierdie gevalle is die aannames wat gemaak moet word, egter strenger.

<u>Stelling 2. 3:</u> Laat $\{\gamma_m\}$, $\{\delta_m\}$ en $\{b_{imn}\}$ reële getalle wees, met $\{b_{imn}\}$ wat vol= doen aan (B1). Gestel dat die volgende ook geld:

(C2) $n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn}^2 \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2 < \infty$

(D2) $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_{in}^2 \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^2 < \infty$

(CB2) $n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn} \rightarrow \gamma_m$

(DB2) $n^{-1} \sum_{i} d_{in} b_{imn} \rightarrow \delta_m$, as $n \rightarrow \infty$

(Γ1) $\sum_{m=1}^{\infty} |\gamma_m| < \infty$

(Δ1) $\sum_{m=1}^{\infty} |\delta_m| < \infty$ en

(B3) $|b_{imn}| \leq b < \infty$ vir alle i, m, n.

Met T_n soos tevore geld dan dat:

$$D(T_n - ET_n) \rightarrow D(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m) \text{ as } n \rightarrow \infty. \tag{2.2.1}$$

<u>Bewys</u>: Stel:

$$c_{ijn}^* = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}.$$

Ons toon dan eers aan dat:

$$n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c_{ijn}^*)^2 = o(1) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Beskou 'n vaste N en stel:

$$A_{Nn} = n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m b_{imn} b_{jmn})^2$$

$$= n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2 - 2 \sum_{m=1}^{N} \gamma_m (n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn}) + \sum_{m,k=1}^{N} \gamma_m \gamma_k (n^{-1} \sum_{i} b_{imn} b_{ikn})^2$$

$$\to \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2 - 2 \sum_{m=1}^{N} \gamma_m^2 + \sum_{m=1}^{N} \gamma_m^2$$

$$= \sum_{m=N+1}^{\infty} \gamma_m^2, \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Aangesien $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2 < \infty$ is, sal dus $\sum_{m=N+1}^{\infty} \gamma_m^2 = o(1)$ as $N \to \infty$.

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} A_{Nn} = 0.$$

Ons wil aantoon dat $A_{nn} = o(1)$ as $n \to \infty$. Nou, vir vaste $N < n$ is:

$$A_{nn} = n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - \sum_{m=1}^{n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn})^2$$

$$= n^{-2} \sum_{i,j} [(c_{ijn} - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}) - \sum_{m=N+1}^{n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}]^2$$

$$= A_{Nn} + n^{-2} \sum_{i,j} [\sum_{N+1}^{n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}]^2 - 2n^{-2} \sum_{i,j} [c_{ijn} - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}][\sum_{N+1}^{n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}]$$

$$= A_{Nn} + B_{Nn} - 2C_{Nn} \qquad \text{(sê).}$$

Ons het reeds aangetoon dat: $\lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} A_{Nn} = 0.$

Beskou nou B_{Nn}: Omruiling van die volgorde van sommering gee:

$$B_{Nn} = \sum_{m,k=N+1}^{n} \gamma_m \gamma_k (n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{ikn})^2$$

$$\therefore \quad |B_{Nn}| \leq b^4 \left(\sum_{N+1}^{n} |\gamma_m| \right)^2$$

Aangesien $\sum_{m=1}^{\infty} |\gamma_m| < \infty$ is, volg dat $\lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} |B_{Nn}| = 0.$

Ook is:

$$C_{Nn} = \sum_{m=N+1}^{n} \gamma_m (n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn}) - \sum_{m=N+1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \gamma_m \gamma_k (n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{ikn})^2 .$$

Met behulp van die ongelykheid $|a| \leq 1 + a^2$ vind ons dat:

$$|C_{Nn}| \leq b^2 \sum_{N+1}^{n} |\gamma_m| (n^{-2} \sum_{i,j} |c_{ijn}|) + b^4 (\sum_{m=1}^{N} |\gamma_m|)(\sum_{m=N+1}^{n} |\gamma_m|)$$

$$\leq b^2 \sum_{N+1}^{n} |\gamma_m| (1 + n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2) + b^4 (\sum_{m=1}^{N} |\gamma_m|)(\sum_{m=N+1}^{n} |\gamma_m|).$$

Hieruit volg dus dat:

$$\lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} |C_{Nn}| = 0$$

$$\therefore A_{nn} = o(1) \text{ as } n \to \infty$$

d. w. s. $n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = o(1)$ as $n \to \infty$.

Onder die gestelde voorwaardes volg op analoë wyse dat:

$$n^{-1} \sum_i (d_{in} - d^*_{in})^2 = o(1) \text{ as } n \to \infty, \text{ waar } d^*_{in} = \sum_{m=1}^{n} \delta_m b_{imn}.$$

Indien ons nou stel:

$$T^*_n = n^{-1} \sum_{i,j} c^*_{ijn} Z_i Z_j + n^{-1/2} \sum_i d^*_{in} Z_i$$

dan hoef ons volgens lemma 2. 2 slegs aan te toon dat:

$$D(T^*_n - ET^*_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m) \quad \text{as } n \to \infty.$$

Nou is dit duidelik dat ons kan skryf:

$$T^*_n - ET^*_n = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m (Y_{mn}^2 - S_{mn}^2) + \sum_{m=1}^{n} \delta_m Y_{mn}$$

waar $Y_{mn} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} b_{imn} Z_i$ en $S_{mn}^2 = n^{-1} \sum_i b_{imn}^2$.

Definieer $X_{kn} = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m (Y_{mn}^2 - S_{mn}^2) + \sum_{m=1}^{k} \delta_m Y_{mn}$ dan volg dadelik uit

stelling 2. 1 dat:

$$D(X_{kn}) \to D\left(\sum_{m=1}^{k} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{k} \delta_m Y_m \right) \text{ as } n \to \infty.$$

Stel: $X_k = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{k} \delta_m Y_m$

$= X_{1k} + X_{2k}$ (sê).

Volgens Breiman (1968), bl. 47 is X_{1k} en X_{2k} beide konvergent met waar=skynlikheid 1, en dus ook X_k, d. w. s.

$$D(X_k) \to D\left(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m \right) \text{ as } k \to \infty.$$

Aangesien $T_n^\star - ET_n^\star = X_{nn}$, moet ons volgens lemma 2. 3 net aantoon dat:

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P\left[\left| \sum_{m=k+1}^{n} \gamma_m (Y_{mn}^2 - S_{mn}^2) + \sum_{m=k+1}^{n} \delta_m Y_{mn} \right| \geq \delta \right] = 0 \text{ vir elke } \delta > 0.$$

Nou is: $P[|Z| \geq \delta] \leq \delta^{-2} E|Z|^2$ en $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

Beskou dus:

$$E\left[\sum_{m=k+1}^{n} \gamma_m (Y_{mn}^2 - S_{mn}^2) + \sum_{m=k+1}^{n} \delta_m Y_{mn} \right]^2 \leq 2E\left[\sum_{m=k+1}^{n} \gamma_m (Y_{mn}^2 - S_{mn}^2) \right]^2 + 2E\left[\sum_{m=k+1}^{n} \delta_m Y_{mn} \right]^2$$

$= 2G_{kn} + 2G_{kn}^\star$ (sê).

Ons het dat:

$$G_{kn} = \sum_{m, r=k+1}^{n} \gamma_m \gamma_r E(Y_{mn}^2 - S_{mn}^2)(Y_{rn}^2 - S_{rn}^2)$$

$$= \sum_{m,r} \gamma_m \gamma_r A_{mrn} \quad \text{(sê).}$$

$$\therefore\ A_{mrn} = EY^2_{mn} Y^2_{rn} - S^2_{mn} S^2_{rn} \quad \text{en} \quad S^2_{mn} S^2_{rn} = n^{-2} \sum_{i,j} b^2_{imn} b^2_{jrn}$$

$$EY^2_{mn} Y^2_{rn} = n^{-2} \sum_{i,j,s,t} b_{imn} b_{jmn} b_{srn} b_{trn} EZ_i Z_j Z_s Z_t$$

$$= \alpha n^{-2} \sum_{i} b^2_{imn} b^2_{irn} + n^{-2} \sum_{i \neq j} b^2_{imn} b^2_{jrn} + 2n^{-2} \sum_{i \neq j} b_{imn} b_{jmn} b_{irn} b_{jrn}$$

$$= (\alpha - 3) n^{-2} \sum_{i} b^2_{imn} b^2_{irn} + n^{-2} \sum_{i,j} b^2_{imn} b^2_{jrn} + 2n^{-2} \sum_{i,j} b_{imn} b_{jmn} b_{irn} b_{jrn}$$

$$\therefore\ A_{mrn} = (\alpha - 3)\, n^{-2} \sum_{i} b^2_{imn} b^2_{irn} + 2n^{-2} \sum_{i,j} b_{imn} b_{jmn} b_{irn} b_{jrn}$$

$$\therefore\ |A_{mrn}| \leq b^4 |\alpha - 3| n^{-1} + 2b^4$$

$$\therefore\ G_{kn} \leq b^4 \sum_{m,r} |\gamma_m \gamma_r| (|\alpha - 3| n^{-1} + 2)$$

$$\therefore\ \lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} G_{kn} = 0.$$

Ook is: $G^*_{kn} = E\Big[\sum_{m=k+1}^{n} \delta_m Y_{mn} \Big]^2$

$$= \sum_{m,r} \delta_m \delta_r EY_{mn} Y_{rn}$$

$$= \sum_{m,r} \delta_m \delta_r (n^{-1} \sum_{i} b_{imn} b_{irn})$$

$$\therefore\ G^*_{kn} \leq b^2 \sum_{m,r} |\delta_m \delta_r|$$

$$\therefore\ \lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} G^*_{kn} = 0$$

en die stelling volg dus.

Opmerkings: (i) 'n Toepassing van hierdie stelling sal in die volgende paragraaf gegee word.

(ii) Kondisies (Γ1), (Δ1) en (B3) word nie altyd bevredig in gevalle wat ons wil beskou nie, en vir sodanige gevalle het ons die volgende stelling.

Stelling 2. 4: Laat $\{c_{ijn}; i, j = 1, \ldots, n\}$, $\{d_{in}; i = 1, \ldots, n\}$, $\{b_{imn}, i = 1, \ldots, n\}$, $\{\gamma_m\}$ en $\{\delta_m\}$ reële getalle wees wat behalwe (B2), (C2) en (D2) ook voldoen aan die volgende:

Daar bestaan 'n ry heelgetalle $\{k_n\}$, met $k_n \to \infty$ as $n \to \infty$, sodat indien:

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{k_n} |\gamma_m|, \quad \sigma^*_n = \sum_{m=1}^{k_n} |\delta_m|$$

$$B_n = \max_{m, r \leq k_n} \left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} b_{imn} b_{irn} - \delta_{mr} \right|$$

$$\Gamma_n = \max_{m \leq k_n} \left| n^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn} - \gamma_m \right|$$

$$\Delta_n = \max_{m \leq k_n} \left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_{in} b_{imn} - \delta_m \right| \text{ en}$$

$$B^*_n = \max_{m, r \leq k_n} \left[n^{-2} \sum_{i=1}^{n} b^2_{imn} b^2_{irn} \right]$$

dan geld:

(BΓ1) $\quad B_n \sigma^2_n = o(1)$

(BΔ1) $\quad B_n \sigma^{*2}_n = o(1)$

(CBΓ1) $\quad \Gamma_n \sigma_n = o(1)$

(DBΔ1) $\quad \Delta_n \sigma^*_n = o(1)$

(BΓ2) $\quad B^*_n \sigma^2_n = o(1)$, as $n \to \infty$.

Onder hierdie voorwaardes sal (2.2.1) geld.

Bewys: Die bewys verloop in hoofsaak soos dié van stelling 2.3. Ter wille van vol=ledigheid gee ons dit egter weer.

Laat $c^*_{ijn} = \sum_{m=1}^{k_n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}$

$d^*_{in} = \sum_{m=1}^{k_n} \delta_m b_{imn}$.

Ons breek die bewys op in twee dele:

(i) Eerstens toon ons aan dat:

(a) $n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = o(1)$

(b) $n^{-1} \sum_{i} (d_{in} - d^*_{in})^2 = o(1)$ as $n \to \infty$.

Beskou geval (a):

Kies N vas en stel

$$F_{nN} = n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m b_{imn} b_{jmn})^2$$

$$= n^{-2} \sum_{i,j} c^2_{ijn} - 2 \sum_{m=1}^{N} \gamma_m (n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn}) + \sum_{m,r=1}^{N} \gamma_m \gamma_r (n^{-1} \sum_{i} b_{imn} b_{irn})^2.$$

Die eerste term konvergeer na $\Sigma_1^\infty \gamma_m^2$ volgens (C2).

Ook sal $n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn} \to \gamma_m$ volgens (CBΓ1) en

$n^{-1} \sum_{i} b_{imn} b_{irn} \to \delta_{mr}$ volgens (BΓ1).

$$\therefore \lim_{n \to \infty} F_{nN} = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^2_m - 2 \sum_{m=1}^{N} \gamma^2_m + \sum_{m=1}^{N} \gamma^2_m$$

$$= \sum_{m=N+1}^{\infty} \gamma^2_m$$

Aangesien $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2 < \infty$ is, volg dus dat:

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} F_{nN} = 0.$$

Verder het ons vir vaste $N < k_n$ dat:

$$F_{nk_n} = n^{-2} \sum_{i,j} [(c_{ijn} - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}) - \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}]^2$$

$$= F_{nN} - 2C_{nN} + B_{nN} \qquad \text{(sê)} \quad \text{met } F_{nN} \text{ soos tevore, en}$$

$$B_{nN} = n^{-2} \sum_{i,j}[\sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m b_{imn} b_{jmn}]^2$$

$$= \sum_{m,r=N+1}^{k_n} \gamma_m\gamma_r[n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn}]^2 \leq \sum_{m,r} |\gamma_m\gamma_r| |(n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn})^2 - \delta_{rm}^2|$$
$$+ \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m^2$$

$$= \sum_{m,r} |\gamma_m\gamma_r| |n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn} - \delta_{rm}| |n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn} + \delta_{rm}| + \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m^2$$

$$\leq \sum_{m,r} |\gamma_m\gamma_r| [n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn} - \delta_{rm}]^2 + 2 \sum_{m,r} |\gamma_m\gamma_r| |n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn} - \delta_{rm}| \delta_{rm}$$
$$+ \sum_{N+1}^{k_n} \gamma_m^2$$

$$\leq B_n^2\sigma_n^2 + 2B_n \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m^2 + \sum_{N+1}^{k_n} \gamma_m^2.$$

Uit die kondisies volg dus dat

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} B_{nN} = 0.$$

Beskou nou C_{nN}:

$$C_{nN} = \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m (n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}\, b_{imn}\, b_{jmn}) - \sum_{m=N+1}^{k_n} \sum_{r=1}^{N} \gamma_m \gamma_r (n^{-1} \sum_i b_{imn}\, b_{irn})^2$$

$$\therefore\ |C_{nN}| \leq \sum_{m=N+1}^{k_n} |\gamma_m|\, |n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}\, b_{imn}\, b_{jmn} - \gamma_m| + \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m^2 +$$

$$+ \sum_{m=N+1}^{k_n} \sum_{r=1}^{N} |\gamma_m \gamma_r| [n^{-1} \sum_i b_{imn}\, b_{irn} - \delta_{mr}]^2 + 2 \sum_{m=N+1}^{k_n} \sum_{r=1}^{N} |\gamma_m \gamma_r|\, |n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn}$$

$$- \delta_{mr}| \delta_{mr}$$

$$\leq \Gamma_n \sigma_n + \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m^2 + B_n^2 \sigma_n^2 + 0$$

$$= \Gamma_n \sigma_n + \sum_{m=N+1}^{k_n} \gamma_m^2 + B_n \sigma_n^2$$

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \limsup_{n \to \infty} |C_{nN}| = 0.$$

Dit volg dus dat:

$\lim_{n \to \infty} F_{nk_n} = 0$ sodat (a) geld.

Om (b) te bewys kan ons op analoë wyse te werk gaan.

(ii) Stel:

$$T_n^* = n^{-1} \sum_{i,j} c^*_{ijn}\, Z_i Z_j + n^{-1/2} \sum_i d^*_{in}\, Z_i$$

dan sal die stelling volg sodra ons kan aantoon dat die verdeling in die regterkant van (2. 2. 1) optree as die asimptotiese verdeling van $T_n^* - ET_n^*$.

Nou is dit duidelik dat:

$$T^*_n - ET^*_n = \sum_{m=1}^{k_n} \gamma_m (Y^2_{mn} - S^2_{mn}) + \sum_{m=1}^{k_n} \delta_m Y_{mn} \text{ waar } Y_{mn} = n^{-1/2} \sum_i b_{imn}\, Z_i$$

en $S^2_{mn} = n^{-1} \sum_i b^2_{imn}$.

Definieer:

$$X_{k,n} = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m (Y^2_{mn} - S^2_{mn}) + \sum_{m=1}^{k} \delta_m Y_{mn}$$

dan volg uit stelling 2.1 dat:

$$D(X_{k,n}) \to D(\sum_{m=1}^{k} \gamma_m (Y^2_m - 1) + \sum_{m=1}^{k} \delta_m Y_m) \text{ as } n \to \infty.$$

Indien ons stel:

$$X_k = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m (Y^2_m - 1) + \sum_{m=1}^{k} \delta_m Y_m$$

dan volg soos by stelling 2.3 dat:

$$D(X_k) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (Y^2_m - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m) \quad \text{as } k \to \infty.$$

Aangesien nou geld dat

$$T^*_n - ET^*_n = X_{k_n, n},$$

hoef ons volgens lemma 2.3 net aan te toon dat:

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P[| \sum_{m=k+1}^{k_n} \gamma_m (Y^2_{mn} - S^2_{mn}) + \sum_{m=k+1}^{k_n} \delta_m Y_{mn} | \geq \delta] = 0 \text{ vir elke } \delta > 0.$$

Nou is $P[|Z| \geq \delta] \leq \delta^{-2} E|Z|^2$.

Beskou dus:

$$A_{k,n} = E[\sum_{m=k+1}^{k_n} \gamma_m (Y^2_{mn} - S^2_{mn}) + \sum_{m=k+1}^{k_n} \delta_m Y_{mn}]^2$$

$$\leq 2E[\sum_{m=k+1}^{k_n} \gamma_m (Y^2_{mn} - S^2_{mn})]^2 + 2E[\sum_{m=k+1}^{k_n} \delta_m Y_{mn}]^2$$

$$= 2(G_{k,n} + G^*_{k,n}) \qquad \text{(sê).}$$

Beskou $G_{k,n}$ en stel:

$$A_{mrn} = E(Y_{mn}^2 - S_{mn}^2)(Y_{rn}^2 - S_{rn}^2)$$

dan volg soos by stelling 2.3 dat:

$$A_{mrn} = (\alpha - 3)n^{-2} \sum_i b_{imn}^2 b_{irn}^2 + 2(n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn})^2.$$

Ons het dus dat:

$$0 \leq G_{k,n} \leq \sum_{m,r=k+1}^{k_n} |\gamma_m \gamma_r| |A_{mrn}|.$$

$$\leq |\alpha - 3| \sum_{m,r} |\gamma_m \gamma_r| (n^{-2} \sum_i b_{imn}^2 b_{irn}^2) + 2 \sum_{m,r} |\gamma_m \gamma_r| (n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn})^2$$

$$\leq |\alpha - 3| B_n^* \sigma_n^2 + 2 \sum_{m=k+1}^{k_n} \gamma_m^2 + 2B_n^2 \sigma_n^2 + 4B_n \sum_{m=k+1}^{k_n} \gamma_m^2, \text{ soos tevore}$$

$$\therefore \lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} G_{k,n} = 0.$$

Konvergensie van $G_{k,n}^*$ na nul volg analoog en ons kan dus sê dat

$$D(T_n^* - ET_n^*) \to D\left(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m \right) \quad \text{as } n \to \infty$$

sodat die stelling volg.

Opmerkings:

(i) Let op dat (BΓ1) en (BΔ1) bloot uitbreidings is van (B1) en (CBΓ1) en (DBΔ1) van (CB2) en (DB2) respektiewelik.

(ii) Toepassing van hierdie stelling sal in 'n latere hoofstuk gegee word.

(iii) Ons toon nou aan dat daar goeie rede bestaan waarom bostaande stellings be=hoort te geld vir 'n wye keuse van $\{c_{ijn}\}$ en $\{d_{in}\}$.

Laat:

$$c_{ijn} = c\left(\frac{i}{n+1}, \frac{j}{n+1}\right) \text{ en } d_{in} = d\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

waar $c(x, y) = c(y, x)$, $\int_0^1 \int_0^1 c^2(x, y)dxdy < \infty$ en $\int_0^1 d^2(x)dx < \infty$ met $c(x, y)$ en $d(x)$ reële meetbare funksies op die eenheidsvierkant en eenheidsinterval respektie=welik.

Volgens die teorie van integraalvergelykings is dit dan bekend dat daar 'n stelsel funksies $\{g_r(x)\}$ op $(0, 1)$ bestaan, wat ortonormaal is d. w. s.

$$\int_0^1 g_r(x)g_s(x)dx = \delta_{rs} \qquad (2.2.2)$$

en 'n ry getalle $\{\gamma_r\}$ gegee deur

$$\gamma_r = \int_0^1 \int_0^1 c(x, y)g_r(x)g_r(y)dxdy \qquad (2.2.3)$$

sodat $$\sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r^2 = \int_0^1 \int_0^1 c^2(x, y)dxdy \quad (< \infty) \qquad (2.2.4)$$

en $$g_r(x)\,\gamma_r = \int_0^1 c(x, y)g_r(y)dy \qquad (2.2.5)$$

terwyl

$$c(x, y) = \underset{N \to \infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{r=1}^{N} \gamma_r g_r(x)g_r(y) \qquad (2.2.6)$$

waar die konvergensie regs dui op konvergensie in gemiddelde kwadraat. Die $\{g_r(x)\}$ staan bekend as die eiefunksies en die $\{\gamma_r\}$ as die eiewaardes van $c(x, y)$ (sien Tricomi (1957), bl. 106).

Onder sekere voorwaardes (bv. as die stelsel $\{g_r(x)\}$ volledig is), bestaan daar ook 'n ry getalle $\{\delta_r\}$ gegee deur:

$$\delta_r = \int_0^1 d(x)g_r(x)dx \qquad (2.2.7)$$

sodat $$\sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 = \int_0^1 d^2(x)dx \quad (< \infty) \qquad (2.2.8)$$

terwyl $d(x) = \underset{N \to \infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{r=1}^{N} \delta_r g_r(x)$.

Aangesien die aantal eiewaardes M oneindig kan wees behoort ons bv. stelling 2. 4 toe te pas. Aangesien stelling 2. 2 goed hiermee ooreenkom en die heu= ristiese argument wat volg beter gestel kan word in terme van hierdie stelling, laat ons aanneem M is eindig en stelling 2. 2 toepas.

Laat $b_{imn} = g_m(\frac{i}{n+1})$, $m = 1, \ldots, M$ dan is dit redelik om te verwag dat die Riemann som in (B1) konvergeer na die integraal in (2. 2. 2) sodat ons kan verwag dat (B1) bevredig sal word. Indien die $\{g_r(x)\}$ redelike funksies is, kan ons ook verwag dat (B2) bevredig word. Die Riemann dubbelsomme in (C1) en (D1) kan ons verwag sal konvergeer na die integrale in (2. 2. 4) en (2. 2. 8) sodat dan ook (C1) en (D1) bevredig word. Uit (2. 2. 3) en (2. 2. 7) lyk dit ook of ons kan verwag dat (CB1) en (DB1) bevredig sal word.

Dit is dus redelik om te verwag dat stelling 2. 2 in hierdie situasie van toepassing is.

(iv) Ons gee vervolgens ook 'n intuïtiewe rede waarom ons telkens c^*_{ijn} en d^*_{in} kies as:

$$c^*_{ijn} = \sum_{m=1}^{k_n} \gamma_m \, b_{imn} \, b_{jmn} \quad \text{en}$$

$$d^*_{in} = \sum_{m=1}^{k_n} \delta_m \, b_{imn}.$$

Beskou weer die situasie soos in (iii) hierbo. Dan is:

$$n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - \sum_{m=1}^{k_n} \gamma_m g_m(\tfrac{i}{n+1}) g_m(\tfrac{j}{n+1}))^2$$

Beskou nou 'n vaste N en stel:

$$D_{nN} = n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m g_m(\tfrac{i}{n+1}) g_m(\tfrac{j}{n+1}))^2$$

$$= n^{-2} \sum_{i,j} (c(\tfrac{i}{n+1}, \tfrac{j}{n+1}) - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m g_m(\tfrac{i}{n+1}) g_m(\tfrac{j}{n+1}))^2.$$

Ons sal dan verwag dat:

$$D_{nN} \to \int_0^1 \int_0^1 [c(x, y) - \sum_{m=1}^{N} \gamma_m g_m(x) g_m(y)]^2 dxdy$$

$$= I_N \quad \text{(sê)} \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Maar volgens keuse van $\{\gamma_m\}$ en $\{g_m(x)\}$ sal $I_N \to 0$ as $N \to \infty$.

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} D_{nN} = 0.$$

Ons kan dus verwag dat onder redelike voorwaardes sal $D_{nk_n} = o(1)$ as $n \to \infty$ en dus

$$n^{-2} \sum_{i,j} (c_{ijn} - c^*_{ijn})^2 = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Net só sou ons verwag dat onder redelike voorwaardes sal

$$n^{-1} \sum_{i} (d_{in} - d^*_{in})^2 = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

In dié geval sal $T_n - ET_n$ dus die asimptotiese verdeling van $T^*_n - ET^*_n$ hê, en soos bostaande bewyse getoon het is dit redelik maklik om kondisies te vind waaronder $T^*_n - ET^*_n$ 'n bepaalde asimptotiese verdeling het.

(v) Indien $T^1_n = n^{-1} \sum_{i,j} c_{ijn} Z_i Z_j$

dan sal onder kondisies (B2), (C2), (BΓ1), (CBΓ1) en (BΓ2) geld dat:

$$D(T_n^1 - ET_n^1) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m (Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \to \infty.$$

Die bewys hiervan volg net soos die bewys van stelling 2. 4 deur net die lineêre term weg te laat.

2. 3 VOORBEELD

As voorbeeld van die toepassing van die teorie van paragraaf 2. 2 beskou ons $Q_n^{(W)}$ van hoofstuk 1 met gewigsfunksie $W \equiv 1$.

Voordat ons hiermee voortgaan, beskou eers die volgende opmerking. Ons het tevore gesien dat ons vir $Q_n^{(W)}$ kan skryf:

$$Q_n^{(W)} = \sum_j (U_{jn} - {}^j/_{n+1})^2 W({}^j/_{n+1})$$

$$= ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ijn+1} Z_i Z_j$$

met $c_{ijn} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} W({}^k/_n)\psi({}^i/_n, {}^k/_n)\psi({}^j/_n, {}^k/_n)$.

Laat nou:

$$c(x, y) = \int_0^1 W(u)\psi(x, u)\psi(y, u)du$$

dan sal vir 'n redelike keuse van W geld dat:

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} W({}^k/_n)\psi(x, {}^k/_n)\psi(y, {}^k/_n) \to \int_0^1 W(u)\psi(x, u)\psi(y, u)du = c(x, y)$$

sodat vir n groot is c_{ijn} ongeveer $c({}^i/_n, {}^j/_n)$. Indien ons nou een van die vorige stellings wil toepas kan ons dus m. b. v. opmerking (iii) aan die einde van paragraaf 2. 2 en c(x, y) soos hierbo probeer om die getalle $\{\gamma_r\}$ en $\{b_{irn}\}$ te vind.

Beskou nou weer die voorbeeld d. w. s. :

$$Q_n^{(1)} = ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ijn+1} Z_i Z_j$$

met $c_{ijn} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \psi({}^i/_n, {}^k/_n)\psi({}^j/_n, {}^k/_n)$.

Met hierdie keuse van $\{c_{ijn}\}$ wil ons nou een van die stellings toepas. Let op dat aangesien $d_{in} = 0$, verval die kondisies waarin d_{in} en δ_r voorkom.

Om die getalle $\{\gamma_r\}$ en $\{b_{irn}\}$ te vind, maak ons nou gebruik van die op= merking hierbo. Laat dus:

$$c(x, y) = \int_0^1 \psi(x, u)\psi(y, u)du.$$

Dan is duidelik $\int_0^1 \int_0^1 c^2(x, y)dxdy < \infty$. Dit volg dadelik dat:

$$c(x, y) = \begin{cases} 1/2(x^2 + y^2) - y + 1/3 & \text{vir } x \leq y \\ 1/2(x^2 + y^2) - x + 1/3 & \text{vir } y \leq x\,. \end{cases}$$

Ons toon nou aan dat die eiewaardes en eiefunksies van $c(x, y)$ gegee word deur:

$$\gamma_r = ({}^1/_{\pi r})^2 \qquad r = 1, 2, \ldots$$

en $g_r(x) = \sqrt{2} \cos (r\pi x)$

<u>Nou:</u> $\int_0^1 c(x, y)g_m(y)dy$

$= \int_0^1 \psi(x, u)[\int_0^1 g_m(y)\psi(y, u)dy]du$

$= \int_0^1 \psi(x, u)[\int_0^u (1 - u)g_m(y)dy - \int_u^1 ug_m(y)dy]du$

$$= \int_o^1 \psi(x,\ u)[(1-u)2^{\frac{1}{2}} \int_0^u \cos(m\pi y)dy - u2^{\frac{1}{2}} \int_u^1 \cos(m\pi y)dy]du$$

$$= \int_o^1 \psi(x,\ u)[\frac{2^{\frac{1}{2}}\sin(m\pi u)}{m\pi}]du$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}/_{m\pi}[- \int_o^x u \sin(m\pi u)du + \int_x^1 (1-u)\sin(m\pi u)du]$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}/_{m\pi}[-(m\pi)^{-2} \int_o^{m\pi} z \sin zdz - \cos m\pi u/m\pi|_x^1]$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}/_{m\pi}[-(m\pi)^{-2}(\sin z - z \cos z)|_o^{m\pi} - \cos m\pi/m\pi + \cos(m\pi x)/m\pi]$$

$$=(2^{\frac{1}{2}}/_{m\pi}) \cos(m\pi x)/m\pi$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \cos(m\pi x)/(m\pi)^2 = \gamma_m g_m(x)$$

en die bewering geld dus.

Let op dat:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r = \pi^{-2} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-2} = 1/6 < \infty,$$

en met $b_{imn} = g_m(\frac{i}{n+1})$ geld:

$$|b_{imn}| = 2^{\frac{1}{2}}|\cos(m\pi i/n+1)| \leq 2^{\frac{1}{2}}$$

sodat kondisies (Γ1) en (B3) van stelling 2. 3 bevredig word. Ook is $g_m(x)$ begrensd en kontinu in x, vir elke m, sodat die Riemann som in (B1) konvergeer na die integraal

$$\int_0^1 g_m(x)g_r(x)dx = \delta_{mr}$$

sodat (B1) geld.

Verder het ons dat:

$$(n+1)^{-2} \sum_{i,j} c^2_{ijn+1}$$

$$= (n+1)^{-4} \sum_{i,j,r,s} \psi_{irn}\psi_{jrn}\psi_{isn}\psi_{jsn}.$$

Aangesien $\psi(x, y)$ begrensd en byna oral (m. b. t. Lebesgue maat) kontinu is, volg dat hierdie som konvergeer na die integraal

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \psi(x, u)\psi(y, u)\psi(x, v)\psi(y, v)dxdydudv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 c^2(x, y)dxdy = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2$$

sodat dus:

$$n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}^2 \to \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2$$

en (C2) dus bevredig word.

Ten slotte volg uit die begrensdheid en byna oral kontinuïteit van $\psi(x, y)$ en $g_m(x)$ dat die dubbelsom in (CB2) konvergeer na die integraal

$$\int_0^1 \int_0^1 c(x, y)g_m(x)g_m(y)dxdy = \gamma_m$$

sodat (CB2) bevredig word. Stelling 2. 3 geld dus, sodat:

$$D(T_n - ET_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{-2}(Y_m^2 - 1)).$$

<u>Opmerking:</u> Let op dat ons hier nie die eksplisiete uitdrukking van $c(x, y)$ nodig gehad het nie.

Verder is: $ET_n = n^{-1} \sum_i c_{iin} \to \int_0^1 \int_0^1 \psi^2(x, u)dxdu$

$$= \int_0^1 c(x, x)dx = {}^1/_6.$$

Maar ook is $\sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{-2} = {}^1/_6$

sodat dus:

$$D(T_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{-2} Y_m^2).$$

Uit die bespreking van paragraaf 1. 3 volg dus dat:

$$D(Q_n^{(1)}) \rightarrow D(\sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{-2} Y_m^2).$$

Hierdie is presies die verdeling in (1. 2. 3), d. w. s. die asimptotiese verdeling van $Q_n^{(1)}$ en W_n^2 in die geval $W \equiv 1$ is dieselfde (onder H_o). Hierdie resul= tate is wat ons sou verwag aangesien die twee statistieke onder H_o essensieel die= selfde is. Laasgenoemde feit sien ons as volg:

Volgens Parzen (1964) bl. 100, kan ons W_n^2 in die geval $W \equiv 1$ skryf as:

$$W_n^2 = {}^1/_{12n} + \sum_{j=1}^{n} (F_o(X_{jn}) - \frac{2j-1}{2n})^2.$$

Onder H_o is $F_o(X_{jn}) = U_{jn}$ sodat $W_n^2 = {}^1/_{12n} + \sum_{j=1}^{n} (U_{jn} - \frac{2j-1}{2n})^2$

$$= {}^1/_{12n} + \sum_{j=1}^{n} [(U_{jn} - \frac{j}{n+1}) + ({}^j/_{n+1} - \frac{2j-1}{2n})]^2$$

$$= \Sigma(U_{jn} - {}^j/_{n+1})^2 + R_n \quad \text{(sê)}$$

$$= Q_n^{(1)} + R_n$$

waar:

$$R_n = {}^1/_{12n} + \sum_{j=1}^{n} ({}^j/_{n+1} - \frac{2j-1}{2n})^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} (U_{jn} - {}^j/_{n+1})({}^j/_{n+1} - {}^{2j-1}/_{2n}).$$

Ons toon aan dat $R_n = o_p(1)$ as $n \rightarrow \infty$.

Nou:

$${}^j/_{n+1} - {}^{2j-1}/_{2n} = \frac{n+1-2j}{2n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_j ({}^j/_{n+1} - \frac{2j-1}{2n})^2 = \frac{1}{4n^2(n+1)^2} \sum_j [(n+1)^2 - 4j(n+1) + 4j^2]$$

$$= \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} + \frac{2n+1}{6n(n+1)} = o(1).$$

$$E|2 \sum_j (U_{jn} - {}^j/_{n+1})({}^j/_{n+1} - {}^{2j-1}/_{2n})| \leq {}^1/_{n(n+1)} \sum_j |(n+1) - 2j| E|U_{jn} - {}^j/_{n+1}|$$

$$\leq {}^1/_{n(n+1)} \sum_j |(n+1) - 2j| E^{\frac{1}{2}}(U_{jn} - {}^j/_{n+1})^2$$

$$= \frac{1}{n(n+2)^{\frac{1}{2}}} \sum_j |1 - \frac{2j}{n+1}| [{}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1})]^{\frac{1}{2}} \text{ (sien lemma a9)}$$

$$= (n+2)^{-\frac{1}{2}} \; O(1)$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Dus volg dat $E|R_n| = o(1)$ as $n \to \infty$. Aangesien $P[|R_n| \geq \delta] \leq E|R_n|/\delta$ volg dus dat $R_n = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Die twee statistieke moet dus dieselfde asimptotiese verdeling hê, sodat ons teorie korrekte resultate lewer in 'n bekende geval.

Opmerking: In die voorbeelde wat volg sal ons altyd die metode van hierdie voor= beeld gebruik om die getalle $\{\gamma_m\}$ en $\{b_{imn}\}$ te vind.

HOOFSTUK 3

'N TOETSSTATISTIEK VIR $H_o : F = \Phi$ EN REDUKSIE DAARVAN TOT 'N KWADRATIESE VORM

3.1 DIE TOETSSTATISTIEK VIR DIE ENKELVOUDIGE GEVAL

Beskou die opset soos aan die begin van paragraaf 1.3 en gestel nou dat $F_o = \Phi$. In dit wat volg sal ons deurgaans aanneem dat H_o geld.

Ons het gesien dat $EU_{jn} = {}^j/_{n+1}$, sodat 'n aanneemlike toetsstatistiek ver= kry kan word deur U_{jn} met ${}^j/_{n+1}$ te vergelyk. Dit beteken dat ons in die huidige ge= val $\Phi(X_{jn})$ met ${}^j/_{n+1}$ vergelyk. As alternatiewe statistiek kan ons ook X_{jn} met $\Phi^{-1}({}^j/_{n+1})$ vergelyk, d.w.s. $\Phi^{-1}(U_{jn})$ met $\Phi^{-1}({}^j/_{n+1})$.

As toetsstatistiek kan ons dus gebruik:

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} [\Phi^{-1}(U_{jn}) - \Phi^{-1}({}^j/_{n+1})]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [H(U_{jn}) - H({}^j/_{n+1})]^2$$

waar $H = \Phi^{-1}$.

Om nou L_n in die vorm van die algemene teorie te kry, gaan ons as volg te werk:

Ontwikkel $H(U_{jn})$ in 'n Taylor reeks om ${}^j/_{n+1}$, sodat ons kan skryf: (sien paragraaf 1.5 vir notasie)

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} [V_{jn} H'_{jn} + \tfrac{1}{2} V_{jn}^2 H''(U^*_{jn})]^2$$

waar U^*_{jn} 'n stogastiese veranderlike is wat tussen U_{jn} en $^j/_{n+1}$ lê. Vermenigvuldig bostaande uit sodat:

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} V_{jn}^2 (H'_{jn})^2 + \sum_{j=1}^{n} V_{jn}^3 H'_{jn} H''(U^*_{jn}) + {}^1/_4 \sum_{j=1}^{n} V_{jn}^4 H''(U^*_{jn})^2$$

$$= Q_n^{(h)} + R_n \text{ (sê)}$$

met $h(x) = H'(x)^2$, terwyl $Q_n^{(W)}$ soos in paragraaf 1. 3 is. Ons sien dus dat behalwe vir R_n, kan ons L_n skryf as 'n kwadratiese vorm in onafhanklike identies verdeelde stogastiese veranderlikes. Ons sal in hierdie hoofstuk aantoon dat $R_n = o_p(1)$ as $n \to \infty$, sodat L_n en $Q_n^{(h)}$ asimptoties dieselfde verdeling het. As alternatief kon ons begin het met $Q_n^{(W)}$ as toetsstatistiek en h as gewigsfunksie gekies het. Ons sal in 'n latere hoofstuk sien dat daar aanduidings is dat hierdie keuse in elk geval beter is as die keuse $W \equiv 1$.

<u>Opmerking</u>: Indien $W(x) = h(x)$ sal ons in dit wat volg Q_n skryf vir $Q_n^{(W)}$.

3. 2 ENKELE VOORAFGAANDE LEMMAS

Vir gebruik in hierdie en latere hoofstukke het ons 'n aantal resultate vooraf nodig.

Laat: $\alpha_n = H(^1/_{n+1}) = \Phi^{-1}(^1/_{n+1})$ sodat dus $\alpha_n \to -\infty$ as $n \to \infty$. Die ry $\{k_n\}$ waar=van daar in stelling 2. 4 sprake is, sal ons altyd kies as:

$$k_n = [\,|\alpha_n|\,], \; n = 1, 2, \ldots$$

sodat duidelik $k_n \to \infty$ as $n \to \infty$.

<u>Lemma 3.1:</u> Vir alle $\delta > 0$ geld dat $|\alpha_n|^{|\alpha_n|} = o(n^\delta)$ as $n \to \infty$.

<u>Bewys:</u> Ons het dat $n \sim n+1$ sodat dus $n^{-1} \sim \Phi(\alpha_n)$, met $\alpha_n < 0$ en $\alpha_n \to -\infty$ as $n \to \infty$. Met behulp van lemma a3 volg dus

$$n^{-\delta}|\alpha_n|^{|\alpha_n|} \sim |\alpha_n|^{|\alpha_n|}\Phi(\alpha_n)^\delta \sim |\alpha_n|^{|\alpha_n|}\frac{\phi(\alpha_n)^\delta}{|\alpha_n|^\delta}$$

$$= (2\pi)^{-\delta/2}\exp[-{}^\delta/_2\,\alpha_n^2 + (|\alpha_n| - \delta)\log|\alpha_n|]$$

$$= (2\pi)^{-\delta/2}\exp[-\alpha_n^2({}^\delta/_2 - \frac{(|\alpha_n| - \delta)\log|\alpha_n|}{\alpha_n^2})]$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Die lemma volg dus.

Die volgende lemmas gee vir ons kennis aangaande die gedrag van die funksie $H(x)$, en sekere variasies daarvan.

<u>Lemma 3.2:</u> Vir $x \geq \frac{1}{2}$ geld dat $(1 - x)H'(x) \leq H(x)^{-1}$ terwyl vir $x \leq \frac{1}{2}$ geld dat:

$$xH'(x) \leq |H(x)|^{-1}.$$

<u>Bewys:</u> Dit volg dadelik uit lemma a3 deur x te vervang met $H(x)$.

<u>Opmerking:</u> Ons sal die lemma gewoonlik gebruik vir die geval waar $x = {}^k/_{n+1}$, d.w.s.:

$$({}^k/_{n+1})H'({}^k/_{n+1}) \leq |H({}^k/_{n+1})|^{-1} \text{ vir } {}^k/_{n+1} \leq \tfrac{1}{2} \text{ en}$$

$$(1 - {}^k/_{n+1})H'({}^k/_{n+1}) \leq H({}^k/_{n+1})^{-1} \text{ vir } {}^k/_{n+1} \geq \tfrac{1}{2}.$$

<u>Lemma 3. 3:</u> Laat:

$$I_n(r) = \int_0^{1/2/_{n+1}} H(x)^r dx.$$

Dan geld vir elke $\delta < 1$ dat $\max\limits_{r \leq k_n} |I_n(r)| = o(n^{-\delta})$ as $n \to \infty$.

<u>Bewys:</u> Laat $\alpha_n' = H(^{1/2}/_{n+1})$ sodat $|\alpha_n'| > 1$ vir n groot genoeg. Nou is volgens lemma a8

$$|I_n(r)| = |\int_{-\infty}^{\alpha_n'} x^r \phi(x)dx|$$

$$= |\beta_r(\alpha_n')| \leq |\alpha_n'|^{r-1}\phi(\alpha_n')[1 + |\nu_r(\alpha_n')|] \leq |\alpha_n'|^{r-1} \phi(\alpha_n')[1 + r!].$$

Met behulp van lemma a7 volg dus dat as $n \to \infty$, dan is:

$$\max_{r \leq k_n} |I_n(r)| \leq |\alpha_n'|^{k_n} \phi(\alpha_n')[1 + (k_n)!] \leq |\alpha_n'|^{k_n'} \phi(\alpha_n')[1 + (k_n')^{k_n'} o(1)]$$

waar $k_n' = [|\alpha_n'|]$, sodat dus $k_n \leq k_n'$.

Laat nou $\delta<1$ wees. Dan is

$$n^\delta |\alpha_n'|^{k_n'} \phi(\alpha_n')(k_n')^{k_n'} \leq (n+1)^\delta |\alpha_n'|^{2|\alpha_n'|} \phi(\alpha_n')$$

$$= [2\Phi(\alpha_n')]^{-\delta} |\alpha_n'|^{2|\alpha_n'|} \phi(\alpha_n') \sim 2^{-\delta} (\phi(\alpha_n')/|\alpha_n'|)^{-\delta} |\alpha_n'|^{2|\alpha_n'|} \phi(\alpha_n')$$

$$= 2^{-\delta} (2\pi)^{1/2(-1+\delta)} \exp[-\tfrac{1}{2}(\alpha_n')^2((1-\delta) - 2\frac{(2|\alpha_n'| + \delta)\log(|\alpha_n'|)}{|\alpha_n'|^2})]$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$.

$\therefore\ n^\delta |\alpha_n'|^{k_n'} \phi(\alpha_n')(k_n')^{k_n'} = o(1)$ as $n \to \infty$, vir elke $\delta < 1$.

$\therefore\ n^\delta \max\limits_{r \leq k_n} |I_n(r)| = o(1)$ as $n \to \infty$ wat die bewys voltooi.

<u>Lemma 3.4:</u> Laat, vir $k = 1, 2, \dots, n$.

$$I_{nk}(r) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{k} H({}^{i}/_{n+1})^{r} - \int_{o}^{k/n} H(x)^{r} dx.$$

Dan geld vir elke $\delta < 1$ dat:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \max_{r \leq k_n} |I_{nk}(r)| = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty.$$

<u>Bewys:</u> (i) Gestel r is onewe. Dan is $H(x)^{r}$ 'n monotone funksie op (0, 1) en volgens lemma a5 geld dus dat:

$$|I_{nk}(r)| \leq \left|\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{k} H_{in}^{r} - \int_{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^{r} dx\right| + \int_{[{}^{k}/_{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}]} |H(x)|^{r} dx + \int_{o}^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} |H(x)|^{r} dx$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left|H\left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{r} - H\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{r}\right| + \int_{[{}^{k}/_{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}]} |H(x)^{r}| dx + \int_{o}^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} |H(x)|^{r} dx$$

$= R_{1n}(r, k) + R_{2n}(r, k) + R_{3n}(r)$ (sê).

Nou, vir n groot genoeg is $R_{1n}(r, k) \leq {}^{2}/_{n+1} \left|H\left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)^{r}\right| \leq {}^{2}/_{n+1} \left|H\left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right|^{k_n}$

$= o(n^{-\delta})$ as $n \to \infty$ en $\delta < 1$.

(Dit volg net soos die bewys van lemma 3.1).

$$\therefore\ n^{\delta} \max_{1 \leq k \leq n} \max_{\substack{r \leq k_n \\ r \text{ onewe}}} R_{1n}(r, k) = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat voorts ${}^{k}/_{n} \leq \frac{1}{2}$, dan is ${}^{k}/_{n} \leq \frac{k+\frac{1}{2}}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ sodat geld dat

$$R_{2n}(r,k) \leq |H(k/n)|^r \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}-k/n}{n+1}\right) \leq \frac{\frac{1}{2}}{n+1}\,|H(1/_{n+1})|^r \leq \frac{\frac{1}{2}}{n+1}\,|H(1/_{n+1})|^{k_n} \text{ vir } n$$

groot genoeg.

$$\therefore \max_{k/n \leq \frac{1}{2}} \ \max_{r \text{ onewe}} R_{2n}(r,k) = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty \text{ en } \delta < 1.$$

Laat nou $k/_n > \frac{1}{2}$, dan is $k/_n > {}^{k+\frac{1}{2}}/_{n+1} > \frac{1}{2}$.

Gestel eers $k < n$; dan is:

$$R_{2n}(r,k) \leq |H(\tfrac{n-1}{n})^r| \cdot \left(\frac{k/n - \frac{1}{2}}{n+1}\right) \leq \frac{\frac{1}{2}}{n+1}\,|H(\tfrac{n-1}{n})|^r \leq \frac{\frac{1}{2}}{n+1}\,|H(\tfrac{n-1}{n})|^{k_n}$$

$$= o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty \text{ en } \delta < 1.$$

Vir $k = n$ is:

$$R_{2n}(r,n) = \int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} |H(x)|^r dx$$

$$= \left| \int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} H(x)^r dx \right|$$

$$= \left| \int_{0}^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^r dx \right|.$$

Volgens lemma 3. 3 is dus

$$\max_{r \leq k_n} R_{2n}(r,n) = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty, \text{ met } \delta < 1.$$

Ons vind dus dat

$$\max_{1 \leq k \leq n} \ \max_{\substack{r \leq k_n \\ r \text{ onewe}}} R_{2n}(r,k) = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty, \text{ met } \delta < 1.$$

Ook het ons dat

$$R_{3n}(r) = \int_0^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} |H(x)^r|\,dx$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^r\,dx \right|$$

$$\therefore \max_{r \leq k_n} R_{3n}(r) = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty \text{ en } \delta < 1 \text{ (volgens lemma 3. 3).}$$

Ons konkludeer dat:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \max_{\substack{r \leq k_n \\ r \text{ onewe}}} |I_{nk}(r)| = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty \text{ en } \delta < 1.$$

(ii) Gestel nou r is ewe:

Vir $^k/_n \leq \frac{1}{2}$ het ons dat $H(x)^r$ monotoon is op $(0, {}^k/_n)$. Net soos by (i) sal volg dat:

$$\max_{\substack{1 \leq k \leq n \\ {}^k/_n \leq \frac{1}{2}}} \max_{\substack{r \leq k_n \\ r \text{ ewe}}} |I_{nk}(r)| = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty \text{ en } \delta < 1.$$

Laat nou $^k/_n > \frac{1}{2}$. Dan kan ons skryf:

$$I_{nk}(r) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} H_{in}^r - \int_0^{\frac{1}{2}} H(x)^r dx + \frac{1}{n+1} \sum_{i=[\frac{n}{2}]+1}^{k} H_{in}^r - \int_{\frac{1}{2}}^{k/n} H(x)^r dx$$

$$= R_{4n}(r, k) + R_{5n}(r, k) \qquad \text{(sê)}$$

Bostaande bewyse kan nou analoog deurgevoer word vir R_{4n} en R_{5n} om dus te vind dat:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \max_{r \leq k_n} |I_{nk}(r)| = o(n^{-\delta}) \text{ as } n \to \infty \text{ en } \delta < 1.$$

Dit voltooi die bewys.

Opmerking: Hierdie lemma gee dus vir ons 'n tempo waarteen die Riemann-som van $H(x)^r$ konvergeer na die ooreenkomstige Riemann integraal. Uitbreiding hiervan na funksies van die vorm $H(x)^r \cdot h_r(x)$ vir sekere keuses van $h_r(x)$ sal aanstons ge=gee word. Vooraf gee ons eers 'n resultaat i. v. m. die vorm van die funksie $H(x)$ en sekere variasies daarop.

Lemma 3. 5: (i) Vir $r \geq 0$ is $(1-x)^2 H(x)^r$ monotoon op $(0, \frac{1}{2})$ en $x^2 H(x)^r$ monotoon op $(\frac{1}{2}, 1)$.

(ii) Vir $r \geq 2$ is die funksie $x(1-x)^2 H'(x)H(x)^r$ monotoon op $(0, \delta)$ en begrensd op $(\delta, 1)$, vir een of ander $\delta > 0$. Vir $r < 2$ is die funksie begrensd op $(0, 1)$. Analoog is $x^2(1-x)H'(x)H(x)^r$ monotoon op $(1-\delta, 1)$ en begrensd op $(0, 1-\delta)$.

(iii) Daar bestaan 'n $\delta > 0$ sodat $x^2(1-x)^2 H'(x)^2$ stygend is op $(0, \delta)$ en dalend op $(1-\delta, 1)$. Die funksie is begrensd op $(0, 1)$.

Bewys: Dit volg maklik deur differensiasie, en toepassing van lemma 3. 2.

Stel nou:

$$h_{1r}(x) = (1-x)^2 H(x)^r$$

$$h_{2r}(x) = x^2 H(x)^r$$

en $h_{3r}(x) = x(1-x)H(x)^r$.

Ons het dan die volgende:

Lemma 3. 6: As $n \to \infty$ geld vir enige $\delta < 1$ dat:

(i) $$\max_{0 \leq r \leq 2k_n} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_{1r}({}^{k}/_{n+1}) - \int_0^1 h_{1r}(x)dx \right| = o(n^{-\delta})$$

(ii) $$\max_{0 \leq r \leq 2k_n} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_{2r}({}^{k}/_{n+1}) - \int_0^1 h_{2r}(x)dx \right| = o(n^{-\delta})$$

(iii) $\max_{0 \le r \le 2k_n} \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_{3r}(^k/_{n+1}) - \int_o^1 h_{3r}(x)dx \right| = o(n^{-\delta})$.

Bewys: (i) Volgens lemma 3. 5 (i) is $h_{1r}(x)$ monotoon op $(0, \frac{1}{2})$. Stel:

$$R_{1n}(r) = \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} h_{1r}(^k/_{n+1}) - \int_o^{\frac{1}{2}} h_{1r}(x)dx \right| \le \frac{n+1}{n} \left| (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} h_{1r}(^k/_{n+1}) - \int_o^{\frac{1}{2}} h_{1r}(x)dx \right|$$

$$+ n^{-1} \left| \int_o^{\frac{1}{2}} h_{1r}(x)dx \right|$$

$$= (\frac{n+1}{n}) R_{2n}(r) + R_{3n}(r).$$

Volgens lemma a5 volg dat:

$$R_{2n}(r) \le (n+1)^{-1} \left| h_{1r}(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}) - h_{1r}(\frac{[\frac{n}{2}] + \frac{1}{2}}{n+1}) \right| + \left| \int_o^{\frac{1}{2}/_{n+1}} h_{1r}(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{[n/2]+\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{1}{2}} h_{1r}(x)dx \right|.$$

Hieruit volg dan dadelik dat:

$$\max_{r \le 2k_n} R_{2n}(r) = o(n^{-\delta}), \ \delta < 1.$$

Verder het ons m. b. v. lemma a12 dat:

$$R_{3n}(r) \le n^{-1} \int_o^{\frac{1}{2}} |H(x)^r| dx \le n^{-1} \int_o^1 |H(x)|^r dx \le n^{-1} \left(\int_o^1 H(x)^{2r} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= n^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} \phi(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= n^{-1} \left(\frac{(2r)!}{2^r r!} \right)^{\frac{1}{2}} \le n^{-1} (4k_n)!$$

$$= o(n^{-\delta}) \text{ met } \delta < 1, \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore \max_{r \leq 2k_n} R_{3n}(r) = o(n^{-\delta}), \ \delta < 1$$

$$\therefore \max_{r \leq 2k_n} R_{1n}(r) = o(n^{-\delta}), \ \delta < 1.$$

Beskou nou die interval $(\frac{1}{2}, 1)$. Ons het dat

$h'_{1r}(x) = -2(1-x)H(x)^r + r(1-x)^2 H'(x)H(x)^{r-1}$. Pas ons nou lemma a6 hierop toe, dan vind ons dat:

$$\left|n^{-1} \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n} h_{1r}({}^k/_{n+1}) - \int_{\frac{1}{2}}^{1} h_{1r}(x)dx\right| \leq \frac{n+1}{n} \cdot (n+1)^{-2} (n - [\tfrac{n}{2}]) \sup_{\frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1} \leq x \leq \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}} |h'_{1r}(x)|$$

$$+ \left| \int_{\frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{1}{2}} h_{1r}(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} h_{1r}(x)dx \right| + n^{-1} \left| \int_{\frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}} h_{1r}(x)dx \right|.$$

Met behulp van lemma 3. 3 volg konvergensie van die laaste drie terme dadelik.

As $n \to \infty$ kan ons vir die eerste term skryf:

$$O(1)n^{-1} \sup_x |h'_{1r}(x)| \leq O(1)n^{-1} \left(2\left|H\left(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right|^r + r\left|H\left(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right|^{r-1} \cdot \left(1 - \frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 H'\left(\frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right)$$

$$\leq O(1)\left(2\left|H\left(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right|^{k_n} + k_n\left|H\left(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right|^{k_n} \cdot O(1)\right)$$

$= o(n^{-\delta})$, $\delta < 1$, volgens lemma 3. 1.

Dit voltooi die bewys van (i).

(ii) Die bewys hiervan volg uit (i) deur simmetrie.

(iii) Ons het dat:

$$h'_{3r}(x) = (1 - 2x)H(x)^r + rx(1 - x)H(x)^{r-1}H'(x).$$

Pas ons nou weer lemma a6 toe, dan volg:

$$\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n} h_{3r}({}^{k}/_{n+1}) - \int_0^1 h_{3r}(x)dx\right| \leq (\tfrac{n+1}{n})(n+1)^{-2}\,.\,n \sup_{\frac{\frac{1}{2}}{n+1} \leq x \leq \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}} |h'_{3r}(x)|$$

$$+ \left|\int_0^{1/2/_{n+1}} h_{3r}(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} h_{3r}(x)dx\right| + n^{-1}\left|\int_0^1 h_{3r}(x)dx\right|.$$

Konvergensie van die tweede en derde terme volg m. b. v. lemma 3. 3 en konvergensie van die laaste term m. b. v. lemma a12.

As $n \to \infty$ kan ons vir die eerste term skryf:

$$O(1)n^{-1} \sup_{\frac{\frac{1}{2}}{n+1} \leq x \leq \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}} |h'_{3r}(x)| \leq O(1)n^{-1}\left[|H(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1})|^r + r|H(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1})|^{r-1}\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2})H'(\tfrac{1}{2})\right]$$

$$\leq O(1)n^{-1}\left[|H(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1})|^{2k_n} + 2k_n|H(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1})|^{2k_n}\,.\,O(1)\right]$$

$$= o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Dit voltooi die bewys van (iii).

<u>Opmerking</u>: Die gebruik van hierdie lemmas sal duidelik blyk uit die latere werk waar ons konvergensie van sekere resterme moet aantoon.

Ten slotte gee ons nog een lemma i. v. m. die gedrag van $H'(x)$:

<u>Lemma 3. 7:</u> Stel $h(x) = H'(x)^2$. Dan geld dat:

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} ({}^{k}/_{n+1})(1 - {}^{k}/_{n+1})h_{kn} = O(\log n) \text{ as } n \to \infty.$$

<u>Bewys:</u> Laat $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Dan kan ons skryf:

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} {}^{k}/_{n+1}(1-{}^{k}/_{n+1})h_{kn} = n^{-1}\sum_{k=1}^{[n\delta]} {}^{k}/_{n+1}(1-{}^{k}/_{n+1})h_{kn} + n^{-1}\sum_{k=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} {}^{k}/_{n+1}(1-{}^{k}/_{n+1})h_{kn}$$

$$+ n^{-1}\sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n} {}^{k}/_{n+1}(1-{}^{k}/_{n+1})h_{kn}$$

$$= A_{1n}(\delta) + A_{2n}(\delta) + A_{3n}(\delta).$$

Aangesien die funksie $x(1 - x)h(x)$ begrensd is op $(\delta,\ 1 - \delta)$ volg direk dat $A_{2n}(\delta) = O(\log n)$ as $n \to \infty$.

Ons toon aan dat $A_{1n}(\delta) = O(\log n)$ as $n \to \infty$. Uit simmetrie sal dan volg dat $A_{3n}(\delta) = O(\log n)$ as $n \to \infty$.

Nou, met behulp van lemma 3. 2 volg dat:

$$A_{1n}(\delta) \leq (n+1)n^{-1}\sum_{k=1}^{[n\delta]} ({}^{k}/_{n+1})^{2} h_{kn} \cdot k^{-1} \leq O(1)\sum_{k=1}^{[n\delta]} H_{kn}^{-2}k^{-1} \leq O(1)\, H\left(\frac{[n\delta]}{n+1}\right)^{-2}\sum_{k=1}^{[n\delta]} k^{-1}$$

$$\leq O(1)\, H(\delta)^{-2}\sum_{k} k^{-1} \sim O(1)\, H(\delta)^{-2}\log[n\delta],$$

volgens lemma a4.

$\therefore\ A_{1n}(\delta) = O(\log n)$ as $n \to \infty$. Die lemma volg dus.

3. 3 KONVERGENSIE VAN DIE RESTERM R_n

In paragraaf 3. 1 het ons gesien dat onder H_o kan ons die toetsstatistiek L_n skryf as $Q_n + R_n$, met:

$$R_n = \sum_{j=1}^{n} V_{jn}^{3} H'_{jn} H''(U^*_{jn}) + 1/4\sum_{j=1}^{n} V_{jn}^{4} H''(U^*_{jn})^{2}.$$

Uit die vorm van die funksie $|H''(x)| = |H(x)|H'(x)^2$ en die definisie van U^*_{jn} volg dat

$$|H''(U^*_{jn})| \leq |H''_{jn}| + |H''(U_{jn})| \text{ sodat dus:}$$

$$|R_n| \leq \sum_{j=1}^{n} |V^3_{jn}|H'_{jn}|H''_{jn}| + \sum_{j=1}^{n} |V^3_{jn}|H'_{jn}|H''(U_{jn})| + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} V^4_{jn}(H''_{jn})^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} V^4_{jn}H''(U_{jn})^2$$

$$= R_{1n} + R_{2n} + \tfrac{1}{2}R_{3n} + \tfrac{1}{2}R_{4n} \quad \text{(sê)}$$

waar ons gebruik gemaak het van die elementêre ongelykheid $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

Deur elke R_{in}, $i = 1, 2, 3, 4$, afsonderlik te beskou, kan ons die volgende bewys:

<u>Stelling 3.1:</u> As $n \to \infty$ geld dat:

$$R_n = o_p(1).$$

<u>Bewys:</u> Ons breek die bewys op in vier dele.

<u>(i) $R_{1n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$</u>

Uit lemma a9 volg dat $EV^2_{jn} \leq n^{-1}({}^j/_{n+1})(1 - {}^j/_{n+1})$ en

$$EV^4_{jn} \leq 36n^{-2}({}^j/_{n+1})^2(1 - {}^j/_{n+1})^2.$$

Met behulp van Schwarz se ongelykheid volg ook dat

$$E|X|^3 = E|X|\,|X|^2 \leq (E|X|^2E|X|^4)^{\frac{1}{2}}.$$

Toepassing hiervan op R_{1n} gee dan:

$$E|R_{1n}| \leq \sum_j (EV^2_{jn}EV^4_{jn})^{\frac{1}{2}} H'_{jn}|H''_{jn}| \leq 6n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} ({}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1}))^{3/2}(H'_{jn})^3|H_{jn}|.$$

Laat $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Dan kan ons skryf:

$$E|R_{1n}| \leq 6n^{-3/2} \sum_{j=1}^{[n\delta]} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2}(H'_{jn})^{3}|H_{jn}|$$

$$+ 6n^{-3/2} \sum_{j=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2}(H'_{jn})^{3}|H_{jn}| + 6n^{-3/2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} ({}^{j}/_{n+1}(1-{}^{j}/_{n+1}))^{3/2}(H'_{jn})^{3}|H_{jn}|$$

$$= 6R_{1n}(1, \delta) + 6R_{1n}(2, \delta) + 6R_{1n}(3, \delta) \quad \text{(sê)}.$$

Aangesien die funksie $(x(1 - x))^{3/2}\, H'(x)^{3}|H(x)|$ begrensd is op $(\delta,\ 1-\delta)$ volg dadelik dat

$$R_{1n}(2, \delta) \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Beskou nou $R_{1n}(1, \delta)$. Aangesien in hierdie geval ${}^{j}/_{n+1} < \frac{1}{2}$, kan ons dus lemma 3. 2 toepas om te kry:

$$R_{1n}(1, \delta) \leq ((n+1)n^{-1})^{3/2} \sum_{j=1}^{[n\delta]} ({}^{j}/_{n+1})^{3}(H'_{jn})^{3}|H_{jn}|j^{-3/2} \leq O(1) \sum_{j=1}^{[n\delta]} H_{jn}^{-2} \cdot j^{-3/2}$$

$$\leq O(1)H(\tfrac{[n\delta]}{n+1})^{-2} \sum_{j=1}^{[n\delta]} j^{-3/2} \leq O(1)H(\delta)^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2}$$

$$= O(1)\, H(\delta)^{-2}$$

$$\therefore \limsup_{n \to \infty} R_{1n}(1, \delta) \leq O(1)\, H(\delta)^{-2}.$$

$$\text{Maar } H(\delta)^{-2} \to 0 \text{ as } \delta \to 0$$

$$\therefore \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} R_{1n}(1, \delta) = 0.$$

Beskou nou $R_{1n}(3, \delta)$. Vir n groot genoeg het ons dan dat ${}^{j}/_{n+1} > \frac{1}{2}$ in hierdie geval en ons kan lemma 3. 2 dus toepas.

$$\therefore R_{1n}(3,\delta) \le n^{-3/2} \sum_j (1 - {}^j/_{n+1})^{3/2} (H'_{jn})^3 H_{jn}$$

$$= ((n+1)/n)^{3/2} \sum_j (1 - {}^j/_{n+1})^3 (H'_{jn})^3 (n+1-j)^{-3/2} H_{jn} \le O(1) \sum_j H_{jn}^{-2} (n+1-j)^{-3/2}$$

$$\le O(1) H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} (n+1-j)^{-3/2}$$

$$= O(1)\, H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2} \sum_{j=1}^{n-[n(1-\delta)]} j^{-3/2} \le O(1)\, H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2}$$

$$= O(1)\, H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2}$$

$$\therefore \limsup_{n\to\infty} R_{1n}(3,\delta) \le O(1)\, H(1-\delta)^{-2}$$

$$\therefore \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} R_{1n}(3,\delta) = 0.$$

Nou het ons dat:

$$\limsup_{n\to\infty} E|R_{1n}| \le 6 \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} R_{1n}(1,\delta) + 6 \limsup_{n\to\infty} R_{1n}(2,\delta)$$

$$+ 6 \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} R_{1n}(3,\delta)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} E|R_{1n}| = 0$$

$$\therefore R_{1n} = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(ii) $\underline{R_{2n} = o_p(1) \text{ as } n \to \infty}$

Ons het dat:

$$R_{2n} = \sum_{j=1}^{n} |V_{jn}^3| H'_{jn} |H''(U_{jn})|.$$

Laat $\tau > 0$. Volgens lemma a10 bestaan dan getalle $u^{jn}(\tau) = u^{jn}$ en $u_{jn}(\tau) = u_{jn}$ sodat indien ons stel $\mu_{jn}(\tau) = \sup_{u_{jn}<u<u^{jn}} |H''(u)|$, dan is:

$$P[R_{2n} \leq \sum_{j=1}^{n} |V_{jn}|^3 H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau)] \geq 1 - \tau \text{ vir } n \geq 1. \qquad (3.3.1)$$

Volgens lemma a9 en Schwarz se ongelykheid kan ons ook skryf:

$$E(\sum_{j=1}^{n} |V_{jn}|^3 H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau)) \leq 6n^{-3/2} \sum_{j} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2} H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau)$$

$$= 6n^{-3/2} \sum_{j=1}^{[n\delta]} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2} H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau) + 6n^{-3/2} \sum_{j=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2} H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau)$$

$$+ 6n^{-3/2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2} H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau)$$

$$= 6(R_{2n}(\tau, 1, \delta) + R_{2n}(\tau, 2, \delta) + R_{2n}(\tau, 3, \delta)) \qquad \text{(sê)}$$

waar soos tevore $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Nou is:

$$R_{2n}(\tau, 2, \delta) \leq \max_{[n\delta] < j \leq [n(1-\delta)]} \mu_{jn}(\tau) n^{-3/2} \sum_{j} ({}^{j}/_{n+1}(1 - {}^{j}/_{n+1}))^{3/2} H'_{jn}$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty,$$

want $(x(1 - x))^{3/2} H'(x)$ is begrensd op $(\delta, 1 - \delta)$ en $\max_{[n\delta] < j \leq [n(1-\delta)]} \mu_{jn}(\tau) \leq M(\delta, \tau) < \infty$, onafhanklik van n.

Beskou $R_{2n}(\tau, 1, \delta)$:

$$R_{2n}(\tau, 1, \delta) \leq n^{-3/2} \sum_{j=1}^{[n\delta]} ({}^{j}/_{n+1})^{3/2} H'_{jn} \mu_{jn}(\tau).$$

Aangesien ${}^{j}/_{n+1} < \frac{1}{2}$ kan ons lemma 3. 2 toepas:

$$\therefore R_{2n}(\tau, 1, \delta) \leq n^{-3/2} \sum_{j} ({}^{j}/_{n+1})^{\frac{1}{2}} |H_{jn}|^{-1} \mu_{jn}(\tau).$$

Uit lemma a10 volg ook dat $u^{jn} < \frac{1}{2}$ vir $j = 1, \ldots, [n\delta]$ en n groot genoeg.

$$\therefore \mu_{jn}(\tau) = |H''(u_{jn})| \qquad j = 1, \ldots, [n\delta]$$

Ons kan ook lemma 3. 2 op u_{jn} toepas, d. w. s. :

$$u_{jn} H'(u_{jn}) < |H(u_{jn})|^{-1} \qquad j = 1, \ldots, [n\delta]$$

$$\therefore R_{2n}(\tau, 1, \delta) \leq n^{-3/2} \sum_{j} u_{jn}^{2} H'(u_{jn})^{2} | H(u_{jn})H_{jn}^{-1} | (j/n+1)^{1/2} u_{jn}^{-2}$$

$$\leq ((n+1)/n)^{3/2} \sum_{j} |H(u_{jn}) H_{jn}|^{-1} ({}^{j}/_{n+1})^{2} u_{jn}^{-2} j^{-3/2} \leq O(1)(\max_{1 \leq j \leq n}({}^{u^{jn}}/_{u_{jn}}))^{2} \sum_{j}|H(u_{jn})H_{jn}|^{-1} j^{-3/2}$$

$$\leq O(1)\, K^{2}(\tau) \sum_{j} H_{jn}^{-2} j^{-3/2} \leq O(1)\, K^{2}(\tau) H(\frac{[n\delta]}{n+1})^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2} \leq O(1)\, K^{2}(\tau) H(\delta)^{-2}$$

$$\therefore \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} R_{2n}(\tau, 1, \delta) = 0.$$

Beskou vervolgens $R_{2n}(\tau, 3, \delta) \leq n^{-3/2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} (1-{}^{j}/_{n+1})^{3/2} H'_{jn} \mu_{jn}(\tau).$

Nou geld weer dat vir n groot genoeg is ${}^{j}/_{n+1} > \frac{1}{2}$, en dus is $u_{jn} > \frac{1}{2}$ vir n groot genoeg (en $j = [n(1-\delta)] + 1, \ldots, n$)

$$\therefore \mu_{jn}(\tau) = |H''(u^{jn})| \quad j = [n(1-\delta)] + 1, \ldots, n.$$

Vir die u^{jn} geld dus ook volgens lemma 3. 2 dat:

$$(1 - u^{jn})H'(u^{jn}) < H(u^{jn})^{-1}, \quad j = [n(1-\delta)] + 1, \ldots, n.$$

Pas ons dit toe, geld:

$$R_{2n}(\tau, 3, \delta) \leq n^{-3/2} \sum_j (1 - {}^{j}/_{n+1})^{\frac{1}{2}} H_{jn}^{-1} H'(u^{jn})^2 H(u^{jn})$$

$$\leq ((n+1)/n)^{3/2} \sum_j (H(u^{jn})H_{jn})^{-1} (1 - {}^{j}/_{n+1})^2 (1 - u^{jn})^{-2} (n + 1 - j)^{-3/2}$$

$$\leq O(1) \left(\max_{1 \leq j \leq 1} \left(\frac{1-u_{jn}}{1-u^{jn}}\right)\right)^2 \sum_j H_{jn}^{-2} (n + 1 - j)^{-3/2}$$

$$\leq O(1)\, K^2(\tau) H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} (n + 1 - j)^{-3/2}$$

$$\leq O(1)\, K^2(\tau)\, H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2}$$

$$= O(1)\, K^2(\tau)\, H\left(\frac{[n(1-\delta)]}{n+1}\right)^{-2}, \text{ volgens lemma a10.}$$

$$\therefore \limsup_{n \to \infty} R_{2n}(\tau, 3, \delta) \leq O(1)\, K^2(\tau) H(1 - \delta)^{-2}$$

$$\therefore \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} R_{2n}(\tau, 3, \delta) = 0.$$

Dus volg dat:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} |V_{jn}|^3 H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau)\right) = o(1) \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} |V_{jn}|^3 H'_{jn}\, \mu_{jn}(\tau) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Dit geld vir elke $\tau > 0$. Uit (3. 3. 1) vol g dus dat:

$$R_{2n} = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(iii) $R_{3n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$

Met behulp van lemma a9 volg dat:

$$ER_{3n} \leq 27n^{-2} \sum_j ({}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1}))^2 (H''_{jn})^2$$

$$= 27n^{-2} \sum_{j=1}^{[n\delta]} ({}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1}))^2 (H''_{jn})^2 + 27n^{-2} \sum_{j=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} ({}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1}))^2 (H''_{jn})^2$$

$$+ 27n^{-2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} ({}^j/_{n+1}(1-{}^j/_{n+1}))^2 (H''_{jn})^2$$

$= 27\,(R_{3n}(1, \delta) + R_{3n}(2, \delta) + R_{3n}(3, \delta))$ (sê)

met $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Aangesien die funksie $x^2(1 - x)^2\, H''(x)^2$ begrensd is op $(\delta, 1 - \delta)$ volg dat

$R_{3n}(2, \delta) = o(1)$ as $n \to \infty$.

Beskou $R_{3n}(1, \delta)$. Aangesien ${}^j/_{n+1} < \frac{1}{2}$ kan ons lemma 3. 2 toepas en ons vind dat:

$$R_{3n}(1, \delta) \leq ((n+1)/n)^2 \sum_{j=1}^{[n\delta]} j^{-2}\, H_{jn}^{-2}.$$

Soos tevore volg hieruit dat:

$$\lim_{\delta \to 0}\ \limsup_{n \to \infty} R_{3n}(1, \delta) = 0.$$

Soos tevore kan ons ook aantoon dat:

$$\lim_{\delta \to 0}\ \limsup_{n \to \infty} R_{3n}(3, \delta) = 0.$$

Dus volg dat $ER_{3n} = o(1)$ as $n \to \infty$ en dus is $R_{3n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

(iv) $R_{4n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$

Die bewys hiervan verloop net soos die bewys van (ii).

Uit (i), (ii), (iii) en (iv) konkludeer ons dat $R_{3n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$, wat die bewys van die stelling voltooi.

Opmerking: Volgens hierdie stelling sal L_n en Q_n dus dieselfde asimptotiese ver= deling hê onder H_o. Ons het tevore gesien dat Q_n geskryf kan word as 'n kwadratie= se vorm in onafhanklike en identies verdeelde stogastiese veranderlikes. Om L_n se verdeling onder H_o te vind kan ons dus probeer om die teorie van hoofstuk 2 op Q_n toe te pas, en dit is wat ons in die volgende hoofstuk sal doen.

HOOFSTUK 4

DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN DIE TOETSSTATISTIEK VIR DIE ENKELVOUDIGE GEVAL

4.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk wil ons ondersoek instel na die asimptotiese verdeling van $Q_n^{(W)}$ met gewigsfunksie $W = h = (H')^2$ d. w. s.

$$Q_n^{(h)} = Q_n = \sum_{j=1}^{n} (U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^2 (H'_{jn})^2.$$

Hieruit sal die asimptotiese verdeling van L_n dan direk volg soos in die vorige hoof= stuk aangedui. Soos tevore kan ons Q_n, onder H_o, nou skryf as:

$$\begin{aligned} Q_n &= (n+1/S_{n+1})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ijn+1} Z_i Z_j \\ &= (n+1/S_{n+1})^2 T_{n+1} \end{aligned}$$

met $T_n = n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn} Z_i Z_j$.

Ons stel dus belang in die asimptotiese verdeling van T_n.

Nou is:

$$c_{ijn+1} = (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (H'_{kn})^2 \psi_{ikn} \psi_{jkn}$$

sodat, indien ons stel:

$$c(x, y) = \int_0^1 H'(u)^2 \psi(x, u) \psi(y, u) du,$$

dan kan ons soos tevore (sien opmerking aan die einde van paragraaf 2.3) poog om die getalle $\{\gamma_r\}$ en $\{b_{irn}\}$ te vind.

Ons moet dus die eiewaardes en eiefunksies van c(x, y) bepaal, d. w. s. ons moet die integraalvergelyking

$$\gamma_m g_m(x) = \int_0^1 c(x, y) g_m(y) dy,$$

vir $\{\gamma_m\}$ en $\{g_m(x)\}$ probeer oplos.

Laat nou $H_m(x)$ die m-de genormaliseerde Hermitiese polinoom wees, d. w. s.

$$\phi(x) H_m(x) = (-1)^m (m!)^{-\frac{1}{2}} (\frac{d^m}{dx^m} \phi(x)).$$

(Sien bv. Rainville (1967)).

Ons toon nou aan dat die eiefunksies en eiewaardes van c(x, y) gegee word deur:

$$g_m(x) = H_m(H(x)), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

en $$\gamma_m = m^{-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

<u>Nou:</u> $\int_0^1 g_m(y) c(x, y) dy$

$$= \int_0^1 g_m(y) [\int_0^1 H'(u)^2 \psi(x, u) \psi(y, u) du] dy$$

$$= \int_0^1 H'(u)^2 \psi(x, u) [\int_0^1 g_m(y) \psi(y, u) dy] du. \qquad (4.1.1)$$

Vir die binneste integraal is:

$$\int_0^1 g_m(y) \psi(y, u) dy = (1-u) \int_0^u g_m(y) dy - u \int_u^1 g_m(y) dy$$

$$= \int_0^u g_m(y) dy - u \int_0^1 g_m(y) dy.$$

Vir m = 0 is $g_0(y) \equiv 1$ en dié integraal word nul, sodat $g_0(x)$ nie 'n eiefunksie is nie.

Vir $m \geq 1$ kry ons dat:

$$\int_0^1 g_m(y)dy = \int_0^1 g_0(y)g_m(y)dy = 0.$$

Die integraal word dus:

$$\int_0^u g_m(y)dy = \int_0^u H_m(H(y))dy$$

$$= \int_{-\infty}^{H(u)} H_m(z)\phi(z)dz,$$

m. b. v. die substitusie $z = H(y)$.

Maar: $\phi(z)H_m(z) = (-1)^m (m!)^{-\frac{1}{2}} (\frac{d^m}{dz^m}\phi(z))$

$$\therefore \quad \int \phi(z)H_m(z) = (-1)^m (m!)^{-\frac{1}{2}} . (\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\phi(z))$$

$$= (-1)(m)^{-\frac{1}{2}} H_{m-1}(z)\phi(z)$$

Dus volg dat:

$$\int_0^u g_m(y)dy = (-1)m^{-\frac{1}{2}} H_{m-1}(z)\phi(z) \Big|_{-\infty}^{H(u)}$$

$$= (-1)m^{-\frac{1}{2}} H_{m-1}(H(u))\phi(H(u)).$$

Substitusie in (4. 1. 1) lewer dan:

$$\int_0^1 H'(u)^2 \psi(x,u)[(-1)m^{-\frac{1}{2}} H_{m-1}(H(u))\phi(H(u))]du$$

$$= (-1)m^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 H'(u)\psi(x, u)H_{m-1}(H(u))du$$

$$=(-1)m^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \Phi(v)) H_{m-1}(v)dv \qquad (v = H(u))$$

$$= (-1)m^{-\frac{1}{2}}[- \int_{-\infty}^{H(x)} \Phi(v)H_{m-1}(v)dv + \int_{H(x)}^{\infty} (1 - \Phi(v))H_{m-1}(v)dv].$$

Aangesien vir Hermitiese polinome geld dat: (sien Rainville bl. 188)

$$H'_m(x) = m^{\frac{1}{2}} H_{m-1}(x),$$

word bogenoemde dus:

$$(-1)m^{-1}\left[-\int_{-\infty}^{H(x)} \Phi(v)H'_m(v)dv + \int_{H(x)}^{\infty} (1-\Phi(v))H'_m(v)dv\right]$$

$$= m^{-1}\left\{\Phi(v)H_m(v)\Big|_{-\infty}^{H(x)} - \int_{-\infty}^{H(x)} \phi(v)H_m(v)dv - (1-\Phi(v))H_m(v)\Big|_{H(x)}^{\infty}\right.$$

$$\left. - \int_{H(x)}^{\infty} \phi(v)H_m(v)dv\right\}$$

$$= m^{-1}\left\{xH_m(H(x)) + (1-x)H_m(H(x)) - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v)H_m(v)dv\right\}.$$

$$= m^{-1} H_m(H(x))$$

$$= m^{-1} g_m(x)$$

$$\therefore \gamma_m g_m(x) = \int_0^1 c(x, y)g_m(y)dy$$

met $\{\gamma_m\}$ en $\{g_m(x)\}$ soos hierbo.

Ons wil nou een van die stellings toepas met $\{\gamma_m\}$ soos hierbo en met $b_{imn} = g_m({}^i/_{n+1})$. (Alle $d_{in} = 0$ sodat δ_m nie hier ter sprake kom nie. Sien opmerking (v), bl. 31 .)

Ons sien dat:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} = \infty$$

sodat stelling 2. 3 nie van toepassing is nie. Ook is die aantal eiewaardes gelyk aan oneindig sodat stelling 2. 4 die enigste moontlikheid is wat ons kan toepas. In die volgende paragrawe sal ons aantoon dat die kondisies van stelling 2. 4 bevredig word sodat dit in hierdie situasie van toepassing is.

4.2 KONDISIE (B2)

Ons moet aantoon dat:

$$n^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} |b_{imn}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Nou, ons het dat $g_m(x)$ 'n m-de graads polinoom in $H(x)$ is, en ons kan dus skryf:

$$b_{imn} = \sum_{r=0}^{m} a_{mr}(m!)^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{i}{n+1}\right)^r$$

waar $\{a_{mr}\}$ bekende getalle is.

Laat $\beta_m = \sum_{r=0}^{m} |a_{mr}|$, dan is:

$$|b_{imn}| \leq \sum_{r=0}^{m} |a_{mr}| (m!)^{-\frac{1}{2}} |H(\tfrac{1}{n+1})|^r \leq |H(\tfrac{1}{n+1})|^m (m!)^{-\frac{1}{2}} \beta_m, \text{ vir n groot genoeg}$$

$$= |\alpha_n|^m (m!)^{-\frac{1}{2}} \beta_m$$

$$\therefore\ n^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} |b_{imn}| \leq n^{-\frac{1}{2}} |\alpha_n|^m (m!)^{-\frac{1}{2}} \beta_m.$$

Uit lemma 3.1 volg dat die regterlid $o(1)$ is, vir elke vaste m, as $n \to \infty$.

Die kondisie geld dus.

4.3 KONDISIE (C2)

Ons moet aantoon dat:

$$(n+1)^{-2} \sum_{i,j} c^2_{ijn+1} \to \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^2_m = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} \ (= \pi^2/6)$$

Stel weer $h(x) = H'(x)^2$, dan is:

$$(n+1)^{-2} \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ijn+1}^2 = (n+1)^{-4} \sum_{i,j=1}^{n+1} \sum_{r,s=1}^{n} h_{rn} h_{sn} \psi_{irn} \psi_{isn} \psi_{jrn} \psi_{jsn}$$

$$= (n+1)^{-2} \sum_{r,s} h_{rn} h_{sn} [(n+1)^{-1} \sum_{i=1}^{n+1} \psi_{irn} \psi_{isn}]^2.$$

Laat $r \leq s$, en beskou:

$$(n+1)^{-1} \sum_{i=1}^{n+1} \psi_{irn} \psi_{isn} = (n+1)^{-1} [r(1 - {}^{r}/_{n+1})(1 - {}^{s}/_{n+1}) - (s - r) {}^{r}/_{n+1}(1 - {}^{s}/_{n+1})$$

$$+ (n + 1 - s)({}^{r}/_{n+1})({}^{s}/_{n+1})]$$

$$= (n + 1)^{-1}[r - r(\tfrac{r+s}{n+1}) + r^2 s/_{(n+1)^2} - {}^{rs}/_{n+1} + {}^{r^2}/_{n+1} + {rs^2}/_{(n+1)^2} - {r^2 s}/_{(n+1)^2}$$

$$+ {}^{rs}/_{n+1} - {rs^2}/_{(n+1)^2}]$$

$$= (n + 1)^{-1}[r - {}^{rs}/_{n+1}] = {}^{r}/_{n+1}(1 - {}^{s}/_{n+1})$$

$$\therefore \quad (n+1)^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn+1}^2 = (n + 1)^{-2} \sum_{r \leq s} h_{rn} h_{sn} [{}^{r}/_{n+1}(1 - {}^{s}/_{n+1})]^2$$

$$+ (n + 1)^{-2} \sum_{r > s} h_{rn} h_{sn} [{}^{s}/_{n+1}(1 - {}^{r}/_{n+1})]^2$$

<u>Stel:</u>

$$T(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{vir } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{vir } x > y \end{cases}$$

Dan kan ons skryf:

$$(n + 1)^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn+1}^2 = (n + 1)^{-2} \sum_{r,s} h_{rn} h_{sn} T_{rsn}^2$$

Ons sal nou aantoon dat

$$(n+1)^{-2} \sum_{r,s} h_{rn} h_{sn} T^2_{rsn} \to \int_0^1 \int_0^1 h(x)h(x)T^2(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 c^2(x, y)dxdy$$

en uit die bewys sal volg dat die integraal regs eindig is.

Ons kan skryf:

$$(n+1)^{-2} \sum_{r,s} h_{rn} h_{sn} T^2_{rsn} = 2(n+1)^{-2} \sum_{r \leq s} ({}^r/_{n+1})^2 (1 - {}^s/_{n+1})^2 h_{rn} h_{sn}$$

$$- (n+1)^{-2} \sum_{r=1}^{n} ({}^r/_{n+1})^2 (1 - {}^r/_{n+1})^2 h^2_{rn}$$

$$= 2I_n - R_n \quad \text{(sê)}$$

Ook geld dat:

$$\int_0^1 \int_0^1 h(x)h(y)\, T^2(x, y)dxdy = 2 \int_0^1 dy \int_0^y x^2 (1-y)^2 h(x)h(y)dx$$

$$= 2I \text{ (sê).}$$

Eerstens wil ons aantoon dat $I_n \to I$ as $n \to \infty$.

Stel: $t(x, y) = x^2(1-y)^2 h(x)h(y)$, en laat $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Dan is:

$$I_n = (n+1)^{-2} \sum_{s=1}^{[n\delta]} \sum_{r=1}^{s} t_{rsn} + (n+1)^{-2} \sum_{s=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} \sum_{r=1}^{s} t_{rsn} + (n+1)^{-2} \sum_{s=[n(1-\delta)]+1}^{n} \sum_{r=1}^{s} t_{rsn}$$

$$= I_{1n}(\delta) + I_{2n}(\delta) + I_{3n}(\delta) \quad \text{(sê).}$$

Verder kan ons ook skryf:

$$I = \int_0^{\delta} dy \int_0^y t(x, y)dx + \int_{\delta}^{1-\delta} dy \int_0^y t(x, y)dx + \int_{1-\delta}^{1} dy \int_0^y t(x, y)dx$$

$$= I_1(\delta) + I_2(\delta) + I_3(\delta) \quad \text{(sê).}$$

Nou is dit duidelik dat $t(x, y)$ begrensd en kontinu is op die versameling

$\{[0, 1] \times [0, 1]\} - \{[0, \delta] \times [0, \delta]\} \cup \{[1-\delta, 1] \times [1-\delta, 1]\}$.

Dus volg dat $I_2(\delta) < \infty$. Ook is:

$$I_3(\delta) = \int_{1-\delta}^{1} dy \int_{0}^{1-\delta} t(x, y)dx + \int_{1-\delta}^{1} dy \int_{1-\delta}^{y} t(x, y)dx$$

$$= I_3(1, \delta) + I_3(2, \delta) \qquad \text{(sê).}$$

Dit is duidelik dat $I_3(1, \delta) < \infty$, en volgens lemma 3. 2 is:

$$I_3(2, \delta) = \int_{1-\delta}^{1} dy \int_{1-\delta}^{y} x^2(1-y)^2 h(x)h(y)dx \leq \int_{1-\delta}^{1} dy \int_{1-\delta}^{y} H(y)^{-2}h(x)dx \leq \int_{1-\delta}^{1} dx \int_{x}^{1} h(x)H(y)^{-2}dy$$

$$\leq \int_{1-\delta}^{1} h(x)H(x)^{-2}\, dx \int_{x}^{1} dy$$

$$= \int_{1-\delta}^{1} (1-x)h(x)H(x)^{-2}dx \leq \int_{1-\delta}^{1} H'(x)H(x)^{-3}dx$$

$$= \int_{H(1-\delta)}^{\infty} z^{-3}dz \qquad (z = H(x))$$

$$< \infty.$$

$\therefore\ I_3(\delta) < \infty.$

Net só volg dat $I_1(\delta) < \infty$ (en dus is ook $I < \infty$).

Voorts volg dat aangesien $t(x, y)$ begrensd en kontinu is oor die gebied ter sprake by $I_2(\delta)$, is:

$$\lim_{n \to \infty} I_{2n}(\delta) = I_2(\delta)$$

d. w. s. $\lim_{n \to \infty} |I_{2n}(\delta) - I_2(\delta)| = 0$ (4. 3. 1).

Verder het ons m. b. v. lemma 3. 2 dat:

$$I_{1n}(\delta) = (n+1)^{-2} \sum_{s=1}^{[n\delta]} \sum_{r=1}^{s} ({}^{r}/_{n+1})^{2}(1 - {}^{s}/_{n+1})^{2} h_{rn} h_{sn} \leq (n+1)^{-2} \sum_{s=1}^{[n\delta]} \sum_{r=1}^{s} h_{sn} H_{rn}^{-2}$$

$$\leq (n+1)^{-2} \sum_{s=1}^{[n\delta]} h_{sn} H_{sn}^{-2} \,.\, s$$

$$= (n+1)^{-1} \sum_{s} ({}^{s}/_{n+1}) h_{sn} H_{sn}^{-2} \leq (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{[n\delta]} H'_{sn} |H_{sn}|^{-3}.$$

Deur differensiasie volg dadelik dat die funksie $H'(x)|H(x)|^{-3}$ dalend is op $(0, a)$ vir een of ander a klein genoeg. Kies nou δ, wat hierbo ter sprake is, só dat $\delta \in (0, a)$. Dan volg dadelik:

$$I_{1n}(\delta) \leq (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{[n\delta]} H'_{sn} |H_{sn}|^{-3} \leq \int_{0}^{\delta} H'(x)|H(x)|^{-3} dx$$

$$= J(\delta) \qquad \text{(sê).}$$

Stel $u = H(x)$ dan volg dat

$$J(\delta) = \int_{-\infty}^{H(\delta)} |u|^{-3} du \quad < \quad \infty,$$

sodat (volgens die gedomineerde konvergensie stelling) dus $J(\delta) \to 0$ as $\delta \to 0$.

Nou:

$$I_{1n}(\delta) \leq J(\delta)$$

$$\therefore \limsup_{n \to \infty} I_{1n}(\delta) \leq J(\delta)$$

$$\therefore \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} I_{1n}(\delta) = 0 \qquad (4.\,3.\,2).$$

Op soortgelyke wyse sal volg dat:

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} I_{3n}(\delta) = 0. \qquad (4.\,3.\,3)$$

Nou: $|I_n - I| \leq I_{1n}(\delta) + I_1(\delta) + |I_{2n}(\delta) - I_2(\delta)| + I_{3n}(\delta) + I_3(\delta).$

Uit (4. 3. 1) volg dat:

$$\limsup_{n \to \infty} |I_n - I| \leq \limsup_{n \to \infty} I_{1n}(\delta) + I_1(\delta) + \limsup_{n \to \infty} I_{3n}(\delta) + I_3(\delta).$$

Neem nou limiete as $\delta \to 0$ dan volg uit (4. 3. 2) en (4. 3. 3) dat:

$$\lim_{n \to \infty} |I_n - I| = 0.$$

Tweedens wil ons aantoon dat $R_n = o(1)$ as $n \to \infty$.

Laat $0 < \delta < \frac{1}{2}$ wees, dan kan ons skryf:

$$R_n = (n+1)^{-2} \sum_{r=1}^{[n\delta]} t_{rrn} + (n+1)^{-2} \sum_{r=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} t_{rrn} + (n+1)^{-2} \sum_{r=[n(1-\delta)]+1}^{n} t_{rrn}$$

$$= R_{1n}(\delta) + R_{2n}(\delta) + R_{3n}(\delta) \qquad \text{(sê).}$$

Dit is duidelik dat $R_{2n}(\delta) = o(1)$ as $n \to \infty$, want $t(x, y)$ is begrensd op $[\delta, 1-\delta]$. Ons het ook dat:

$$R_{1n}(\delta) = (n+1)^{-2} \sum_{r=1}^{[n\delta]} (r/_{n+1})^2 (1 - r/_{n+1})^2 h_{rn}^2 \leq (n+1)^{-2} \sum_r h_{rn} H_{rn}^{-2}$$

$$\leq (n+1)^{-1} (H'_{1n})(n+1)^{-1} \sum_r H'_{rn} H_{rn}^{-2}.$$

Soos hierbo kan ons aantoon dat:

$$(n+1)^{-1} \sum_r H'_{rn} H_{rn}^{-2} \leq c_\delta < \infty.$$

Ook is $(n+1)^{-1} H'_{1n} \leq |H_{1n}|^{-1} \to 0$ as $n \to \infty$

$\therefore R_{1n}(\delta) = o(1)$ as $n \to \infty$.

Op soortgelyke wyse volg dat $R_{3n}(\delta) = o(1)$ en dus geld dat $R_n = o(1)$ as $n \to \infty$

$$\therefore \quad (n+1)^{-2} \sum_{i,j} c^2_{ijn+1} \to \int_o^1 \int_o^1 c(x, y)^2 dxdy.$$

Nou is egter $\int_o^1 \int_o^1 c(x, y)^2 dxdy = \sum_m \gamma^2_m$

$$\therefore \quad (n+1)^{-2} \sum_{i,j} c^2_{ijn+1} \to \sum_m \gamma^2_m \text{ as } n \to \infty$$

en kondisie (C2) word dus bevredig.

4.4 KONDISIE (BΓ1)

Ons moet aantoon dat:

$$\sigma^2_n B_n = \sigma^2_n \max_{m, r \leq k_n} \left| n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn} - \delta_{mr} \right| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Volgens lemma a4 is:

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{k_n} m^{-1} \sim \log k_n \text{ as } n \to \infty.$$

Ons toon dus slegs aan dat

$$B_n (\log k_n)^2 = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat nou soos tevore $g_m(x)$ die m-de genormaliseerde Hermitiese polinoom in $H(x)$ wees, d.w.s.:

$$g_m(x) = (m!)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{m} a_{mr} H(x)^r \text{ en } \beta_m = \sum_{r=0}^{m} |a_{mr}|.$$

Volgens Rainville (1967) het ons dan dat:

$$\beta_m = m! \sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]} \{2^r \,.\, r!\,(m-2r)!\}^{-1} = m!\ \xi_m \text{ (sê)}$$

$$\text{Beskou } \xi_m = \sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]} \{2^r r!\,(m-2r)!\}^{-1}$$

$$= \sum_r \{2^r r!\,(2(\tfrac{m}{2} - r))!\}^{-1} \leq \sum_r \{2^r r!\,([\tfrac{m}{2}] - r)!\}^{-1}$$

$$= ([\tfrac{m}{2}]!)^{-1} \sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{[\frac{m}{2}]}{r} 2^{-r}$$

$$= (3/2)^{[\frac{m}{2}]} ([\tfrac{m}{2}]!)^{-1}$$

$$= \frac{3/2 \,.\, 3/2 \,.\, 3/2 \,.\, \ldots\ldots\ldots\ldots \, 3/2}{1 \,.\quad 2 \,.\quad 3 \,.\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \, [\frac{m}{2}]} \qquad ([\tfrac{m}{2}] \text{ keer})$$

≤ 1 as $[\frac{m}{2}] > 2$ of $\frac{m}{2} > 2$ d. w. s. $m > 4$.

Vir $m \leq 4$ volg dadelik uit die definisie van ξ_m dat $\xi_m \leq 1$.

$$\therefore \; \beta_m \leq m! \qquad \text{vir } m = 1, 2, \ldots$$

Met behulp van lemma a7 volg dus dat:

$$\beta_m^2/m! \leq m! = o(m^m) \text{ as } m \to \infty.$$

Met $\{a_{mr}\}$ soos hierbo, geld dat:

$$n^{-1} \sum_i b_{imn} b_{irn} = \sum_{s,t} a_{ms} a_{rt} (m!\, r!)^{-\frac{1}{2}} \quad [n^{-1} \sum_i H_{in}^{r}] \; (v = s + t)$$

$$= (\tfrac{n+1}{n}) \sum_{s,t} a_{ms} a_{rt} (m!\, r!)^{-\frac{1}{2}} [\int_0^1 H(x)^v dx + e(v, n)]$$

$$= (^{n+1}/_n) \int_0^1 g_m(x) g_r(x) dx + \sum_{s,t} a_{ms} a_{rt} (m!\, r!)^{-\frac{1}{2}} e_1(v, n)$$

$$= (^{n+1}/_n) \delta_{mr} + \sum_{s,t} a_{ms} a_{rt} (m!\, r!)^{-\frac{1}{2}} e_1(v, n)$$

met:

$$e(v, n) = (n + 1)^{-1} \sum_i H_{in}^v - \int_0^1 H(x)^v dx \text{ en}$$

$$e_1(v, n) = (^{n+1}/_n) e(v, n) = O(1) e(v, n).$$

Nou:

$$e(v,n) = (n+1)^{-1}\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} H_{in}^{v} - \int_{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{[n/2]+\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^{v}dx + (n+1)^{-1}\sum_{i=[\frac{n}{2}]+2}^{n} H_{in}^{v} - \int_{\frac{[\frac{n}{2}]+3/2}{n+1}}^{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^{v}dx$$

$$+ (n+1)^{-1} H(\frac{[\frac{n}{2}]+1}{n+1})^{v} - \int_{0}^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^{v}dx - \int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} H(x)^{v}dx - \int_{\frac{[n/2]+1/2}{n+1}}^{\frac{[n/2]+3/2}{n+1}} H(x)^{v}dx$$

Ons het dat $\frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ sodat $H(x)^{v}$ monotoon is op die interval $(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}, \frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1})$.

Ook is $\frac{[\frac{n}{2}]+3/2}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ sodat $H(x)^{v}$ monotoon is op $(\frac{[\frac{n}{2}]+3/2}{n+1}, \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1})$.

Ons kan lemma a5 dus op bostaande toepas om te vind dat:

$$|e(v,n)| \leq (n+1)^{-1}|H(\frac{\frac{1}{2}}{n+1})^{v} - H(\frac{[\frac{n}{2}]+\frac{1}{2}}{n+1})^{v}| + (n+1)^{-1}|H(\frac{[\frac{n}{2}]+3/2}{n+1})^{v} - H(\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1})^{v}|$$

$$+ (n+1)^{-1}|H(\frac{[\frac{n}{2}]+1}{n+1})|^{v} + |\int_{0}^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^{v}dx| + |\int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} H(x)^{v}dx| + |\int_{\frac{[n/2]+1/2}{n+1}}^{\frac{[n/2]+3/2}{n+1}} H(x)^{v}dx|$$

Aangesien $[\frac{n}{2}]+3/2 \leq n+\frac{1}{2}$ en $|H(x)| = |H(1-x)|$ volg dat:

$$|e(v,n)| \leq 6(n+1)^{-1}|H(\frac{\frac{1}{2}}{n+1})|^{v} + 2|\int_{0}^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} H(x)^{v}dx|.$$

Pas ons nou lemmas 3. 1 en 3. 3 toe dan volg dat

$$\max_{v \leq 2k_n} |e(v,n)| = o(n^{-\delta}) \qquad \delta < 1$$

d. w. s. $\max_{v \leq 2k_n} |e_1(v,n)| = o(n^{-\delta}) \qquad \delta < 1, \ n \to \infty.$

$$\therefore B_n(\log k_n)^2 \leq (\max_{m,r \leq k_n} |\sum_{s,t} a_{ms}\, a_{rt}(m!\, r!)^{-\frac{1}{2}}\, e_1(v,n)| + n^{-1}\max_{m,r \leq k_n} \delta_{mr})(\log k_n)^2$$

$$\leq o(1) + (\log k_n)^2 o(n^{-\delta}) \max_{m,r} \beta_m \beta_r (m!\, r!)^{-\frac{1}{2}} \leq o(1) + (\log k_n)^2 o(n^{-\delta}) k_n!$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$, volgens lemmas a7 en 3.1.

$\therefore B_n (\log k_n)^2 = o(1)$ as $n \to \infty$

$\therefore B_n \sigma_n^2 = o(1)$ as $n \to \infty$.

Kondisie ($B\Gamma 1$) word dus bevredig.

4.5 KONDISIE ($B\Gamma 2$)

Ons moet aantoon dat:

$$B^*_n \sigma_n^2 = \sigma_n^2 \max_{m, r \leq k_n} n^{-2} \sum_i b^2_{imn} b^2_{irn} = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Soos tevore is dit slegs nodig om aan te toon dat

$$B^*_n (\log k_n)^2 = o(1) \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Nou is:

$$b^2_{imn} = \sum_{s,t=0}^{m} a_{ms} a_{mt} (m!)^{-1} H^{s+t}_{in}$$

$$\therefore n^{-2} \sum_i b^2_{imn} b^2_{irn} = n^{-1} \sum_{s,t,u,v} a_{ms} a_{mt} a_{ru} a_{rv} (m!\, r!)^{-1} \left[n^{-1} \sum_i H^{\lambda}_{in}\right] \quad (\lambda = s+t+u+v)$$

$$\leq n^{-1} H^{2(m+r)}_{1n} \sum_{s,t,u,v} |a_{ms} a_{mt} a_{ru} a_{rv}| (m!\, r!)^{-1}$$

$$= n^{-1} H^{2(m+r)}_{1n} \beta^2_m \beta^2_r (m!\, r!)^{-1} \leq n^{-1} H^{4k_n}_{1n} (k_n!)^2$$

$$= o(n^{-\delta}) \quad \delta < 1, \text{ volgens lemma 3.1}$$

$$\therefore B^*_n = o(n^{-\delta}) \quad \delta < 1, \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore B^*_n \sigma_n^2 = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Kondisie ($B\Gamma 2$) word dus bevredig.

4.6 KONDISIE (CBΓ1)

Ons moet aantoon dat:

$$\Gamma_n\sigma_n = \sigma_n \max_{m \le k_n} \left| n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}\, b_{imn}\, b_{jmn} - \gamma_m \right| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Stel $C_n(m) = n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn}\, b_{imn}\, b_{jmn}$, dan het ons dat:

$$C_n(m) = \sum_{r,s=0}^{m} a_{mr}\, a_{ms} (m!)^{-1} \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} h(k/n)\, n^{-2} \sum_{i,j} H_{in}^{r} H_{jn}^{s} \quad \psi_{ikn-1}\, \psi_{jkn-1}\right)$$

$$= \sum_{r,s} a_{mr}\, a_{ms}\, (m!)^{-1} A_n(r, s) \qquad \text{(sê)}$$

waar:

$$A_n(r, s) = n^{-1} \sum_{k} h(k/n)\Big(n^{-1} \sum_{i \le k} H_{in}^{r} (1 - k/n) - n^{-1} \sum_{i > k} H_{in}^{r} (k/n)\Big)\Big(n^{-1} \sum_{j \le k} H_{jn}^{s} (1 - k/n)$$

$$- n^{-1} \sum_{j > k} H_{jn}^{s} (k/n)\Big)$$

$$= n^{-1} \sum_{k} h(k/n)\, J_{kn}(r, s) \qquad \text{(sê).}$$

Let op dat $A_n(0, 1) = A_n(1, 0) = A_n(0, 0) = 0$.

Laat nou:

$$I_{nk}(1, r) = (n+1)^{-1} \sum_{i \le k} H_{in}^{r} - \int_{0}^{k/n} H(x)^r dx \qquad k = 1, \ldots, n \text{ en:}$$

$$I_{nk}(2, r) = (n+1)^{-1} \sum_{i > k} H_{in}^{r} - \int_{k/n}^{1} H(x)^r dx \qquad k = 1, \ldots, n$$

dan kan ons skryf:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 J_{kn}(r, s) = \Big((1 - k/n) I_{nk}(1, r) + (1 - k/n) \int_{0}^{k/n} H(x)^r dx - k/n\, I_{nk}(2, r)$$

$$- k/n \int_{k/n}^{1} H(x)^r dx\Big)\Big((1 - k/n) I_{nk}(1, s) + (1 - k/n) \int_{0}^{k/n} H(x)^s dx - k/n\, I_{nk}(2, s) - k/n \int_{k/n}^{1} H(x)^s dx\Big)$$

$$= (1 - {}^k/_n)^2 I_{nk}(1, r) I_{nk}(1, s) + (1 - {}^k/_n)^2 I_{nk}(1, r) \int_o^{k/n} H(y)^s dy$$

$$+ (1 - {}^k/_n)^2 I_{nk}(1, s) \int_o^{k/n} H(x)^r dx + (1 - {}^k/_n)^2 \int_o^{k/n} H(x)^r dx \int_o^{k/n} H(y)^s dy$$

$$+ ({}^k/_n)^2 I_{nk}(2, r) I_{nk}(2, s) + ({}^k/_n)^2 I_{nk}(2, r) \int_{k/n}^{1} H(y)^s dy + ({}^k/_n)^2 I_{nk}(2, s) \int_{k/n}^{1} H(x)^r dx$$

$$+ ({}^k/_n)^2 \int_{k/n}^{1} H(x)^r dx \int_{k/n}^{1} H(y)^s dy - {}^k/_n (1 - {}^k/_n) I_{nk}(1, r) I_{nk}(2, s)$$

$$- {}^k/_n (1 - {}^k/_n) I_{nk}(2, r) I_{nk}(1, s) - {}^k/_n (1 - {}^k/_n) I_{nk}(1, r) \int_{k/n}^{1} H(y)^s dy$$

$$- {}^k/_n (1 - {}^k/_n) I_{nk}(1, s) \int_{k/n}^{1} H(x)^r dx - {}^k/_n (1 - {}^k/_n) \int_o^{k/n} H(x)^r dx \int_{k/n}^{1} H(y)^s dy -$$

$${}^k/_n (1 - {}^k/_n) \int_{k/n}^{1} H(x)^r dx \int_o^{k/n} H(y)^s dy - {}^k/_n (1 - {}^k/_n) I_{nk}(2, s) \int_o^{k/n} H(x)^r dx$$

$$- {}^k/_n (1 - {}^k/_n) I_{nk}(2, r) \int_o^{k/n} H(y)^s dy.$$

Noem die terme $J_{kn}(i, r, s)$ vir $i = 1, 2, \ldots, 16$. Ons beskou nou elke term afsonderlik. Ons toon nl. aan dat elke term wat een of twee I_{nk} terme bevat teen 'n sekere tempo na nul konvergeer. (Dws. terme $J_{kn}(i, r, s)$ $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16$). Die orige vier terme wil ons vergelyk met γ_m wat ons ooreen=komstig kan opbreek in 4 terme (sien later). Stel:

$A_n(i, r, s) = n^{-1} \sum_k h({}^k/_n) J_{kn}(i, r, s) \quad i = 1, 2, \ldots, 16$ en:

$C_n(i, m) = \sum_{r,s} a_{mr}\, a_{ms} (m!)^{-1} A_n(i, r, s) \quad i = 1, 2, \ldots, 16.$

(i) $|A_n(1, r, s)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{r, s \leq k_n} |I_{nk}(1, r) I_{nk}(1, s)| n^{-1} \sum_k h({}^k/_n)(1 - {}^k/_n)^2.$

Uit lemma 3. 4 volg dat vir $\delta < 1$ is:

$$|A_n(1, r, s)| \leq 0(n^{-2\delta})n^{-1} \sum_k h({}^k/_n)({}^k/_n)^2(1 - {}^k/_n)^2({}^n/_k)^2$$

$$\leq o(n^{-2\delta})(n^{-1} \sum_k h^2({}^k/_n)({}^k/_n)^4(1 - {}^k/_n)^4)^{\frac{1}{2}} \times (n^{-1} \sum_k ({}^n/_k)^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$= o(n^{-2\delta})O(1)\, n^{3/2} O(1)$$

$$= o(n^{-\delta'}) \text{ met } \delta' < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(1, m)| \leq o(n^{-\delta})\, \sigma_n \max_{m \leq k_n} \sum_{r,s} |a_{mr}\, a_{ms}| (m!)^{-1} \quad (\delta < \tfrac{1}{2})$$

$$\leq o(n^{-\delta})\, \sigma_n\, k_n! \quad \text{soos tevore}$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty$$

met behulp van lemma a7 en uit $\sigma_n \sim \log k_n$.

(ii) $J_{kn}(2, r, s) = (1 - {}^k/_n)^2 I_{nk}(1, r) \int_0^{k/n} H(y)^s dy$

$$= (1 - {}^k/_n)^2 I_{nk}(1, r)\, \beta_s(H({}^k/_n))$$

volgens lemma a8. Pas ons nou lemma 3. 4 toe, dan volg:

$$|A_n(2, r, s)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{r \leq k_n} |I_{nk}(1, r)| n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 h({}^k/_n) |\beta_s(H({}^k/_n))|$$

$$= o(n^{-\delta})n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 h({}^k/_n) |\beta_s(H({}^k/_n))|, \qquad \delta < 1.$$

$$\leq o(n^{-\delta})\, n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H'({}^k/_n) |H({}^k/_n)|^{s-1}$$

$$+ o(n^{-\delta})n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H'({}^k/_n) |H({}^k/_n)|^{s-1} |\nu_s(H({}^k/_n))|$$

$$= R_{1n}(\delta, s) + R_{2n}(\delta, s) \qquad \text{(sê)}$$

Nou is: $n^{-1}\sum_k (1-{}^k/_n)^2 H'({}^k/_n)$

$= n^{-1}\sum_k {}^k/_n(1-{}^k/_n)^2 H'({}^k/_n)({}^n/_k) \leq (n^{-1}\sum_k ({}^k/_n)^2(1-{}^k/_n)^4 h({}^k/_n))^{\frac{1}{2}} (n^{-1}\sum_k({}^n/_k)^2)^{\frac{1}{2}}$

$= O(1) \,.\, n^{\frac{1}{2}}\, O(1) = O(n^{\frac{1}{2}})$

$\therefore\ R_{1n}(\delta, s) \leq o(n^{-\delta})\, O(n^{\frac{1}{2}}) |H({}^1/_n)|^{s-1} \leq o(n^{-\delta'}) |H({}^1/_n)|^{k_n}$ $\qquad (\delta' < \frac{1}{2})$

$= o(n^{-\lambda})$ met $\lambda < \frac{1}{2}$, volgens lemma 3. 1.

Beskou nou $R_{2n}(\delta, s)$ en gestel eers s is onewe. Dan is:

$$\nu_s(z) = \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} (s-1)(s-3)\ldots(s-2r+1)\, z^{-2r}$$

$$\therefore\ R_{2n}(\delta, s) \leq o(n^{-\delta}) \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} (s-1)(s-3)\ldots(s-2r+1)\quad n^{-1}\sum_k (1-{}^k/_n)^2 H'({}^k/_n)|H({}^k/_n)|^{s-1-2r}$$

$$\leq o(n^{-\delta})\, s!\, |H({}^1/_n)|^{k_n} \,.\, O(n^{\frac{1}{2}}) \leq o(n^{-\delta})\, k_n!\, |H({}^1/_n)|^{k_n}\, O(n^{\frac{1}{2}})$$

$= o(n^{-\delta'})$ met $\delta' < \frac{1}{2}$.

Laat nou s ewe wees. Dan is:

$$R_{2n}(\delta, s) \leq o(n^{-\delta}) \sum_{r=1}^{\frac{s}{2}-1} (s-1)\ldots(s-2r+1)\quad n^{-1}\sum_k (1-{}^k/_n)^2 H'({}^k/_n)|H({}^k/_n)|^{s-1-2r}$$

$$+ (s-1)(s-3)\ldots 3.1.\, o(n^{-\delta}) n^{-1}\sum_k (1-{}^k/_n)^2 ({}^k/_n) h({}^k/_n).$$

Die eerste term kan duidelik net soos by s onewe behandel word. Vir die tweede term het ons volgens lemma 3. 7 dat dit:

$\leq k_n!\ o(n^{-\delta})\, n^{-1}\sum_k {}^k/_n(1-{}^k/_n) h({}^k/_n)$

$= k_n!\ \dot{o}(n^{-\delta})\, O(\log n)$

$= o(n^{-\delta'}),\quad \delta' < 1.$

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} |A_n(2, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(2, m)| \leq \sigma_n\, o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$.

(iii) Uit simmetrie volg nou ook dat:

$$\sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(i, m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty \text{ vir } i = 3, 5, 6, 7.$$

(iv) Verder het ons volgens lemmas 3.4 en 3.7 dat:

$$|A_n(9, r, s)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{r,s \leq k_n} |I_{nk}(1, r) I_{nk}(2, s)| n^{-1} \sum_k {}^k/_n (1 - {}^k/_n) h({}^k/_n)$$

$$= o(n^{-2\delta})\, O(\log n), \qquad \delta < 1.$$

$$= o(n^{-\delta'}) \qquad \delta' < 2$$

$$\therefore |C_n(9, m)| \leq o(n^{-\delta}) m!$$

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(9, m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(v) Uit simmetrie volg ook:

$$\sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(10, m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(vi) Beskou nou die elfde term:

$$|A_n(11, r, s)| \leq o(n^{-\delta}) n^{-1} \sum_k {}^k/_n (1 - {}^k/_n) h({}^k/_n) |\alpha_s(H({}^k/_n))|.$$

Pas lemma a8 toe om te kry:

$$|A_n(11, r, s)| \leq o(n^{-\delta}) n^{-1} \sum_k {}^k/_n (1 - {}^k/_n) H'({}^k/_n) |H({}^k/_n)|^{s-1} \quad (1 + |\mu_s(H({}^k/_n))|).$$

Soos tevore volg nou maklik dat:

$$|A_n(11, r, s)| \leq o(n^{-\delta}) \qquad \delta < 1, \text{ onafhanklik van } s \text{ en } r$$

$$\therefore\ \sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(11,\ m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(vii) Uit simmetrie volg dan ook dat:

$$\sigma_n \max_{m \leq k_n} |C_n(i,\ m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty, \text{ vir } i = 12,\ 15,\ 16.$$

(viii) Ons beskou nou die orige vier terme. Ons wil hierdie vier terme vergelyk met:

$$\gamma_m = \int_o^1 \int_o^1 c(x,\ y) g_m(x) g_m(y) dx dy$$

$$= \sum_{r,s} a_{mr}\, a_{ms} (m!)^{-1} \Big(\int_o^1 h(z)(1-z)^2 \int_o^z H(x)^r dx \int_o^z H(y)^s dy dz$$

$$+ \int_o^1 h(z)\,.\,z^2 \int_z^1 H(x)^r dx \int_z^1 H(y)^s dy dz - \int_o^1 h(z) z (1-z) \int_o^z H(x)^r dx \int_z^1 H(y)^s dy dz$$

$$- \int_o^1 h(z) z (1-z) \int_z^1 H(x)^r dx \int_o^z H(y)^s dy dz \Big).$$

$$= \sum_{r,s} a_{mr}\, a_{ms} (m!)^{-1} \sum_{i=1}^{4} I_i(r,\ s).$$

(a) Stel: $D_n(1,\ r,\ s) = A_n(4,\ r,\ s) - I_1(r,\ s)$

$$= n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^{r+s-2} (1 + \nu_r(H({}^k/_n)))(1 + \nu_s(H({}^k/_n)))$$

$$- \int_o^1 (1-z)^2 H(z)^{r+s-2} (1 + \nu_r(H(z)))(1 + \nu_s(H(z)))dz$$

$$= n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^t - \int_o^1 (1-z)^2 H(z)^t dz + n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^t \nu_r(H({}^k/_n))$$

$$- \int_o^1 (1-z)^2 H(z)^t \nu_r(H(z))dz + n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^t \nu_s(H({}^k/_n))$$

$$- \int_o^1 (1-z)^2 H(z)^t \nu_s(H(z))dz + n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^t \nu_r(H({}^k/_n)) \nu_s(H({}^k/_n))$$

$$- \int_o^1 (1-z)^2 H(z)^t \nu_r(H(z))\, \nu_s(H(z))dz$$

$$= D_{1n}(1, r, s) + D_{2n}(1, r, s) + D_{3n}(1, r, s) + D_{4n}(1, r, s) \qquad \text{(sê)}$$

waar $t = r + s - 2$.

Uit lemma 3.6 volg dadelik dat

$$\max_{r, s \leq k_n} |D_{1n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < 1, \text{ as } n \to \infty.$$

Beskou $D_{2n}(1, r, s)$ en gestel eers r is onewe, sodat:

$$\nu_r(z) = \sum_{u=1}^{\frac{r-1}{2}} (r-1)(r-3)\ldots(r-2u+1).z^{-2u}$$

$$\therefore \; |D_{2n}(1, r, s)| \leq r! \max_{u \leq \frac{r-1}{2}} \left| n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^{t-2u} - \int_0^1 (1-z)^2 H(z)^{t-2u} dz \right|$$

Uit lemma 3.6 volg dan:

$$\max_{\substack{r, s \leq k_n \\ \{r \text{ onewe}\}}} |D_{2n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}) \qquad \delta < 1.$$

Gestel nou r is ewe, dan volg:

$$|D_{2n}(1, r, s)| \leq \sum_{u=1}^{\frac{r-1}{2}} (r-1)\ldots(r-2u+1) \left| n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^{t-2u} - \int_0^1 (1-z)^2 H(z)^{t-2u} dz \right|$$

$$+ (r-1)\ldots 3.1 \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n (1 - {}^k/_n)^2 H'({}^k/_n) H({}^k/_n)^{s-1} - \int_0^1 z(1-z)^2 H'(z) H(z)^{s-1} dz \right|.$$

Die eerste term kan net soos by r onewe behartig word. Vir die tweede term kry ons dat dit

$$\leq r! \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n (1 - {}^k/_n)^2 H'({}^k/_n) H({}^k/_n)^{s-1} - \int_0^1 z(1-z)^2 H'(z) H(z)^{s-1} dz \right|$$

$$= r! \; R_n(s) \qquad \text{(sê)}$$

$$\leq k_n! \; R_n(s).$$

Laat: $f_s(x) = x(1-x)^2 H'(x) H(x)^{s-1}$. Volgens lemma 3. 5 bestaan daar dan 'n $0 < \delta < \frac{1}{2}$ sodat $f_s(x)$ monotoon is op $(0, \delta)$. Ons kan ook skryf:

$$R_n(s) \leq \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{[n\delta]-1} f_s(k/n) - \int_0^{\delta} f_s(z)dz \right| + \left| n^{-1} \sum_{k=[n\delta]}^{n-1} f_s(k/n) - \int_{\delta}^{1} f_s(z)dz \right|$$

$$= R_{1n}(s, \delta) + R_{2n}(s, \delta).$$

Pas ons nou lemma a5 toe op $R_{1n}(s, \delta)$ dan volg dat:

$$R_{1n}(s, \delta) \leq n^{-1} \left| f_s(\tfrac{\frac{1}{2}}{n}) - f_s(\tfrac{[n\delta]-\frac{1}{2}}{n}) \right| + \left| \int_0^{\frac{1}{2}/n} f_s(z)dz \right| + \left| \int_{\frac{[n\delta]-\frac{1}{2}}{n}}^{\delta} f_s(z)dz \right|$$

$$\leq o(n^{-\lambda}) + \left| \int_0^{\frac{1}{2}/n} f_s(z)dz \right| + \left| \int_{\frac{[n\delta]-\frac{1}{2}}{n}}^{\delta} f_s(z)dz \right| \qquad \text{met } \lambda < 1.$$

Met behulp van Schwarz se ongelykheid kry ons:

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}/n} f_s(z)dz \right| \leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}/n} z^2(1-z)^4 H'(z)^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}/n} H(z)^{2(s-1)} dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq o(1) \max_{s \leq k_n} \left(\int_0^{\frac{1}{2}/n} H(z)^{2(s-1)} dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

$= o(n^{-\lambda'})$, $\lambda' < \frac{1}{2}$, volgens lemma 3. 3 Soortgelyk vind ons dat:

$$\max_{s \leq k_n} \left| \int_{\frac{[n\delta]-\frac{1}{2}}{n}}^{\delta} f_s(z)dz \right| = o(n^{-\lambda'}), \quad \lambda' < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \max_{s \leq k_n} R_{1n}(s, \delta) = o(n^{-\lambda}), \ \lambda < \tfrac{1}{2}.$$

Op $R_{2n}(s, \delta)$ kan ons op soortgelyke wyse te werk gaan, behalwe dat ons lemma a6 toepas. Ons vind dus dat:

$$\max_{s \leq k_n} R_n(s) = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \max_{\{\substack{r,s \leq k_n \\ r \text{ ewe}}\}} |D_{2n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} |D_{2n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < \tfrac{1}{2}.$$

Dit is duidelik dat net só sal volg dat:

$$\max_{r,s \leq k_n} |D_{3n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < \tfrac{1}{2}.$$

Beskou nou ten slotte $D_{4n}(1, r, s)$. Gestel beide r en s is onewe, sodat:

$$|D_{4n}(1, r, s)| \leq \sum_{u,v} (r-1)(r-3)\ldots(r-2u+1)(s-1)(s-3)\ldots(s-2v+1)$$

$$x\, \left|n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^t - \int_0^1 (1 - z)^2 H(z)^t dz\right|$$

waar $t = r + s - 2 - 2(u + v)$.

Nou volg duidelik net soos hierbo dat:

$$\max_{\{\substack{r,s \leq k_n \\ r,s \text{ onewe}}\}} |D_{4n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}) \qquad \delta < \tfrac{1}{2}.$$

Gestel nou r en s is beide ewe. Dan is:

$$|D_{4n}(1, r, s)| \leq \sum_{u,v} (r-1)(r-3)\ldots(r-2u+1)(s-1)(s-3)\ldots(s-2v+1)$$

$$x\, \left|n^{-1} \sum_k (1 - {}^k/_n)^2 H({}^k/_n)^t - \int_0^1 (1 - z)^2 H(z)^t dz\right| \qquad (t = r+s-2-2(u+v)$$

$$+ (r-1)\ldots 3.1(s-1)\ldots 3.1 \left|n^{-1} \sum_k ({}^k/_n)^2 (1 - {}^k/_n)^2 h({}^k/_n) - \int_0^1 z^2 (1-z)^2 h(z) dz\right|$$

+ 2 terme waarvan die konvergensie analoog sal volg.

Die eerste term kan duidelik net soos hierbo behandel word. Stel:

$h_s(z) = z^2(1 - z)^2 h(z)$ dan bestaan volgens lemma 3. 5 'n $0 < \delta < \frac{1}{2}$ sodat $h_s(z)$ monotoon is op $(0, \delta)$ en $(1 - \delta, 1)$ terwyl $h_s(z)$ en $h'_s(z)$ begrensd is op $[\delta, 1 - \delta]$.

Ons kan die term nou skryf as:

$$\leq r!\, s!\, \Big(\Big| n^{-1} \sum_{k=1}^{[n\delta]} h_s(k/n) - \int_0^{\delta} h_s(z)dz \Big| + \Big| n^{-1} \sum_{k=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} h_s(k/n) - \int_{\delta}^{1-\delta} h_s(z)dz \Big|$$

$$+ \Big| n^{-1} \sum_{k=[n(1-\delta)]+1}^{n-1} h_s(k/n) - \int_{1-\delta}^{1} h_s(z)dz \Big|.$$

Op die eerste en laaste terme kan ons nou lemma a5 toepas en op die tweede term kan ons lemma a6 toepas, waaruit konvergensie dan direk volg.

Ons vind dus dat:

$$\max_{\substack{r,s \leq k_n \\ \{r \text{ en } s \text{ ewe}\}}} |D_{4n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}.$$

Die geval waar r ewe en s onewe is kan duidelik soortgelyk behandel word. (Gebruik lemma 3. 5(ii)).

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} |D_{4n}(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} |D_n(1, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} \Big| \sum_{r,s} a_{mr}\, a_{ms}\, (m!)^{-1} D_n(1, r, s) \Big| \leq \sigma_n\, o(n^{-\delta}) \max_{m \leq k_n} m!$$

$$= \sigma_n\, k_n!\, o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(b) Stel: $D_n(2, r, s) = A_n(3, r, s) - I_2(r, s)$.

Dan volg uit simmetrie dat:

$$\max_{r,s \leq k_n} |D_n(2, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} \left| \sum_{r,s} a_{mr} a_{ms} (m!)^{-1} D_n(2, r, s) \right|$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(c) Stel: $D_n(3, r, s) = A_n(13, r, s) - I_3(r, s)$.

$$\therefore |D_n(3, r, s)| = \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n(1 - {}^k/_n)H({}^k/_n)^t(1 + \nu_r(H({}^k/_n))) \quad (1 + \mu_s(H({}^k/_n))) \right.$$

$$\left. - \int_0^1 z(1 - z)H(z)^t(1 + \nu_r(H(z)))(1 + \mu_s(H(z)))dz \right|$$

$$\leq \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n(1 - {}^k/_n)H({}^k/_n)^t - \int_0^1 z(1 - z)H(z)^t dx \right| + \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n(1 - {}^k/_n)H({}^k/_n)^t \nu_r(H^k/_n)) \right.$$

$$\left. - \int_0^1 z(1 - z)H(z)^t \nu_r(H(z))dz \right| + \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n(1 - {}^k/_n)H({}^k/_n)^t \mu_s(H({}^k/_n)) \right.$$

$$\left. - \int_0^1 z(1 - z)H(z)^t \mu_s(H(z))dz \right| + \left| n^{-1} \sum_k {}^k/_n(1 - {}^k/_n)H({}^k/_n)^t \nu_r(H({}^k/_n))\mu_s(H({}^k/_n)) \right.$$

$$\left. - \int_0^1 z(1 - z)H(z)^t \nu_r(H(z))\mu_s(H(z))dz \right|$$

$$= D_{1n}(3, r, s) + D_{2n}(3, r, s) + D_{3n}(3, r, s) + D_{4n}(3, r, s) \text{ met } t = r+s-2.$$

Uit lemma 3. 6 volg dadelik:

$$\max_{r,s \leq k_n} D_{1n}(3, r, s) = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Vir r onewe volg konvergensie van $D_{2n}(3, r, s)$ uit lemma 3. 6 terwyl vir r ewe konvergensie volg analoog aan konvergensie van $R_n(s)$ hierbo. (By $D_{2n}(1, r, s)$). Konvergensie van $D_{3n}(3, r, s)$ volg dan uit simmetrie.

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} D_{in}(3, r, s) = o(n^{-\delta}), \quad \delta < \tfrac{1}{2}, \; i = 1, 2, 3.$$

Beskou nou $D_{4n}(3, r, s)$:

In die geval wat beide r en s onewe is, volg konvergensie direk uit lemma 3.6. In die geval wat r ewe en s onewe (en omgekeerd) is, volg konvergensie uit dié van $D_{2n}(3, r, s)$ hierbo. Vir beide r en s ewe volg konvergensie analoog aan dié van $D_{4n}(1, r, s)$ (d.w.s. m.b.v. lemma 3.5(iii)).

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} D_{4n}(3, r, s) = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \max_{r,s \leq k_n} |D_n(3, r, s)| = o(n^{-\delta}), \qquad \delta < \tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} \Big| \sum_{r,s} a_{mr} a_{ms} (m!)^{-1} D_n(3, r, s)\Big| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(d) Stel: $D_n(4, r, s) = A_n(14, r, s) - I_4(r, s)$.

Dan volg uit simmetrie met (c) dat:

$$\sigma_n \max_{m \leq k_n} \Big| \sum_{r,s} a_{mr} a_{ms} (m!)^{-1} D_n(4, r, s)\Big| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Uit bostaande kan ons dus sê dat:

$$\sigma_n \max_{m \leq k_n} \Big| \sum_{r,s} a_{mr} a_{ms} (m!)^{-1} A_n(r, s) - \sum_{r,s} a_{mr} a_{ms} (m!)^{-1} \sum_{i=1}^{4} I_i(r, s)\Big|$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$.

$$\therefore \sigma_n \max_{m \leq k_n} \Big| n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn} - \gamma_m \Big| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Kondisie (CBΓ1) word dus bevredig.

4.7 DIE VORM VAN DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN Q_n (EN L_n)

In paragraaf 4.2 - paragraaf 4.6 het ons aangetoon dat die kondisies van stelling 2.4 bevredig word vir ons bepaalde keuse van $\{c_{ijn}\}$, $\{b_{imn}\}$ en $\{\gamma_m\}$. Ons konkludeer dus dat:

$$D(T_n - ET_n) \rightarrow D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} (Y_m^2 - 1)) \qquad \text{as } n \rightarrow \infty. \tag{4.7.1}$$

In paragraaf 4.1 het ons egter gesien dat:

$$Q_n = ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 \, T_{n+1}. \tag{4.7.2}$$

In hierdie paragraaf wil ons die vorm van die asimptotiese verdeling van Q_n m.b.v. (4.7.1) en (4.7.2) bepaal. Hieruit sal ons dan die vorm van die asimptotiese verdeling van L_n, soos in paragraaf 3.1, verkry. Vooraf het ons eers nog 'n resultaat nodig.

<u>Lemma 4.1:</u> Met T_n soos hierbo, geld:

$$ET_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} {}^k/_n (1 - {}^k/_n) h({}^k/_n).$$

<u>Bewys:</u> Ons het volgens lemma 2.1 dat:

$$ET_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} c_{iin}.$$

Vervang ons die uitdrukking vir c_{iin} en keer die volgorde van sommering om, dan volg:

$$ET_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} h({}^k/_n)(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \psi({}^i/_n, {}^k/_n)^2)$$

$$= n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} h({}^k/_n)({}^k/_n(1 - {}^k/_n)^2 + (1 - {}^k/_n)({}^k/_n)^2)$$

$$= n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} h({}^k/_n)({}^k/_n)(1 - {}^k/_n)$$

en die lemma volg.

Stel $a_{n-1} = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} {}^k/_n (1 - {}^k/_n) h({}^k/_n)$.

Ons kry nou die volgende belangrike stelling:

<u>Stelling 4.1:</u> As $n \to \infty$ geld dat:

$$D(Q_n - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)).$$

<u>Bewys:</u> Vooraf; uit die sentrale limiet stelling volg dat:

$D(n^{\frac{1}{2}}({}^{S}n/_n - 1)) \quad \to \quad N(0, 1)$

met $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$, soos tevore

$\therefore\ S_{n/_n} = 1 + O_p(n^{-\frac{1}{2}})$

$\therefore\ ({}^n/_{S_n})^2 = 1 + O_p(n^{-\frac{1}{2}})$ (4.7.3)

Uit (4.7.2) volg nou dat;

$$Q_n - a_n = ({}^{n+1}/S_{n+1})^2 (T_{n+1} - a_n) + (({}^{n+1}/S_{n+1})^2 - 1)a_n.$$

Uit lemma 3.7 en (4.7.3) hierbo volg dat

$$(({}^{n+1}/S_{n+1})^2 - 1)a_n = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Aangesien ${}^{n+1}/S_{n+1} \to 1$ met waarskynlikheid 1, volg uit (4.7.1) dat

$$D(Q_n - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \to \infty.$$

Dit voltooi die bewys.

<u>Opmerking:</u> Hierdie stelling gee dus nou vir ons die asimptotiese verdeling van Q_n. In paragraaf 3.1 het ons egter gesien dat ons L_n as toetsstatistiek gebruik sodat ons graag sy verdeling sou wou hê. Dit word in die volgende stelling gegee.

Stelling 4. 2: Met a_n soos hierbo geld:

$$D(L_n - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Bewys: Ons weet dat $L_n = Q_n + R_n$, waar $R_n = o_p(1)$. Die bewys volg nou direk uit stelling 4. 1.

Opmerking: Hierdie stelling stel ons dus in staat om L_n te gebruik as toets=statistiek vir die hipotese $H_o : F = \Phi$. Al wat ons nog nodig het is die kritieke waardes van die asimptotiese verdeling van L_n. Hierdie, tesame met 'n tabel van a_n vir sekere keuses van n, word in die volgende paragraaf gegee.

4. 8 KRITIEKE WAARDES VAN DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN Q_n (EN L_n)

Ons het in die vorige paragraaf gesien dat onder H_o geld:

$$D(Q_n - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat $Y = \Sigma_1^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)$, dan sal ons in hierdie paragraaf die kritieke waardes van die verdeling van Y bepaal. Om dit te doen gaan ons die karakte=ristieke funksie van Y bereken en dit dan omkeer.

Beskou nou 'n stogastiese veranderlike X met digtheidsfunksie f, distribu=siefunksie F en karakteristieke funksie φ. Dan is dit welbekend dat:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \tag{4. 8. 1}$$

indien $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$.

Uit (4. 8. 1) volg dan dat:

$$\int_o^y f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(\int_o^y e^{-itx} dx)dt$$

$$\therefore F(y) - F(o) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{it} (1 - e^{-ity})dt \tag{4. 8. 2}$$

Ons sal van hierdie omkeringsformule gebruik maak.

Vir Y soos hierbo geld nou dat:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= Ee^{itY}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-it/k}\, Ee^{itY_k^2/k}\\ &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-it/k}(1 - 2it/k)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

want Y_k^2 het 'n χ_1^2 verdeling.

Ons let op dat hierdie vorm van $\varphi(t)$ nie geskik is vir berekeningsdoeleindes nie. Ons wil nl. 'n vorm van $\varphi(t)$ hê wat vinnig berekenbaar is, sodat die integraal in (4. 8. 2) numeries bepaal kan word. Om $\varphi(t)$ in sodanige vorm te kry, gaan ons as volg te werk:

Gestel:

$$\varphi(t) = r(t)e^{i\theta(t)}.$$

Nou is: $$|\varphi(t)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + 4t^2/k^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sinh 2\pi t}{2\pi t}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hieruit volg dus dat:

$$\begin{aligned}r(t) = |\varphi(t)| &= \left(\frac{\sinh 2\pi t}{2\pi t}\right)^{-1/4}\\ &= \left(\frac{e^{2\pi t} - e^{-2\pi t}}{4\pi t}\right)^{-1/4}.\end{aligned}$$

Hieruit is dit duidelik dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty,$$

sodat (4. 8. 2) van toepassing is.

Verder is:

$$\varphi(t) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} e^{2it/k}(1 - 2it/k)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

en:

$$e^{2it/k}(1 - 2it/k) = e^{2it/k}(1 + 4t^2/k^2)^{1/2} e^{-i\tan^{-1}(\frac{2t}{k})}$$

$$= (1 + 4t^2/k^2)^{1/2}\, e^{i(\frac{2t}{k} - \tan^{-1}\frac{2t}{k})}$$

$$\therefore\ \varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{4t^2}{k^2}\right)^{-1/4} . \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan^{-1}\frac{2t}{k} - \frac{2t}{k}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{e^{2\pi t} - e^{-2\pi t}}{4\pi t}\right)^{-1/4} . \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan^{-1}\frac{2t}{k} - \frac{2t}{k}\right)\right]$$

$$\therefore\ \theta(t) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tan^{-1}\frac{2t}{k} - \frac{2t}{k}\right).$$

Ons sal hierdie vorm van $\varphi(t)$ voortaan gebruik. Met behulp van hierdie voor= stelling word die integrand van (4. 8. 2) dan:

$$\frac{r(t)}{it}\, e^{i\theta(t)}(1 - e^{-ity})$$

$$= \frac{r(t)}{it}(\cos\theta(t) + i\sin\theta(t))(1 - \cos ty + i\sin ty).$$

Die reële deel hiervan is:

$$\frac{r(t)}{t}(\sin\theta(t)(1 - \cos ty) + \cos\theta(t)\sin ty)$$

$$= \frac{r(t)}{t}(\sin\theta(t) + \sin(ty - \theta(t))).$$

Ons vind dus dat:

$$F(y) - F(o) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(t)}{t}(\sin\theta(t) + \sin(ty - \theta(t)))dt.$$

Nou is egter:

$$r(-t) = r(t) \text{ en } \theta(-t) = -\theta(t)$$

$$\therefore\ F(y) - F(o) = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}\frac{r(t)}{t}(\sin\theta(t) + \sin(ty - \theta(t)))dt. \qquad (4.\ 8.\ 3)$$

Ons kon die integraal regs net numeries uitwerk, sodat ons nie 'n geslote vorm vir F(y) - F(o) kon vind nie.

Kies nou y baie groot dan word die linkerlid van (4. 8. 3) 1 - F(o), waaruit ons F(o) dan kan vind. Dit stel ons dus in staat om F(y) te bepaal.

Die volgende tabel gee die waardes van F(y), afgerond tot 3 desimale, vir sekere keuses van y.

TABEL 4. 8. 1. DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN $Q_n - a_n$

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
-3,5	0,000	-0,8	0,381	1,5	0,836	3,8	0,960
-3,0	0,002	-0,7	0,410	1,6	0,846	3,9	0,963
-2,9	0,003	-0,6	0,438	1,7	0,856	4,0	0,965
-2,8	0,005	-0,5	0,466	1,8	0,864	4,5	0,974
-2,7	0,008	-0,4	0,494	1,9	0,873	5,0	0,981
-2,6	0,012	-0,3	0,520	2,0	0,880	5,5	0,986
-2,5	0,018	-0,2	0,546	2,1	0,887	6,0	0,989
-2,4	0,025	-0,1	0,570	2,2	0,894	6,5	0,992
-2,3	0,034	0,0	0,594	2,3	0,901	7,0	0,994
-2,2	0,045	0,1	0,617	2,4	0,907	7,5	0,996
-2,1	0,058	0,2	0,638	2,5	0,912	8,0	0,997
-2,0	0,073	0,3	0,659	2,6	0,917	8,5	0,998
-1,9	0,091	0,4	0,679	2,7	0,922	9,0	0,998
-1,8	0,111	0,5	0,697	2,8	0,927	9,5	0,999
-1,7	0,132	0,6	0,715	2,9	0,931	10,0	0,999
-1,6	0,156	0,7	0,732	3,0	0,935	10,5	0,999
-1,5	0,181	0,8	0,748	3,1	0,939	11,0	1,000
-1,4	0,208	0,9	0,763	3,2	0,943		
-1,3	0,235	1,0	0,777	3,3	0,946		
-1,2	0,264	1,1	0,790	3,4	0,949		
-1,1	0,293	1,2	0,803	3,5	0,952		
-1,0	0,322	1,3	0,815	3,6	0,955		
-0,9	0,351	1,4	0,826	3,7	0,958		

Laat vervolgens α die grootte van die tipe I fout wees, dan is die kritieke waardes vir 'n toets van grootte $1-\alpha$, vir 'n aantal keuses van α bepaal. Om te be= paal hoe goed hierdie kritieke waardes dié van die verdeling van $Q_n - a_n$ benader wanneer n eindig is, is 1500 waardes van Q_n gesimuleer vir sekere keuses van n. Hieruit is die kritieke waardes van die verdeling van $Q_n - a_n$ geskat. Hierdie re= sultate, tesame met die kritieke waardes van die asimptotiese verdeling (d. w. s. vir $n = \infty$), word in die volgende tabel gegee:

TABEL 4. 8. 2 KRITIEKE WAARDES VAN DIE VERDELING VAN $Q_n - a_n$

	Kritieke waardes		
α	$n = 50$	$n = 100$	$n = \infty$
0,20	1,04	0,95	1,18
0,15	1,57	1,46	1,64
0,10	2,43	2,14	2,29
0,05	4,02	3,44	3,42
0,01	7,22	7,11	6,12

Die geskatte waardes hierbo is verkry deur 500 waardes van die statistiek volgens elk van drie kansgetal generators te simuleer. Hiervan is toe die gemiddeldes geneem. Dit het geblyk dat die resultate redelik gevoelig is vir die tipe generator wat gebruik word. Vir $n = 100$ is betroubaarheidsintervalle vir die persentiele bereken en daar is gevind dat bostaande waardes wel daarin lê. Indien hierdie opmerkings in gedagte gehou word, dan lyk dit asof die asimptotiese kritieke waardes 'n redelike benadering gee in die geval $n = 100$.

Die konstante a_n wat hierbo gebruik is, word in die volgende tabel gegee vir sekere keuses van n.

TABEL 4. 8. 3. WAARDES VAN DIE NORMERINGSKONSTANTE a_n

n	a_n
1	0,7854
2	1,1206
3	1,3211
4	1,4597
5	1,5637
6	1,6459
7	1,7133
8	1,7700
9	1,8188
10	1,8614
15	2,0162
20	2,1176
25	2,1917
30	2,2494
35	2,2964
40	2,3358
45	2,3696
50	2,3991
60	2,4485
70	2,4888
80	2,5227
90	2,5518
100	2,5772
150	2,6702
200	2,7320
300	2,8136
400	2,8682
500	2,9087
600	2,9407
700	2,9671
800	2,9894
900	3,0087
1000	3,0257

HOOFSTUK 5

OPTIMALITEIT VAN $Q_n^{(W)}$ VIR W = h EN VERGELYKING MET ANDER TOETS=STATISTIEKE

5.1 INLEIDING EN OORSIG OOR DIE TEORIE VAN BENADERDE BAHADUR HELLINGS

In paragraaf 1.3 het ons gesien dat as toetsstatistiek vir die enkelvoudige geval kan ons $Q_n^{(W)}$ gebruik, met W een of ander gewigsfunksie op (0, 1). In paragraaf 3.1 is aangetoon dat L_n as 'n alternatiewe toetsgrootheid gebruik kan word. Daar is ook aangetoon dat onder H_o geld $L_n = Q_n^{(h)} + R_n$, waar $R_n = o_p(1)$, as $n \to \infty$.

Die vraag ontstaan nou of die keuse W = h nie miskien optimaal is in een of ander sin nie. Ons sal in hierdie hoofstuk aantoon dat in die geval van 'n bepaalde klas van alternatiewes die antwoord hierop bevestigend is. As maatstaf van vergelyking sal ons gebruik maak van die sogenaamde benaderde Bahadur hellings. Ons sal $Q_n^{(W)}$ ook t.o.v. Bahadur hellings vergelyk met sekere ander bekende toetsgroothede vir die enkelvoudige geval.

Ons gee vervolgens net 'n kort oorsig oor die teorie van benaderde Bahadur hel=lings. (Vir 'n vollediger bespreking sien Bahadur (1960), Bahadur (1967) en Abrahamson (1965)).

Laat X 'n stogastiese veranderlike wees en dui deur $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ 'n ry van waarnemings op X aan. Laat $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ 'n versameling waarskynlikheidsmate wees, waar Θ 'n abstrakte parameterruimte is, en laat Θ_o 'n egte deelversameling van Θ wees.

Beskou die hipotese $H_o : \theta \in \Theta_o$. Laat $\{T_n(\underline{X})\}$ 'n ry van toetsstatistieke vir H_o wees. Die ry $\{T_n(\underline{X})\}$ word genoem 'n standaard ry indien die volgende voorwaar= des geld: (Die kondisies is effens gewysig om aan te pas by ons situasie.)

SI : Daar bestaan 'n nie-ontaarde, kontinue distribusiefunksie F, sodat vir alle

$\theta \in \Theta_o$ geld dat:

$$\lim_{n \to \infty} P_\theta(T_n \leq r) = F(r), \; r \in (-\infty, \infty).$$

SII : Daar bestaan 'n konstante $a \in (0, \infty)$ sodat as $r \to \infty$ geld:

$$\log(1 - F(r)) = -\tfrac{1}{2}ar(1 + o(1)).$$

SIII : Daar bestaan 'n nie-negatiewe reële funksie b op Θ sodat:

(i) $b(\theta) > 0$ vir $\theta \in \Theta - \Theta_o$

(ii) $\lim_{n \to \infty} P_\theta(|n^{-1}T_n - b(\theta)| > r) = 0$ vir elke $r > 0$ en $\theta \in \Theta$.

Uit SI en SIII sien ons dat $b(\theta) = 0$ wanneer $\theta \in \Theta_o$ en $T_n \to \infty$ in waarskynlik= heid, wanneer $\theta \in \Theta - \Theta_o$. Indien ons T_n dus gebruik as toetsstatistiek vir H_o, sal ons groot waardes van T_n as beduidend beskou.

Indien die eksakte verdeling van T_n onder H_o nie bekend is nie, kan die drempel bereik deur $T_n(\underline{X})$ geskat word deur die stogastiese veranderlike:

$$L_n = L_n(T_n(\underline{X})) = 1 - F(T_n(\underline{X})).$$

(Die drempel bereik deur T_n is die waarskynlikheid, onder H_o, om 'n waarde van T_n groter as $T_n(\underline{X})$, sy waargenome waarde, te kry.)

Indien H_o nie waar is nie sal $L_n \to 0$ in waarskynlikheid as $n \to \infty$ (onder boge= noemde kondisies). Die tempo waarteen laasgenoemde konvergensie plaasvind gee 'n aanduiding van die asimptotiese doeltreffendheid van T_n. (By 'n gegewe $\theta \in \Theta - \Theta_o$.) Die gedrag van L_n word beter ondersoek deur:

$$K_n = K_n(T_n) = -2 \log L(T_n).$$

Dit volg dan uit bostaande dat vir elke $\theta \in \Theta$ geld

$n^{-1} K_n \to ab(\theta)$, in waarskynlikheid, as $n \to \infty$. Hieruit sien ons dat K_n asimptoties lineêr is in n, sodat die benaderde helling van T_n gedefinieer word as:

$$c(\theta) = ab(\theta).$$

Die benadering hier ter sprake volg uit die feit dat L_n slegs die benaderde drempel van T_n is.

Indien ons nou twee rye toetsstatistieke T_{1n} en T_{2n} het, met benaderde hellings c_1 en c_2, dan kan ons $c_1(\theta)/c_2(\theta)$, $\theta \in \Theta - \Theta_o$, beskou as die benaderde asimptotiese doeltreffendheid van T_{1n} t. o. v. T_{2n}. (Sien Bahadur (1960)).

Indien Θ 'n metriese ruimte is en $\Theta - \Theta_o$ is dig in Θ, dan vir $\theta_o \in \Theta_o$ en $\{\theta_k\}$ 'n ry uit $\Theta - \Theta_o$ met limiet θ_o, kan ons die benaderde asimptotiese limiet doeltreffendheid (by θ_o) van T_{1n} t. o. v. T_{2n} definieer as:

$$L_{12}(\theta_o) = \lim_{k \to \infty} \frac{c_1(\theta_k)}{c_2(\theta_k)},$$

mits hierdie limiet bestaan. $L_{12}(\theta_o)$ is intuïtief bruikbaar aangesien die meeste toetssituasies groot steekproewe vereis vir diskriminasie slegs as θ naby Θ_o is. In hierdie hoofstuk sal ons L_{12} gebruik as maatstaf om twee rye toetsstatistieke met mekaar te vergelyk. Om L_{12} te vind moet ons dus a en $b(\theta)$ bepaal. Om dit te bepaal gebruik ons die volgende stelling van Abrahamson (1965) wat daarop neerkom dat indien die momentvormende funksie van die asimptotiese verdeling van 'n toets= statistiek 'n bepaalde vorm het, dan kan die benaderde helling maklik gevind word.

Laat Z 'n stogastiese veranderlike wees met distribusiefunksie F en moment= vormende funksie m(t), d. w. s. :

$$m(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zs} dF(z).$$

Ons het dan die volgende:

<u>Stelling 5. 1</u>: Laat $s = t + i\tau$, $\gamma \in [0,1)$ en $d > 0$. Gestel

$$m(s) = f(s)(d - s)^{-\gamma}$$

waar $f(s)$ analities is in 'n gebied wat $\{s \mid t \leq d\}$ bevat. Dan is:

$$\log(1 - F(z)) = -dz(1 + o(1)) \text{ as } z \to \infty.$$

<u>Bewys</u>: Sien Abrahamson (1965), Gevolgtrekking 2, Bl. 153. (Alhoewel sy die stel= ling bewys vir 'n stogastiese veranderlike Z waarvoor geld dat $Z \geq 0$ byna seker, volg die huidige stelling direk uit haar bewys.)

Opmerking: Ons sien dus dat in hierdie geval is

$$a = 2d.$$

5. 2 DIE BENADERDE HELLING IN 'N BEPAALDE GEVAL

Ons sal in hierdie paragraaf kondisies gee waaronder die helling van $Q_n^{(W)}$ 'n bepaalde vorm het. Dit sal ons in die volgende paragraaf in staat stel om die opti= maliteit van $Q_n^{(h)}$ te bewys.

Laat weer $H_o : F(x) = \Phi(x)$ en beskou as alternatiewes $H_1 : F(x) = F_\theta(x)$ waar θ in 'n deelversameling van die reguit lyn lê, en θ_o 'n enkele punt is sodat $F_\theta(x) \to F_{\theta_o}(x) = \Phi(x)$ as $\theta \to \theta_o$. In hierdie geval word H_o dan $H_o : \theta = \theta_o$.

As toetsstatistiek het ons dan:

$$\sum_{j=1}^{n} (\Phi(X_{jn}) - {}^j/_{n+1})^2 W_{jn}.$$

Onder H_o is die statistiek dan:

$$Q_n^{(W)} = \sum_{j=1}^{n} (U_{jn} - {}^j/_{n+1})^2 W_{jn},$$

soos in paragraaf 1. 3, terwyl, onder H_1 word die statistiek:

$$Q_{1n}^{(W)}(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (\Phi(F_\theta^{-1}(U_{jn})) - {}^j/_{n+1})^2 W_{jn}$$

$$= \sum_j (G_\theta(U_{jn}) - {}^j/_{n+1})^2 W_{jn},$$

waar $G_\theta = \Phi(F_\theta^{-1})$ en ons aanvaar dat F_θ^{-1} goed gedefinieer is.

Beskou nou die volgende kondisies:

(H1) Daar bestaan getalle $\{\rho_k^{(W)}; k = 1, 2, \ldots\}$ en $\{a_n^{(W)}; n = 1, 2, \ldots\}$ sódat:

$$D(Q_n^{(W)} - a_n^{(W)}) \to D(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(W)} (Y_k^2 - 1)) \text{ as } n \to \infty,$$

met $\{Y_k\}$ onafhanklik, elk $N(0, 1)$ verdeel.

(H2) Laat $\rho_1^{(W)} > \rho_k^{(W)}$, $k = 2, 3, \ldots$, en gestel die funksie:

$$f^{(W)}(s) = (2\rho_1^{(W)})^{-\frac{1}{2}} e^{-\rho_1^{(W)} s} \prod_{k=2}^{\infty} e^{-\rho_k^{(W)} s} (1 - 2s\rho_k^{(W)})^{-\frac{1}{2}}$$

is analities in 'n gebied wat $\{s \mid t \leq (2\rho_1^{(W)})^{-1}\}$, $s = t + i\tau$, insluit.

(H3) As $n \to \infty$ geld dat:

$n^{-1}(Q_{1n}^{(W)} - a_n^{(W)}) \to b^{(W)}(\theta)$, in waarskynlikheid, waar $b^{(W)}(\theta) > 0$ (vir $\theta \neq \theta_o$).

Ons kry dan die volgende:

<u>Stelling 5. 2:</u> Indien kondisies (H1), (H2) en (H3) bevredig word, dan word die bena= derde helling van $Q_n^{(W)}$ gegee deur:

$$c^{(W)}(\theta) = \frac{b^{(W)}(\theta)}{\rho_1^{(W)}} \text{ ,}$$

<u>Bewys:</u> Uit kondisie (H1) volg dat die momentvormende funksie van die asimpto= tiese verdeling van $Q_n^{(W)} - a_n^{(W)}$ gegee deur:

$$m^{(W)}(s) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\rho_k^{(W)} s} (1 - 2s\rho_k^{(W)})^{-1/2}$$

$$= ((2\rho_1^{(W)})^{-1} - s)^{-\frac{1}{2}} f^{(W)}(s).$$

Uit kondisie (H2) volg m. b. v. stelling 5. 1 dat SII bevredig word met:

$$a = {}^{1}/_{\rho_1^{(W)}} .$$

Uit (H3) volg ook dat SIII bevredig word.

Die stelling volg nou direk uit die definisie van benaderde helling.

As toepassing van stelling 5. 2 bepaal ons die hellings van $Q_n^{(h)} = Q_n$ en $Q_n^{(1)}$ in die geval van skuif en skaal alternatiewe.

(i) Skuif alternatiewes:

In hierdie geval is dus $H_o : F(x) = \Phi(x)$ d. w. s. $\theta_o = 0$ en $H_1 : F(x) = \Phi(x + \theta)$. Vooraf gee ons eers drie resultate wat ons sal nodig kry:

Lemma 5. 1: Laat:

$$g_\theta(x) = G'_\theta(x)^2.$$

Dan is g_θ stygend vir $\theta > 0$ en dalend vir $\theta < 0$.

Bewys: Ons het dat:

$$F_\theta^{-1}(x) = \Phi^{-1}(x) - \theta = H(x) - \theta$$

$$\therefore G_\theta(x) = \Phi(H(x) - \theta)$$

$$\therefore\ G'_\theta(x) = \phi(H(x) - \theta)\ .\ H'(x)$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\theta^2}\ .\ e^{\theta H(x)}$$
$$\therefore\ g_\theta(x) = e^{-\theta^2}\ .\ e^{2\theta H(x)}$$
$$\therefore\ g'_\theta(x) = e^{-\theta^2}\ .\ e^{2\theta H(x)}\ .\ 2\theta H'(x)$$
$$\begin{array}{lll} > & \{0 & \text{vir } \theta > 0 \\ < & \{0 & \text{vir } \theta < 0 \end{array}$$

en die lemma volg.

<u>Lemma 5.2</u>: As $n \to \infty$ geld dat:

(i) $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (G_\theta(^j/_{n+1}) - {}^j/_{n+1})^2 h_{jn} \to \int_o^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx$ en

(ii) $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (G_\theta(^j/_{n+1}) - {}^j/_{n+1})^2 \to \int_o^1 (G_\theta(x) - x)^2 dx.$

<u>Bewys</u>: (i) Beskou die funksie:

$$g^*_\theta(x) = (G_\theta(x) - x)^2 h(x)$$
$$= (\Phi(H(x) - \theta) - x)^2 / \phi(H(x))^2.$$

Stel $y = H(x)$, en laat:

$$h_\theta(y) = (\Phi(y - \theta) - \Phi(y))^2 / \phi(y)^2.$$

As $y \to -\infty$ geld nou dat:

$$h_\theta(y) \sim \left(\frac{\phi(y)}{|y|} - \frac{\phi(y-\theta)}{|y-\theta|}\right)^2 / \phi(y)^2$$

$$= y^{-2} + \frac{\phi(y-\theta)^2}{\phi(y)^2}\ .\ (y - \theta)^{-2} - 2\,\frac{\phi(y-\theta)}{\phi(y)}\,|y(y - \theta)|^{-1}$$

$$= o(1) + e^{-\theta^2 + 2y\theta}(y-\theta)^{-2} - 2|y(y-\theta)|^{-1}e^{-\frac{1}{2}\theta^2 + y\theta}$$

$$\to \begin{cases} 0 & \text{as } \theta > 0 \\ \infty & \text{as } \theta < 0. \end{cases}$$

As $y \to +\infty$ volg ook dat:

$$h_\theta(y) \sim y^{-2} + \frac{\phi(y-\theta)^2}{\phi(y)^2}(y-\theta)^{-2} - 2\frac{\phi(y-\theta)}{\phi(y)} \cdot (y(y-\theta))^{-1}$$

$$= o(1) + e^{-\theta^2 + 2y\theta}(y-\theta)^{-2} - 2(y(y-\theta))^{-1} e^{-1/2\theta^2 + y\theta}$$

$$\to \begin{cases} 0 & \text{as } \theta < 0 \\ \infty & \text{as } \theta > 0. \end{cases}$$

Hieruit volg dat:

$$g^*_\theta(x) \to \begin{cases} 0 & \text{as } x \to 0 \text{ en } \theta > 0 \\ & \text{of } x \to 1 \text{ en } \theta < 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \infty & \text{as } x \to 0 \text{ en } \theta < 0 \\ & \text{of } x \to 1 \text{ en } \theta > 0. \end{cases}$$

(a) <u>Laat $\theta < 0$</u>:

Dit volg direk dat 'n $\delta = \delta_\theta$ bestaan sodat $g^*_\theta(x)$ dalend is op $(0, \delta)$, terwyl $g^*_\theta(x)$ begrensd is op $[\delta, 1]$.

$\therefore$ Volgens lemma a5 geld:

$$\left|(n+1)^{-1}\sum_{j=1}^{[n\delta]-1} g^*_\theta({}^j/_{n+1}) - \int_0^\delta g^*_\theta(x)dx\right| \leq (n+1)^{-1}\left|g^*_\theta\left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right) - g^*_\theta\left(\frac{[n\delta]-\frac{1}{2}}{n+1}\right)\right|$$

$$+ \left|\int_0^{\frac{1}{2}/n+1} g^*_\theta(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{[n\delta]-\frac{1}{2}}{n+1}}^{\delta} g^*_\theta(x)dx\right| \leq 2(n+1)^{-1} g^*_\theta\left(\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\right) + 2\int_0^{\frac{\frac{1}{2}}{n+1}} g^*_\theta(x)dx$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$, deur toepassing van lemma a3 en die feit dat

$\int_0^1 g^*_\theta(x)dx < \infty$.

Aangesien $g^*_\theta(x)$ begrensd is op $[\delta, 1]$ volg dat:

$$(n+1)^{-1} \sum_{j=[n\delta]}^{n} g^*_\theta(j/_{n+1}) \to \int_\delta^1 g^*_\theta(x)dx \qquad \text{as } n \to \infty$$

(i) geld dus vir $\theta < 0$.

(b) Vir $\theta > 0$ volg die resultaat analoog.

$\therefore$ (i) geld vir alle θ.

(ii) Die bewys hier volg direk uit die feit dat $(G_\theta(x) - x)^2$ begrensd is op $[0, 1]$.

Die lemma geld dus.

Laat nou $Q_{1n} = Q_{1n}^{(h)}$. Ons het dan die volgende:

<u>Stelling 5.3</u>: Onder H_1 geld:

(i) $n^{-1}(Q_{1n}(\theta) - a_n) \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx$ in waarskynlikheid, as $n \to \infty$,

en

(ii) $n^{-1} Q_{1n}^{(1)}(\theta) \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 dx$

in waarskynlikheid, as $n \to \infty$.

<u>Bewys:</u> (i) Ons het dat:

$$n^{-1}Q_{1n} = n^{-1} \sum_j (G_\theta(U_{jn}) - j/_{n+1})^2 h_{jn}$$

$$= n^{-1} \sum_j \{(G_\theta(j/_{n+1}) - j/_{n+1}) + G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(\tfrac{j}{n+1})\}^2 \quad h_{jn}$$

$$= n^{-1} \sum_j (G_\theta(j/_{n+1}) - j/_{n+1})^2 h_{jn} + n^{-1} \sum_j (G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(j/_{n+1}))^2 h_{jn}$$

$$+ 2n^{-1} \sum_j (G_\theta(j/_{n+1}) - j/_{n+1})(G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(j/_{n+1}))h_{jn}.$$

Volgens lemma 5. 2 geld:

$$n^{-1}\sum_j (G_\theta(^j/_{n+1}) - {}^j/_{n+1})^2 h_{jn} \to \int_o^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Beskou nou die tweede term. Volgens Taylor geld dan:

$$n^{-1}\sum_j (G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(^j/_{n+1}))^2 h_{jn}$$

$$= n^{-1}\sum_j V_{jn}^2\, G_\theta'\,(U^*_{jn})^2 h_{jn}$$

$$= n^{-1}\sum_j V_{jn}^2\, g_\theta(U^*_{jn})h_{jn} \leq n^{-1}\sum_j V_{jn}^2\, g_\theta(^j/_{n+1})h_{jn} + n^{-1}\sum_j V_{jn}^2\, g_\theta(U_{jn})h_{jn}$$

$= R_{1n}(\theta) + R_{2n}(\theta)$ sê.

Hier is U^*_{jn} 'n stogastiese veranderlike tussen U_{jn} en $^j/_{n+1}$. Die ongelykheid in die tweede laaste stap volg dan uit die monotonisiteit van die funksie $g_\theta(x)$ volgens lemma 5. 1.

Laat nou $\theta > 0$. Volgens lemma 5. 1 is $g_\theta(x)$ dan stygend sodat m. b. v. lemmas a9 en 3. 7 volg dat:

$$ER_{1n}(\theta) \leq n^{-2}\sum_j {}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1})g_\theta(^j/_{n+1})h_{jn} \leq g_\theta(\tfrac{n}{n+1})n^{-2}\sum_j {}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1})h_{jn}$$

$$= n^{-1} g_\theta(\tfrac{n}{n+1})\, O(\log n) \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Laat $\delta > 0$ en beskou $n^{-\delta} g_\theta(^n/_{n+1})$. Stel soos tevore $\alpha_n = H(^1/_{n+1}) = -H(\frac{n}{n+1})$

$$\therefore\ n^{-1} = (1 - \Phi(|\alpha_n|))/\Phi(|\alpha_n|)$$

$$\therefore\ n^{-\delta} g_\theta(\tfrac{n}{n+1}) = \left(\frac{1 - \Phi(|\alpha_n|)}{\Phi(|\alpha_n|)}\right)^\delta e^{-\theta^2} e^{2\theta|\alpha_n|} \sim \left(\frac{\phi(|\alpha_n|)}{|\alpha_n|\Phi(|\alpha_n|)}\right)^\delta e^{-\theta^2} e^{2\theta|\alpha_n|}$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$.

$\therefore n^{-1} g_\theta(\frac{n}{n+1})O(\log n) = o(1)$ as $n \to \infty$.

$\therefore ER_{1n}(\theta) = o(1)$ vir $\theta > 0$, as $n \to \infty$.

Vir $\theta < 0$ volg die resultaat analoog.

$\therefore R_{1n}(\theta) = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Beskou nou $R_{2n}(\theta)$ d. w. s. :

$$R_{2n}(\theta) = n^{-1} \sum_j V_{jn}^2 g_\theta(U_{jn})h_{jn}.$$

Laat $\tau > 0$. Volgens lemma a10 bestaan dan getalle $u^{jn}(\tau) = u^{jn}$ en $u_{jn}(\tau) = u_{jn}$, sodat indien ons stel $\omega_{jn}(\tau) = \sup_{u_{jn} < u < u^{jn}} g_\theta(u)$, dan is:

$$P[R_{2n}(\theta) \leq \sum_j V_{jn}^2 h_{jn}\omega_{jn}(\tau)] \geq 1 - \tau . \qquad (5.2.1)$$

Volgens lemma a9 geld nou:

$$En^{-1} \sum_j V_{jn}^2 h_{jn}\omega_{jn}(\tau) \leq n^{-2} \sum_j {}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1})h_{jn}\omega_{jn}(\tau)$$

$= R_{3n}(\theta, \tau)$ (sê).

Laat nou $\theta > 0$; dan is $g_\theta(x)$ stygend sodat:

$$\omega_{jn}(\tau) = g_\theta(u^{jn}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ons kan ook aanvaar dat $u^{nn} = \max_{1 \leq j \leq n} u^{jn}$

$$\therefore R_{3n}(\theta, \tau) \leq n^{-1} g_\theta(u^{nn})\, n^{-1} \sum_j {}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1})h_{jn}$$

$$= n^{-1} g_\theta(u^{nn})\, O(\log n) \qquad \text{as } n \to \infty,$$

volgens lemma 3.7. Ons toon nou aan dat $n^{-1} g_\theta(u^{nn})\log n = o(1)$ as $n \to \infty$.

Stel: $b_n = H(u^{nn})$

$\therefore\ u^{nn} = \Phi(b_n)$

$\therefore\ n^{-1} g_\theta(u^{nn}) \log n = n^{-1} e^{-\theta^2} e^{2\theta b_n} \log n$

$= e^{-\theta^2} e^{2\theta b_n}(1 - u^{nn})n^{-1}(1 - u^{nn})^{-1} \log n \sim e^{-\theta^2} e^{2\theta b_n}(\phi(b_n)/b_n)n^{-1}(1-u^{nn})^{-1} \log n,$

$\leq K(\tau)e^{-\theta^2} e^{2\theta b_n}(\phi(b_n)/b_n)n^{-1} (n + 1) \log n,$ volgens lemma a10.

Nou is: $u_{nn} < \frac{n}{n+1} < u^{nn}.$

$\therefore\ (1 - u_{nn})^{-1} < n + 1$

en $(1 - u^{nn})^{-1} > n + 1 > n.$

$\therefore n^{-1} g_\theta(u^{nn}) \log n \lesssim K(\tau)e^{-\theta^2} e^{2\theta b_n}(\phi(b_n)/b_n)(n + 1)n^{-1} \log (1 - u^{nn})^{-1}$

$\sim K(\tau)e^{-\theta^2} e^{2\theta b_n}(\phi(b_n)/b_n)O(1)\log(\phi(b_n)/b_n)^{-1}$

$= o(1)$ as $n \to \infty.$

$\therefore\ n^{-1} g_\theta(u^{nn}) \log n = o(1)$ as $n \to \infty.$

$\therefore\ R_{3n}(\theta, \tau) = o_p(1),$ as $n \to \infty.$

$\therefore E\, n^{-1} \sum_j V^2_{jn} h_{jn} \omega_{jn}(\tau) = o(1)$ as $n \to \infty.$

$\therefore\ n^{-1} \sum_j V^2_{jn} h_{jn} \omega_{jn}(\tau) = o_p(1)$ as $n \to \infty.$

Dit geld vir elke $\tau > 0$, sodat uit (5. 2. 1) volg dat:

$R_{2n}(\theta) = o_p(1)$ as $n \to \infty$ en $\theta > 0.$

Vir $\theta < 0$ volg die resultaat op analoë wyse.

$\therefore\ n^{-1} \sum_j (G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(j/_{n+1}))^2 h_{jn} = o_p(1)$ as $n \to \infty.$

Beskou nou die derde term in die ontwikkeling van $n^{-1} Q_n$:

$$|n^{-1} \sum_j (G_\theta(j/_{n+1}) - j/_{n+1})(G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(j/_{n+1}))h_{jn}|$$

$$\leq |n^{-1} \sum_j G_\theta(U_{jn}) - G_\theta(j/_{n+1}))^2 h_{jn}|^{\frac{1}{2}}\ |n^{-1} \sum_j(G_\theta(j/_{n+1}) - j/_{n+1})^2 h_{jn}|^{\frac{1}{2}}$$

$= O(1) \cdot o_p(1) = o_p(1)$ as $n \to \infty$,

volgens bostaande.

Ten slotte geld volgens lemma 3.7 dat $n^{-1} a_n = o(1)$ as $n \to \infty$.

Ons konkludeer dus dat:

$$n^{-1}(Q_{1n}(\theta) - a_n) \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx,$$

in waarskynlikheid as $n \to \infty$. Die eerste deel van die stelling volg dus.

(ii) Die bewys verloop analoog aan dié van (i) hierbo.

Stelling 5.3 geld dus.

Hierdie stelling stel ons nou in staat om die volgende belangrike stelling te bewys:

Stelling 5.4: In die geval van skuif alternatiewes word die benaderde hellings van $Q_n - a_n$ en $Q_n^{(1)}$ respektiewelik gegee deur:

$$c^{(h)}(\theta) = c_1(\theta) = \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx$$

en:

$$c^{(1)}(\theta) = c_2(\theta) = \pi^2 \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 dx, \text{ met } G_\theta(x) = \Phi(H(x) - \theta).$$

Bewys: Ons sal stelling 5.2 toepas.

Beskou eers $Q_n - a_n$:

Volgens stelling 4.1 weet ons dat (H1) bevredig word en dit is duidelik dat ook (H2) bevredig word met

$$\rho_1^{(h)} = \gamma_1 = 1.$$

(H3) word ook bevredig volgens stelling 5.3. Die resultaat volg dus.

Die resultaat volg ook vir $Q_n^{(1)}$ met $\rho_1^{(1)} = \pi^2$ (sien paragraaf 2.3).

Die stelling volg dus.

(ii) Skaal Alternatiewes

In hierdie geval is $H_o : F(x) = \Phi(x)$ d. w. s. $\theta_o = 1$ en $H_1 : F(x) = \Phi(\theta x)$.

Vooraf gee ons weer drie resultate wat nodig is vir die hoofstelling:

Lemma 5. 3: Laat

$$g_\theta(x) = G'_\theta(x)^2.$$

Vir $\theta \leq 1$ geld dan dat $g_\theta(x)$ stygend is op $(0, \frac{1}{2})$ en dalend op $(\frac{1}{2}, 1)$. Vir $\theta > 1$ is $g_\theta(x)$ dalend op $(0, \frac{1}{2})$ en stygend op $(\frac{1}{2}, 1)$.

Bewys: Ons het dat:

$$F_\theta^{-1}(x) = \theta^{-1}\,\Phi^{-1}(x) = \theta^{-1}H(x)$$

$$\therefore\ G_\theta(x) = \Phi(\theta^{-1}H(x))$$

$$\therefore\ G'_\theta(x) = \theta^{-1}H'(x)\,.\ \phi(\theta^{-1}H(x))$$

$$\begin{aligned}\therefore\ g_\theta(x) &= \theta^{-2}H'(x)^2\phi(\theta^{-1}H(x))^2\\ &= \theta^{-2}\,e^{-\theta^{-2}H(x)^2 + H(x)^2}\\ &= \theta^{-2}\,e^{-H(x)^2(\theta^{-2} - 1)}.\end{aligned}$$

Die lemma volg nou maklik deur differensiasie.

Lemma 5. 4: As $n \to \infty$ geld:

(i) $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} (G_\theta(\frac{j}{n+1}) - \frac{j}{n+1})^2 h_{jn} \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx$ en:

(ii) $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} (G_\theta(\frac{j}{n+1}) - \frac{j}{n+1})^2 \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 dx.$

Bewys: (i) Beskou die funksie:

$$g^*_\theta(x) = (G_\theta(x) - x)^2 h(x).$$

Stel $y = H(x)$ en laat:

$$h_\theta(y) = (\Phi(\theta^{-1}y) - \Phi(y))^2/\phi(y)^2.$$

As $y \to -\infty$ geld nou dat:

$$h_\theta(y) \sim \left(\frac{\phi(\theta^{-1}y)}{|\theta^{-1}y|} - \frac{\phi(y)}{|y|}\right)^2/\phi(y)^2$$

$$= y^{-2}\left(\frac{\phi(\theta^{-1}y)^2}{\theta^{-1}\phi(y)^2} + 1 - \frac{2\phi(\theta^{-1}y)}{\theta^{-1}\phi(y)}\right)$$

$$= o(1) + \theta^{-1}y^{-2}e^{-y^2(\theta^{-2}-1)} - 2\theta^{-1}y^{-2}e^{-\frac{1}{2}y^2(\theta^{-2}-1)}$$

$$\to \begin{cases} 0 & \text{as } \theta \leq 1 \\ \infty & \text{as } \theta > 1. \end{cases}$$

As $y \to +\infty$ volg ook dat:

$$h_\theta(y) \sim o(1) + \theta^{-1}y^{-2}e^{-y^2(\theta^{-2}-1)} - 2\theta^{-1}y^{-2}e^{-\frac{1}{2}y^2(\theta^{-2}-1)}$$

$$\to \begin{cases} 0 & \text{as } \theta \leq 1 \\ \infty & \text{as } \theta > 1. \end{cases}$$

Hieruit volg dus dat:

$$g_\theta^*(x) \begin{array}{l} \to \\ \to \\ \\ \to \\ \to \end{array} \begin{cases} 0 & \text{as } \theta \leq 1 \text{ en } x \to 0 \\ & \text{of } x \to 1 \\ \infty & \text{as } \theta > 1 \text{ en } x \to 0 \\ & \text{of } x \to 1. \end{cases}$$

Vir $\theta \leq 1$ is $g_\theta^*(x)$ dus begrensd op $[0, 1]$ sodat die resultaat direk volg.

Vir $\theta > 1$ volg dit maklik dat daar 'n $\delta_\theta = \delta$ bestaan sodat $g_\theta^*(x)$ daal op $(0, \delta)$, styg op $(1 - \delta, 1)$ en begrensd is op $[\delta, 1 - \delta]$.

Die resultaat volg nou soos by lemma 5. 2 deur toepassing van lemma a5.

(ii) Aangesien $(G_\theta(x) - x)^2$ begrensd is op $[0, 1]$ volg die bewys hier direk.

Die lemma geld dus.

Laat weer $Q_{1n} = Q_{1n}^{(h)}$, dan het ons die volgende:

Stelling 5. 5: Onder H_1 geld:

(i) $n^{-1}(Q_{1n}(\theta) - a_n) \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx$

in waarskynlikheid, as $n \to \infty$, en:

(ii) $n^{-1} Q_{1n}^{(1)} \to \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 dx$

in waarskynlikheid, as $n \to \infty$.

Bewys: Die bewys verloop analoog aan dié van stelling 5. 3 deur toepassing van lemmas 5. 3 en 5. 4.

Hieruit kan ons nou die volgende kry:

Stelling 5. 6: In die geval van skaal alternatiewes word die benaderde hellings van $Q_n - a_n$ en $Q_n^{(1)}$ respektiewelik gegee deur:

$$c^{(h)}(\theta) = c_1(\theta) = \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 h(x)dx$$

en:

$$c^{(1)}(\theta) = c_2(\theta) = \pi^2 \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 dx,$$

waar $G_\theta(x) = \Phi(\theta^{-1}H(x))$.

Bewys: Die bewys verloop analoog aan dié van stelling 5. 4, deur toepassing van stellings 5. 2 en 5. 5.

Opmerking: Die stellings van hierdie paragraaf sal ons in die volgende paragraaf in staat stel om die optimaliteit van Q_n te bewys.

5.3 OPTIMALITEIT VAN DIE GEWIGSFUNKSIE W = h IN DIE GEVAL VAN SKUIF ALTERNATIEWES

Beskou nou weer die statistiek

$$Q_n^{(W)} = \sum_{j=1}^{n} (U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^2 W_{jn},$$

vir die enkelvoudige geval.

Ons plaas die volgende kondisies op $Q_n^{(W)}$ en W:

(01) Stelling 5.2 is op $Q_n^{(W)} - a_n^{(W)}$ van toepassing met $\{\rho_k^{(W)}\}$ die eiewaardes van die kern:

$$c^{(W)}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \psi(x, u)\psi(y, u)W(u)du,$$

(Sien die opmerking aan die einde van paragraaf 2.3) terwyl $b^{(W)}(\theta)$ gegee word deur:

$$b^{(W)}(\theta) = \int_0^1 (G_\theta(x) - x)^2 W(x)dx,$$

met $G_\theta(x) = \Phi(F_\theta^{-1}(x))$ soos in paragraaf 5.2.

(02) Indien $F_\theta(x) = \Phi(x + \theta)$, d.w.s. $G_\theta(x) = \Phi(H(x) - \theta)$ dan geld dat:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{b^{(W)}(\theta)}{\theta^2} = \int_0^1 \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\Phi(H(x) - \theta) - x}{\theta}\right)^2 W(x)dx$$

$(= \int_0^1 \phi(H(x))^2 W(x)dx,$ volgens l'Hospital.)

Ons toon vervolgens die optimaliteit van W = h aan. Vooraf gee ons egter net een resultaat wat ons sal nodig kry.

<u>Lemma 5.5:</u> Laat $K(x, y) \in L_2$ 'n simmetriese kern wees met eiewaardes $\rho_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, waarby $\rho_1 > \rho_k$, $k = 2, 3, \ldots$

Dan geld dat

$$\rho_1 = \sup_{\{g \mid \int_0^1 g^2 = 1\}} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) g(x) g(y) dx dy.$$

Bewys: Sien Tricomi (1957) Bl. 118.

Laat nou $F_\theta(x) = \Phi(x + \theta)$, d. w. s. beskou skuif alternatiewes. Ons kry dan die volgende belangrike stelling:

Stelling 5. 7: Vir alle W waarvoor $Q_n^{(W)}$ voldoen aan (01) en (02) geld dat:

$$\lim_{\theta \to 0} c^{(W)}(\theta)/c^{(h)}(\theta) \leq 1.$$

Bewys: Let op dat volgens die vorige paragraaf voldoen Q_n aan (01) met $\rho_1^{(h)} = 1$ en:

$$b^{(h)}(\theta) = \int_0^1 (\Phi(H(x) - \theta) - x)^2 h(x) dx.$$

Ook is dit duidelik dat (02) bevredig word, sodat:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{b^{(h)}\theta}{\theta^2} = \int_0^1 \phi(H(x))^2 h(x) dx = 1.$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{c^{(h)}(\theta)}{\theta^2} = 1.$$

Gestel nou $Q_n^{(W)}$ voldoen aan (01) en (02) dan geld:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{c^{(W)}(\theta)}{c^{(h)}(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{c^{(W)}(\theta)}{\theta^2} \cdot \frac{\theta^2}{c^{(h)}(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{c^{(W)}(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \frac{\int_0^1 \phi(H(x))^2 W(x) dx}{\sup_{\{g \mid \int_0^1 g^2 = 1\}} \int_0^1 \int_0^1 c^{(W)}(x, y) g(x) g(x) dx dy}$$

$$= \frac{\int_0^1 \phi(H(x))^2 W(x)dx}{\sup\limits_g \int_0^1 W(u)(\int_0^1 \psi(x, u)g(x)dx)^2 du}.$$

Indien $g(x) = g_1(x)$, die eerste genormaliseerde Hermitiese polinoom in die punt $H(x)$, dan volg dat

$$\int_0^1 \psi(x, u)g(x)dx = (-1)\phi(H(u))g_o(u)$$

$$= (-1)\phi(H(u)). \qquad \text{(Sien paragraaf 4.1.)}$$

$$\therefore \int_0^1 W(u)(\int_0^1 \psi(x, u)g(x)dx)^2 du$$

$$= \int_0^1 \phi(H(u))^2 W(u)du.$$

$$\therefore \sup_g \int_0^1 W(u)(\int_0^1 \psi(x, u)g(x)dx)^2 du \geq \int_0^1 \phi(H(u))^2 W(u)du.$$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{c^{(W)}(\theta)}{c^{(h)}(\theta)} \leq \frac{\int_0^1 \phi(H(x))^2 W(x)dx}{\int_0^1 \phi(H(u))^2 W(u)du}$$

$$= 1.$$

Die stelling geld dus.

5.4 VERGELYKING VAN $Q_n^{(W)}$ MET ANDER TOETSSTATISTIEKE

Ons sal in hierdie paragraaf $Q_n^{(h)}$ en $Q_n^{(1)}$ t.o.v. benaderde hellings ver=gelyk met 'n paar bekende toetsstatistieke vir die enkelvoudige geval. Die toets=statistieke wat ons sal beskou is die volgende:

(a) Die Kolmogorov-Smirnov (K-S) toetsstatistiek,

(b) die Watson toetsstatistiek, en

(c) die Cramer-Smirnov toetsstatistiek W_n^2 met gewigsfunksie $W(x) = {}^1/_{x(1-x)}$ (sien hoofstuk 1).

(Vir die definisies van (a) en (b) sien Abrahamson (1965)).

Ons beskou net skuif- en skaal alternatiewes:

(i) Skuif alternatiewes

Laat $c_1(\theta)$ en $c_2(\theta)$ respektiewelik die hellings van $Q_n - a_n$ en $Q_n^{(1)}$ wees, dan is:

$$c_1(\theta) = \int_0^1 (\Phi(H(x) - \theta) - x)^2 h(x)dx \text{ en:}$$

$$c_2(\theta) = \pi^2 \int_0^1 (\Phi(H(x) - \theta) - x)^2 dx.$$

Volgens Abrahamson (1965) het ons vir die K-S statistiek dat:

$$c_3(\theta) = 4 \sup_x |\Phi(x + \theta) - \Phi(x)|^2$$

en vir die Watson statistiek dat:

$$c_4(\theta) = 4\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x + \theta) - \Phi(x))^2 d\Phi(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(x + \theta) - \Phi(x))d\Phi(x)\right)^2\right).$$

Uit Anderson en Darling (1952) volg nou ook maklik dat vir W_n^2 met gewigs=funksie soos hierbo is:

$$c_5(\theta) = 2 \int_0^1 (\Phi(H(x) - \theta) - x)^2 \cdot \frac{dx}{x(1 - x)} .$$

Hieruit volg nou dat:

$$L_{12} = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_2(\theta)}$$

$$= \frac{1}{\pi^2 (2\pi)^{-1} 3^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 1,1026 > 1,$$

sodat Q_n beter is as $Q_n^{(1)}$, wat natuurlik so moet wees volgens stelling 5. 7.

$$L_{13} = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_3(\theta)}$$

$$= \frac{1}{4 \sup_x \phi(x)^2} = \frac{1}{4(2\pi)^{-1}}$$

$$= 1,5708 > 1.$$

Q_n is dus beter as die K-S statistiek.

$$L_{14} = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_4(\theta)}$$

$$= [4\pi^2(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^3 dx - (\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^2 dx)^2)]^{-1}$$

$$= [4\pi^2((2\pi)^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} - ((2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}})^2)]^{-1}$$

$$= 2,0576 > 1.$$

Q_n is dus beter as die Watson statistiek.

$$L_{15} = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_5(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2 \int_0^1 \phi(H(x))^2 \frac{dx}{x(1-x)}} .$$

Indien die integraal in bostaande numeries bepaal word, vind ons dat:

$$L_{15} \doteq \frac{1}{2(0,48056)} = 1,0404.$$

Ons sien dus dat Q_n en W_n^2 in hierdie geval ongeveer ewe doeltreffend is. Op soortgelyke wyse kan $Q_n^{(1)}$ met die ander statistieke vergelyk word. Ons gee die resultate in die volgende tabel weer.

TABEL 5. 4. 1 VERGELYKING IN DIE GEVAL VAN SKUIF ALTERNATIEWES

	Q_n	$Q_n^{(1)}$	K-S	Watson	W_n^2
Q_n	1,00	1,10	1,57	2,06	1,04
$Q_n^{(1)}$	1,10	1,00	1,42	1,87	0,94

(ii) Skaal Alternatiewes

Laat $H_o : F(x) = \Phi(x)$ en $H_1 : F(x) = \Phi(\theta x)$. In hierdie geval is dan:

$$c_1(\theta) = \int_0^1 (\Phi(\theta^{-1}H(x)) - x)^2 h(x)dx$$

$$c_2(\theta) = \int_0^1 (\Phi(\theta^{-1}H(x)) - x)^2 dx$$

$$c_3(\theta) = 4 \sup_x |\Phi(\theta^{-1}x) - \Phi(x)|^2$$

$$c_4(\theta) = 4\pi^2 (\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(\theta^{-1}x) - \Phi(x))^2 d\Phi(x) - (\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(\theta^{-1}x) - \Phi(x))d\Phi(x))^2)$$

en:

$$c_5(\theta) = 2\int_0^1 (\Phi(\theta^{-1}H(x)) - x)^2 \frac{dx}{x(1-x)} .$$

Gaan ons nou te werk soos hierbo dan kan ons die volgende tabel opstel.

TABEL 5. 4. 2 VERGELYKING IN DIE GEVAL VAN SKAAL ALTERNATIEWES

	Q_n	$Q_n^{(1)}$	K-S	Watson	W_n^2
Q_n	1,00	3,31	4,27	0,83	1,83
$Q_n^{(1)}$	3,31	1,00	1,29	0,25	0,56.

Ons sien hier dat net die Watson statistiek beter vaar as Q_n. Hierdie statistiek is egter nie in die klas wat ons in die vorige paragraaf beskou het nie. Die vermoede bestaan nou wel dat Q_n ook in die geval van skaal alternatiewes die beste binne daardie klas is, maar ons kon dit tot dusver nog nie bewys nie. Ons kon slegs aantoon dat $\lim_{\theta \to 0} c^{(W)}(\theta)/\theta^2 \leq 2$ terwyl vir $W = h$ is $\lim_{\theta \to 0} c^{(h)}(\theta)/\theta^2 = 1$. Ons kon in elk geval ook nog geen W vind waarvoor $\lim_{\theta \to 0} c^{(W)}(\theta)/\theta^2 > 1$. Ons vermoed dat die bogrens 2 deur 1 vervang kan word, sodat $W = h$ ook hier optimaal is.

HOOFSTUK 6

MAGSTUDIE IN DIE GEVAL VAN BEPAALDE KLASSE VAN ALTERNATIEWES

6.1 DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN DIE TOETSSTATISTIEK ONDER ALTERNATIEWE HIPOTESES

Laat $H_o : F = \Phi$ en beskou as alternatiewe hipoteses $H_1 : F_n^{-1} = H + n^{-\frac{1}{2}}G_n$, waar G_n 'n funksie op (0, 1) is wat só gekies moet word dat F_n 'n distribusie=funksie is. In hoofstuk 3 het ons gesien dat $\Sigma_j(X_{jn} - H_{jn})^2$ gebruik kan word as toetsstatistiek vir H_o. Onder H_o is aangetoon hoedat ons die asimptotiese verde=ling van hierdie statistiek kan vind. In hierdie hoofstuk sal ons ondersoek instel na die asimptotiese verdeling van hierdie statistiek indien H_1 waar is. Ons sal ook die asimptotiese mag bepaal in die geval van skuif en skaal alternatiewes.

Nou, onder H_1 is:

$$X_{jn} = F_n^{-1}(U_{jn})$$
$$= H(U_{jn}) + n^{-\frac{1}{2}} G_n(U_{jn}).$$

Die toetsstatistiek word in hierdie geval dus:

$$L_{1n} = \Sigma_j(X_{jn} - H_{jn})^2$$
$$= \Sigma_j(H(U_{jn}) - H_{jn} + n^{-\frac{1}{2}} G_n(U_{jn}))^2$$
$$= \Sigma_j(H(U_{jn}) - H_{jn})^2 + n^{-1} \Sigma_j G_n(U_{jn})^2 + 2n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_j(H(U_{jn}) - H_{jn})G_n(U_{jn}).$$

Pas ons 'n Taylor ontwikkeling toe op $H(U_{jn})$ en $G_n(U_{jn})$ dan is:

$$H(U_{jn}) - H_{jn} = V_{jn}H'_{jn} + \tfrac{1}{2}V_{jn}^2 H''(U_{jn}^*)$$

$$G_n(U_{jn}) = G_n({}^j/_{n+1}) + V_{jn}\, G'_n(U_{jn}^{**})$$

met U^*_{jn} en U^{**}_{jn} tussen U_{jn} en $^j/_{n+1}$. (Ons neem aan dat G_n minstens 'n eerste orde afgeleide besit.) Die laaste term van L_{1n} word dus m. b. v. hierdie ontwikkelings:

$$2n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_j(V_{jn}H'_{jn} + \tfrac{1}{2}V^2_{jn}H''(U^*_{jn}))(G_n(^j/_{n+1}) + V_{jn}G'_n(U^{**}_{jn}))$$

$$= 2n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_j V_{jn}H'_{jn}G_n(^j/_{n+1}) + n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_j V^2_{jn}H''(U^*_{jn})G_n(^j/_{n+1}) + 2n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_j V^2_{jn}H'_{jn}G'_n(U^{**}_{jn})$$

$$+ n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_j V^3_{jn}H''(U^*_{jn})G'_n(U^{**}_{jn})$$

$$= 2n^{-\frac{1}{2}}\Sigma_j V_{jn}H'_{jn}G_{jn} + R_{1n} + R_{2n} + R_{3n}$$

$$= L^*_n + R_{1n} + R_{2n} + R_{3n} \qquad \text{(sê).}$$

Let nou op dat die eerste term van L_{1n} bloot L_n van paragraaf 3. 1 is. Let ook op dat indien $G_n \to G$ as $n \to \infty$, sou ons verwag dat vir 'n redelike wye klas funksies G_n geld:

$$|n^{-1}\Sigma_j G_n(U_{jn})^2 - \int_0^1 G(x)^2dx| = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Ons kan nou skryf:

$$L_{1n} = L_n + L^*_n + n^{-1}\Sigma_j G_n(U_{jn})^2 + R_{1n} + R_{2n} + R_{3n}.$$

Soos in hoofstuk 3 volg:

$$L_n = \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)^2(n+1)^{-1}\sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ijn+1} Z_iZ_j + R_{4n},$$

waar $R_{4n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Pas ons die tegniek van paragraaf 1. 3 op L^*_n toe, dan volg dat:

$$L^*_n = \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)(n+1)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n+1} d_{in+1} Z_i,$$

met S_n en $\{Z_i\}$ soos in paragraaf 1. 3, terwyl:

$$d_{in+1} = 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}(n+1)^{-1}\sum_{k=1}^{n} \psi_{ikn}H'_{kn}G_n\left(\frac{k}{n+1}\right).$$

Dus volg dat:

$$L_{1n} = \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)^2 \left[(n+1)^{-1} \sum_{i,j} c_{ijn+1} Z_i Z_j + (n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in+1} Z_i \right] + n^{-1} \Sigma_j G_n(U_{jn})^2$$

$$+ \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{n+1}{S_{n+1}}\right)(n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in+1} Z_i + R_{1n} + R_{2n} + R_{3n} + R_{4n}.$$

$$= \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)^2 T_{n+1} + n^{-1} \sum_j G_n(U_{jn})^2 + R_{1n} + R_{2n} + R_{3n} + R_{4n} + R_{5n}$$

waar: $T_n = n^{-1} \sum_{i,j} c_{ijn} Z_i Z_j + n^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in} Z_i$

en $R_{5n} = \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{n+1}{S_{n+1}}\right)(n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in+1} Z_i$.

Laat nou $\gamma_m = m^{-1}$ en $b_{imn} = g_m\left(\frac{i}{n+1}\right)$, soos in hoofstuk 4.

Stel ook:

$d(x) = 2 \int_0^1 \psi(x, y)H'(y)G(y)dy$, waar G sô is dat $G_n \to G$ as $n \to \infty$,

$\delta_m = \int_0^1 d(x)g_m(x)dx$, (sien die opmerking aan die einde van paragraaf 2. 3)

terwyl a_n soos in paragraaf 4. 7 gedefinieer word. Let op dat in die huidige geval is $a_n = ET_{n+1}$ (soos die geval ook in paragraaf 4. 7 was).

Beskou die volgende kondisies:

(M1) $R_{in} = o_p(1)$ as $n \to \infty$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

(M2) $|n^{-1} \Sigma_j G_n(U_{jn})^2 - I| = o_p(1)$ as $n \to \infty$, waar I 'n eindige konstante is.

(M3) $\{d_{in}\}$ en $\{\delta_m\}$ voldoen aan kondisies (D2), (BΔ1) en (DBΔ1) van stelling 2. 4.

Ons het dan die volgende:

<u>Stelling 6. 1</u>: Indien H_1 en kondisies (M1), (M2) en (M3) geld, dan sal:

$$D(L_{1n} - a_n) \to D\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m + I\right) \quad \text{as } n \to \infty.$$

Bewys: Met behulp van kondisie (M1) volg dat onder H_1 geld:

$$L_{1n} - a_n = (\frac{n+1}{S_{n+1}})^2 (T_{n+1} - a_n) + n^{-1} \Sigma_j G_n(U_{jn})^2 + a_n((\frac{n+1}{S_{n+1}})^2 - 1) + o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

In paragraaf 4.7 het ons aangetoon dat:

$$a_n((\frac{n+1}{S_{n+1}})^2 - 1) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty$$

terwyl volgens (M2) is:

$$n^{-1} \Sigma_j G_n(U_{jn})^2 = I + o_p(1) \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore L_{1n} - a_n = (\frac{n+1}{S_{n+1}})^2 (T_{n+1} - a_n) + I + o_p(1).$$

Uit paragraaf 4.2 - paragraaf 4.6 volg dat kondisies (B2), (C2), (BΓ1), (CBΓ1) en (BΓ2), van stelling 2.4, in die huidige geval bevredig word. Saam met (M3) gee stelling 2.4 dus:

$$D(T_{n+1} - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m) \quad \text{as } n \to \infty.$$

Die stelling volg nou direk hieruit.

Opmerking: Hierdie stelling stel ons dus in staat om in beginsel die asimptotiese mag van die toetsgrootheid binne 'n bepaalde klas van alternatiewes, te bepaal. Dit kan nl. gedoen word deur die karakteristieke funksie van die asimptotiese verdeling te bereken, en dan te probeer omkeer.

6.2 TOEPASSING IN DIE GEVAL VAN SKUIF EN SKAAL ALTERNATIEWES

As toepassing van die teorie van die vorige paragraaf beskou ons eerstens die geval van skuif alternatiewes, d.w.s. waar $G_n(x) \equiv 1$. Let op dat in hierdie geval kom die resterme R_{2n} en R_{3n} nie voor nie, terwyl vir $n \geq 1$ geld $n^{-1} \Sigma_j G_n(U_{jn})^2 = 1$, d.w.s. $I = 1$.

Vir die orige resterme het ons die volgende:

<u>Lemma 6.1</u>: As $n \to \infty$ geld dat $R_{in} = o_p(1)$ vir $i = 1, 4, 5$.

<u>Bewys</u>: (i) $R_{4n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$ volg uit hoofstuk 3, paragraaf 3.3.

(ii) $R_{1n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$ volg direk uit lemma 7.1, hoofstuk 7.

(iii) Beskou ten slotte R_{5n}, d.i.

$$R_{5n} = \left(\frac{n+1}{S_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{n+1}{S_{n+1}}\right)(n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in+1} Z_i.$$

Ons toon eerstens m.b.v. lemma a1 aan dat $n^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in} Z_i$ 'n asimptotiese ver= deling het.

Nou:

$$(n+1)^{-1} \sum_i d^2_{in+1} = 4\left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)^{-1} \sum_i \left((n+1)^{-2} \sum_{j,k} \psi_{ijn} \psi_{ikn} H'_{jn} H'_{kn}\right)$$

$$= 4\left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)^{-2} \sum_{j,k} H'_{jn} H'_{kn} \left((n+1)^{-1} \sum_i \psi_{ijn} \psi_{ikn}\right)$$

$$= 4\left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)^{-2} \sum_{j,k} H'_{jn} H'_{kn} T_{jkn}$$

met $T(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{vir } x \leq y \\ y(1-x) & \text{vir } x \geq y. \end{cases}$

In paragraaf 8.2.1 sal ons aantoon dat:

$$(n+1)^{-2} \sum_{j,k} H'_{jn} H'_{kn} T_{jkn} \to \int_0^1 \int_0^1 H'(x) H'(y) T(x, y) dx dy = 1, \text{ as } n \to \infty.$$

$$\therefore \ (n+1)^{-2} \sum_i d^2_{in+1} \to 4 \text{ as } n \to \infty.$$

Ook is:

$$n^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} |d_{in}| \leq 2\, O(1) n^{-3/2} \max_i \sum_{j=1}^{n-1} H'_{jn-1} |\psi_{ijn-1}|$$

$$\leq O(1) n^{-3/2} \max_i \left(\sum_{j=1}^{i} ({}^{j}/_{n}) H'_{jn-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (1 - {}^{j}/_{n}) H'_{jn-1}\right)$$

$$= O(1)\, n^{-3/2} \left(\sum_j (^j/_n) H'_{jn-1} + \sum_j (1 - {}^j/_n) H'_{jn-1} \right).$$

Laat nou $0 < \delta < \frac{1}{2}$ en beskou:

$$n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} (^j/_{n+1}) H'_{jn} = n^{-3/2} \sum_{j=1}^{[n(1-\delta)]} (^j/_{n+1}) H'_{jn} + n^{-3/2} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} (^j/_{n+1}) H'_{jn}$$

$$= R_{1n}(\delta) + R_{2n}(\delta) \qquad \text{(sê).}$$

Dit is duidelik dat $R_{1n}(\delta) = o(1)$ as $n \to \infty$, want die funksie $xH'(x)$ is begrensd op $[0,\ 1 - \delta]$. Vir $R_{2n}(\delta)$ het ons m. b. v. lemma 3. 2 dat:

$$R_{2n}(\delta) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) n^{-\frac{1}{2}} \sum_j (1 - {}^j/_{n+1}) H'_{jn} (n + 1 - j)^{-1} \leq O(1)\, n^{-\frac{1}{2}} \sum_j H_{jn}^{-1} (n + 1 - j)^{-1}$$

$$= O(1)\, n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} |H(1 - {}^j/_{n+1})|^{-1} (n + 1 - j)^{-1} \leq O(1)\, n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{[n\delta]+2} j^{-1} |H_{jn}|^{-1}$$

$$\leq O(1) \left|H\left(\frac{[n\delta]+2}{n+1}\right)\right|^{-1} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} j^{-1}$$

$= o(1)$ volgens lemma a4.

$\therefore\ R_{2n}(\delta) = o(1)$ as $n \to \infty$

$\therefore\ n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} (^j/_{n+1}) H'_{jn} = o(1)$ as $n \to \infty$.

Uit simmetrie volg ook dat

$$n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} (1 - {}^j/_{n+1}) H'_{jn} = o(1) \text{ as } n \to \infty$$

$\therefore\ n^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} |d_{in}| = o(1)$ as $n \to \infty$.

Pas ons nou lemma a1 toe, dan volg dus dat:

$$D(n^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in} Z_i) \to N(0,\ 4), \text{ as } n \to \infty$$

$\therefore n^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in} Z_i = O_p(1)$ as $n \to \infty$.

Maar ons weet dat ${}^{n+1}/_{S_{n+1}} = 1 + o_p(1)$ as $n \to \infty$, en die lemma volg dus.

Kondisie (M1) geld dus. Ons het reeds gesien dat kondisie (M2) geld met $I = 1$. Beskou ten slotte dus kondisie (M3). Hiervoor moet ons eers die getalle $\{\delta_m\}$ vind.

Nou is:

$$d(x) = 2 \int_0^1 \psi(x, y) H'(y) dy,$$

en hieruit kan ons dan $\{\delta_m\}$ bepaal as:

$$\begin{aligned}
\delta_m &= \int_0^1 d(x) g_m(x) dx \\
&= 2 \int_0^1 g_m(x) \left(\int_0^1 \psi(x, y) H'(y) dy \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 H'(y) \left(\int_0^1 \psi(x, y) g_m(x) dx \right) dy.
\end{aligned}$$

Uit paragraaf 4.1 volg egter dat:

$$\int_0^1 \psi(x, y) g_m(x) dx = -m^{-\frac{1}{2}} g_{m-1}(y) \phi(H(y)).$$

Met behulp van die ortonormaliteit van die $\{g_m(x)\}$ volg dus dat:

$$\begin{aligned}
\delta_m &= -2m^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 g_{m-1}(y) dy \\
&= -2m^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 g_0(y) g_{m-1}(y) dy \quad (g_0 \equiv 1) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ vir } m > 1 \\ -2 \text{ vir } m = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_n^* = \sum_{m=1}^{k_n} |\delta_m| = 2, \text{ vir } k_n = 1, 2, \ldots.$$

Uit paragraaf 4.4 volg dus direk dat kondisie (BΔ1) bevredig word. Uit die bewys van lemma 6.1 volg ook dat:

$$n^{-1}\sum_i d_{in}^2 \to 4 = \delta_1^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^2, \text{ as } n \to \infty,$$

sodat kondisie (D2) bevredig word. Vir kondisie (DBΔ1) moet ons aantoon dat:

$$\max_{1 \leq m \leq k_n} |n^{-1} \sum_i d_{in} b_{imn} - \delta_m| = o(1) \text{ as } n \to \infty$$

d. w. s. $|n^{-1} \sum_i d_{in} b_{i1n} + 2| = o(1)$

en $\max_{2 \leq m \leq k_n} |n^{-1} \sum_i d_{in} b_{imn}| = o(1) \quad \text{as } n \to \infty.$

Die tweede deel volg direk uit paragraaf 8. 2. 2, terwyl die eerste deel analoog hieraan bewys kan word en ons sal dit nie hier herhaal nie. Kondisie (DBΔ1) geld dus.

Hieruit volg dan dat kondisie (M3) geld, en ons konkludeer uit stelling 6. 1 die volgende:

Stelling 6. 2: Indien $H_1 : F_n(x) = \Phi(x - n^{-\frac{1}{2}})$ waar is, dan geld dat:

$$D(L_{1n} - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - 2Y_1 + 1) \text{ as } n \to \infty.$$

Opmerking: Stelling 6. 2 stel ons dus in staat om in die geval van skuif alternatiewes die asimptotiese mag van die toetsgrootheid te bepaal, en ons sal dit in die volgende paragraaf doen.

As 'n tweede toepassing van die teorie van die vorige paragraaf beskou ons die geval van skaal alternatiewes, d. w. s. waar $G_n(x) = H(x)$.

Die konvergensie van die resterme volg analoog aan die vorige geval. Ook sal maklik volg dat:

$$|n^{-1} \sum_j H(U_{jn})^2 - \int_0^1 H(x)^2 dx| = o_p(1) \quad \text{as } n \to \infty$$

d.w.s. $|n^{-1} \Sigma_j H(U_{jn})^2 - 1| = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

In hierdie geval is:

$$d(x) = 2 \int_0^1 \psi(x, y) H'(y) H(y) dy$$

$$\therefore \delta_m = \int_0^1 d(x) g_m(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 H(y) H'(y) \left(\int_0^1 \psi(x, y) g_m(x) dx \right)$$

$$= -2m^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 H(y) g_{m-1}(y) dy \qquad \text{(Sien paragraaf 4.1.)}$$

$$= -2m^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 g_1(y) g_{m-1}(y) dy$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{as } m \neq 2 \\ -\sqrt{2} & \text{as } m = 2 \end{cases}$$

$\therefore \delta_2 = -\sqrt{2}$ en $\delta_m = 0$ vir $m \neq 2$.

Ons kry dan die volgende:

Stelling 6.3: Indien $H_1 : F_n(x) = \Phi((1 + n^{-\frac{1}{2}})^{-1} x)$ waar is, dan geld dat:

$$D(L_{1n} - a_n) \to D\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - \sqrt{2} Y_2 + 1 \right) \text{ as } n \to \infty.$$

Bewys: Die bewys volg analoog aan dié van stelling 6.2 en ons sal dit nie herhaal nie.

Opmerkings:

1. Hierdie stelling stel ons dus in staat om die asimptotiese mag in die geval van skaal alternatiewes te vind, en ons sal dit in die volgende paragraaf bereken.
2. Laat weer $H_o : F = \Phi$ en $H_1 : F_n(x) = \Phi(x - n^{-\frac{1}{2}})$ en beskou die statistiek $\Sigma_j (\Phi(X_{jn}) - {}^j/_{n+1})^2 h_{jn}$. Onder H_o reduseer dit na Q_n, terwyl dit onder H_1 word:

$$Q_{1n} = \Sigma_j (\Phi(X_{jn}) - {}^j/_{n+1})^2 h_{jn}$$

$$= \Sigma_j (\Phi(F_n^{-1}(U_{jn})) - {}^j/_{n+1})^2 h_{jn}$$

$$= \Sigma_j (\Phi(H(U_{jn}) + n^{-\frac{1}{2}}) - {}^j/_{n+1})^2 h_{jn}.$$

Volgens Taylor kan ons nou skryf dat:

$$\Phi(H(U_{jn}) + n^{-\frac{1}{2}}) = \Phi(H(U_{jn})) + n^{-\frac{1}{2}} \phi(H(U_{jn})) + \frac{n^{-1}}{2!} \phi'(U^*_{jn})$$

waar U^*_{jn} tussen $H(U_{jn}) + n^{-\frac{1}{2}}$ en $H(U_{jn})$ lê. Vervang ons hierdie in bostaande en kwadreer uit dan is dus:

$$Q_{1n} = \Sigma_j V^2_{jn} h_{jn} + 2n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_j V_{jn} \phi(H(U_{jn}))h_{jn} + n^{-1} \Sigma_j \phi(H(U_{jn}))^2 h_{jn} + R_n.$$

Nou volg geredelik, m.b.v. die tegnieke tevore ontwikkel, dat $R_n = o_p(1)$ as $n \to \infty$ terwyl ook:

$n^{-1} \Sigma_j \phi(H(U_{jn}))^2 h_{jn} = 1 + o_p(1)$ as $n \to \infty$ en:

$$2n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_j V_{jn} \phi(H(U_{jn}))h_{jn}$$

$$= 2n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_j V_{jn} H'_{jn} + o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Ons vind dus dat:

$$Q_{1n} = \Sigma_j V^2_{jn} h_{jn} + 2n^{-\frac{1}{2}} \Sigma_j V_{jn} H'_{jn} + o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Behalwe vir die resterme is hierdie egter presies die uitdrukking wat ons hierbo vir L_{1n} gehad het (in die geval van skuif alternatiewes). Ons konkludeer, dus uit stel=ling 6.2 dat:

$$D(Q_{1n} - a_n) \to D(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - 2Y_1 + 1) \text{ as } n \to \infty.$$

3. Op soortgelyke wyse volg, uit stelling 6. 3, dat in die geval van skaal alter= natiewes:

$$D(Q_{1n} - a_n) \to D\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - \sqrt{2}Y_2 + 1\right) \text{ as } n \to \infty.$$

6. 3 MAGSBEPALING

Laat $X_1, X_2, \ldots,$ 'n ry van onafhanklike en identies verdeelde stogastiese veranderlikes wees met distribusiefunksie F, en gestel ons wil die hipotese $H_o : F = F_o$ toets. Laat $T_n = T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 'n ry van toetsstatistieke vir H_o wees en gestel $\lim_{n\to\infty} P(T_n \leq t \mid H_o) = G_o(t)$. Beskou as alternatiewe hipoteses die ry $H_1 : F = F_n$, waar $F_n \to F_o$ as $n \to \infty$. Gestel voorts dat $\lim_{n\to\infty} P(T_n \leq t \mid H_1) = G_1(t)$.

Laat nou t_α só wees dat $1 - G_o(t_\alpha) = \alpha$, d. w. s. t_α is die kritieke waarde vir 'n toets van grootte α. In hierdie geval word die asimptotiese mag dan gegee deur $1 - G_1(t_\alpha)$.

Ons sal in hierdie paragraaf die asimptotiese mag van die statistiek L_{1n} (en dus van Q_{1n}) in die geval van skuif en skaal alternatiewes bepaal. Ons sal, soos in paragraaf 4. 8, die distribusiefunksie bereken deur die karakteristieke funksie om te keer.

Beskou nou die stogastiese veranderlike:

$$Y^* = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m Y_m + c,$$

met c 'n konstante. Ons sal hieronder die karakteristieke funksie van Y* bepaal. Let op dat die stogastiese veranderlikes wat in stellings 6. 2 en 6. 3 in die limiet op= tree, spesiale gevalle hiervan is.

Laat nou $\varphi^*(t)$ die karakteristieke funksie van Y^* wees. Dan is:

$$\varphi^*(t) = Ee^{itY^*}$$

$$= e^{itc} \prod_{m=1}^{\infty} Ee^{it(m^{-1}Y_m^2 - m^{-1} + \delta_m Y_m)}.$$

Beskou dus:

$$Ee^{it(m^{-1}Y^2 - m^{-1} + \delta_m Y)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(m^{-1}y^2 - m^{-1} + \delta_m y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \exp[-\tfrac{1}{2} \cdot \frac{t^2\delta_m^2}{1-2it/m} - it/m] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\tfrac{1}{2}(1 - 2it/m)(y - \frac{it\delta_m}{1-2it/m})^2]dy$$

$$= (1 - 2it/m)^{-\frac{1}{2}}\exp[-\tfrac{1}{2} \cdot \frac{t^2\delta_m^2}{1 - 2it/m} - it/m]$$

$$\therefore \varphi^*(t) = e^{itc} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 2it/m)^{-\frac{1}{2}}\exp[-\tfrac{1}{2} \cdot \frac{t^2\delta_m^2}{1 - 2it/m} - it/m].$$

Laat voorts $r(t)$ en $\theta(t)$ soos in paragraaf 4. 8 wees, en gestel:

$$\varphi^*(t) = r^*(t)e^{i\theta^*(t)}.$$

Nou is:

$$(1 - 2it/m)\exp[\frac{t^2\delta_m^2}{1 - 2it/m} + 2it/m]$$

$$= (1 + 4t^2/m^2)^{\frac{1}{2}} e^{-i\tan^{-1}2t/m} \cdot \exp[\frac{t^2\delta_m^2}{1 + 4t^2/m^2}(1 + 2it/m) + 2it/m]$$

$$\therefore \varphi^*(t) = \prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2\delta_m^2}{1+4t^2/m^2}} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} (1 + 4t^2/m^2)^{-1/4}$$

$$\exp[\frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (\tan^{-2} 2t/m - 2t/m - 2t/m \cdot \frac{t^2\delta_m^2}{1 + 4t^2/m^2}) + ict]$$

$$\therefore r^*(t) = r(t) \prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2\delta_m^2 (m^2)/(4t^2 + m^2)}$$

$$\text{en } \theta^*(t) = \theta(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mt^3\delta_m^2}{4t^2 + m^2} + ct.$$

Beskou nou die geval van skuif alternatiewes (sien stelling 6. 2) en gestel die karakteristieke funksie en distribusiefunksie van die asimptotiese verdeling is respektiewelik φ_1 en F_1. In hierdie geval is:

$\delta_1 = -2,\ \delta_m = 0,\ m = 2, 3, \ldots,$ terwyl $c = 1$.

Ons het dan dat:

$$\varphi_1(t) = r_1(t)e^{i\theta_1(t)}$$

met $r_1(t) = r(t)e^{-2t^2/1+4t^2}$

en $\theta_1(t) = \theta(t) + t - 4t^3/1+4t^2$.

Let op dat soos in paragraaf 4. 8 is:

$$r_1(-t) = r_1(t) \text{ en } \theta_1(-t) = -\theta_1(t).$$

$$\therefore\ F_1(y) - F_1(o) = \frac{1}{\pi}\int_o^{\infty} r_1(t)/t\ (\sin\theta_1(t) + \sin(ty - \theta_1(t)))dt.$$

Hieruit kan $F_1(y)$ en die asimptotiese mag dus gevind word. In tabel 6. 3. 1 word die asimptotiese mag gegee by verskillende keuses van α, die grootte van die toets.

Beskou vervolgens die geval van skaal alternatiewes (sien stelling 6. 3) en gestel die karakteristieke funksie en distribusiefunksie van die asimptotiese verde= ling is respektiewelik φ_2 en F_2. Soos hierbo volg dan dat indien $\varphi_2(t) = r_2(t)e^{i\theta_2(t)}$, dan is:

$$r_2(t) = r(t)e^{-t^2/1 + t^2}$$

en $$\theta_2(t) = \theta(t) + t - t^3/1+t^2$$

$$\therefore \quad F_2(y) - F_2(o) = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty r_2(t)/t(\sin \theta_2(t) + \sin(ty - \theta_2(t)))dt.$$

Hieruit kan $F_2(y)$ en die asimptotiese mag dus gevind word. In tabel 6.3.1 word die asimptotiese mag gegee by verskillende keuses van α.

TABEL 6.3.1 ASIMPTOTIESE MAG IN DIE GEVAL VAN SKUIF EN SKAAL ALTERNATIEWES

	Asimptotiese mag	
α	Skuif Alternatiewes	Skaal Alternatiewes
0,20	0,3622	0,3876
0,15	0,3033	0,3173
0,10	0,2359	0,2359
0,05	0,1527	0,1371
0,01	0,0538	0,0342

Hierdie magte kan ons nou gebruik om Q_n en L_n met ander toetsstatistieke te vergelyk in die geval van skuif en skaal alternatiewes.

HOOFSTUK 7

'N TOETSSTATISTIEK VIR DIE SAMEGESTELDE GEVAL EN REDUKSIE DAARVAN TOT 'N KWADRATIESE VORM

7.1 DIE TOETSSTATISTIEK VIR DIE SAMEGESTELDE GEVAL

Ons gaan in hierdie hoofstuk ondersoek instel na 'n bepaalde toets=statistiek vir die hipotese $H_o : F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, waar μ en $\sigma > 0$ onbekend is.

Laat nou $G_{\mu,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ en dui die rangorde statistieke van ons gegewe steekproef aan deur $X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{nn}$. As toetsgrootheid vir H_o kan ons nou soos in paragraaf 3.1 X_{in} vergelyk met $G^{-1}_{\mu,\sigma}(i/_{n+1})$. As toetsstatistiek kan ons dan bv. gebruik: (sien Venter (1968))

$$\inf_{\mu,\sigma} n^{-1} \sum_i (X_{in} - G^{-1}_{\mu,\sigma}(i/_{n+1}))^2.$$

Nou is: $G^{-1}_{\mu,\sigma}(y) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(y)$

$$= \mu + \sigma H(y)$$

Ons toetsstatistiek word dan:

$$\inf_{\mu,\sigma} n^{-1} \sum_i (X_{in} - \mu - \sigma H_{in})^2 = s^2_n(1 - r^2_n)$$

waar $s^2_n = n^{-1} \sum_i (X_{in} - \overline{X}_n)^2$

en:
$$r_n = \frac{n^{-1} \sum_i X_{in} H_{in}}{s_n t_n}$$

met $t^2_n = n^{-1} \sum_i H^2_{in}$.

Hierdie statistiek is egter nie sonder meer geskik as toetsgrootheid nie; ons sou minstens 'n skaal en translasie invariante statistiek verkies. Die eenvou= digste wysiging om dit te bereik is weglating van die faktor s_n^2. As toetsstatistiek vir die samegestelde geval kom ons dus uit by r_n. Ons sal in hierdie hoofstuk aan= toon hoedat r_n geskryf kan word as 'n kwadratiese vorm plus 'n resterm, wat ons sal aantoon gaan na nul. In die volgende hoofstuk sal ons aantoon dat stelling 2.4 op hierdie kwadratiese vorm van toepassing is, sodat die asimptotiese verdeling van r_n (onder H_o) gekarakteriseer kan word.

Opmerkings: (i) Let op dat r_n bloot die korrelasie koëffisiënt is tussen X_{in} en H_{in}, $i = 1, \ldots, n$, sodat volg dat $-1 \leq r_n \leq 1$.

Volgens stelling 2, bl. 83 in van der Watt (1968) geld dat:

$$D((2n)^{\frac{1}{2}}(n^{-1} \sum_i X_{in}H_{in} - 1)) \rightarrow N(0, 1) \text{ as } n \rightarrow \infty. \text{ (Ons neem } \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1.)$$

$$\therefore n^{-1} \sum_i X_{in}H_{in} - 1 = o_p(1) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

In paragraaf 8.3 sal ons ook aantoon dat $s_n^2 t_n^2 - 1 = o_p(1)$ as $n \rightarrow \infty$. Dit volg dus uit die definisie van r_n dat $r_n - 1 = o_p(1)$ as $n \rightarrow \infty$ (onder H_o). 'n Toets vir H_o sal dus verwerp indien r_n te ver links van een lê.

(ii) In van der Watt (1968) word daar 'n effens verskillende motivering vir die gebruik van r_n as toetsstatistiek gegee.

(iii) In dit wat volg sal ons deurgaans aanneem dat H_o waar is.

7.2 REDUKSIE VAN r_n NA 'N KWADRATIESE VORM PLUS 'N RESTERM

Ons toon nou aan hoedat r_n geskryf kan word in 'n vorm waarop die algemene teorie van hoofstuk 2 van toepassing is.

Aangesien r_n invariant is onder skaal en translasie transformasies, sal ons sonder verlies aan algemeenheid in dit wat volg aanneem dat $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. Ontwikkel ons $H(U_{in})$ in 'n Taylor reeks om $^i/_{n+1}$, dan is:

$$
\begin{aligned}
X_{in} &= H_{in} + X_{in} - H_{in} \\
&= H_{in} + H(U_{in}) - H_{in} \\
&= H_{in} + V_{in} H'_{in} + \tfrac{1}{2} V^2_{in} H''(U^*_{in}) \\
&= H_{in} + V_{in} H'_{in} + e_{in} \quad \text{(sê)},
\end{aligned}
$$

waar U^*_{in} tussen U_{in} en $^i/_{n+1}$ lê. Die teller van r_n word dus:

$$
\begin{aligned}
&n^{-1} \sum_i H^2_{in} + n^{-1} \sum_i V_{in} H_{in} H'_{in} + n^{-1} \sum_i e_{in} H_{in} \\
&= t^2_n + w_n + v_n \quad \text{(sê)}.
\end{aligned}
$$

Ook is:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_n &= n^{-1} \sum_i X_{in} \\
&= n^{-1} \sum_i (H(U_{in}) - H_{in}) \\
&= n^{-1} \sum_i V_{in} H'_{in} + n^{-1} \sum_i e_{in},
\end{aligned}
$$

soos hierbo m.b.v. Taylor.

$$
\begin{aligned}
\therefore\ s^2_n &= n^{-1} \sum_i X^2_{in} - \overline{X}^2_n \\
&= n^{-1} \sum_i (H_{in} + V_{in} H'_{in} + e_{in})^2 - \overline{X}^2_n \\
&= t^2_n + 2w_n + n^{-1} Q_n + R_n - \overline{X}^2_n
\end{aligned}
$$

waar soos in paragraaf 3. 1 $Q_n = Q_n^{(h)}$, en

$R_n = n^{-1} \sum_i e_{in}^2 + 2n^{-1} \sum_i e_{in}(H_{in} + V_{in}H'_{in})$

$\therefore\ s_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) = s_n^2 t_n^2 - (n^{-1} \sum_i X_{in}H_{in})^2$

$$= s_n^2 t_n^2 - (t_n^2 + w_n + v_n)^2$$

$$= t_n^2(t_n^2 + 2w_n + n^{-1}Q_n + R_n - \overline{X}_n^2) - (t_n^2 + w_n + v_n)^2$$

$$= t_n^4 + 2w_n t_n^2 + n^{-1}Q_n t_n^2 + R_n t_n^2 - \overline{X}_n^2 t_n^2 - t_n^4 - w_n^2 - v_n^2 - 2w_n t_n^2 - 2v_n t_n^2$$

$$- 2w_n v_n$$

$$= t_n^2(n^{-1} Q_n - \overline{X}_n^2) - w_n^2 + R_{1n}$$

met $R_{1n} = R_n t_n^2 - v_n^2 - 2v_n t_n^2 - 2w_n v_n$

$\therefore\ s_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) = t_n^2(n^{-1}Q_n - (n^{-1} \sum_i V_{in}H'_{in} + n^{-1} \sum_i e_{in})^2) - w_n^2 + R_{1n}$

$$= n^{-1}t_n^2 K_n + R_{2n}$$

waar: $K_n = Q_n - n^{-1}(\sum_i V_{in}H'_{in})^2 - n w_n^2$ en:

$R_{2n} = R_{1n} + (t_n^2 - 1)w_n^2 - t_n^2(n^{-1} \sum_i e_{in})^2 - t_n^2(n^{-1} \sum_i V_{in}H'_{in})(n^{-1} \sum_i e_{in})$.

Aangesien $t_n^2 \to 1$ as $n \to \infty$ en (soos ons later sal aantoon) $nR_{2n} = o_p(1)$, stel ons dus belang in die asimptotiese verdeling van K_n. Nou het ons dat:

$K_n = \sum_j V_{jn}^2(H'_{jn})^2 - n^{-1}(\sum_j V_{jn}H'_{jn})^2 - n^{-1}(\sum_j V_{jn}H'_{jn}H_{jn})^2$.

In hoofstuk 1 het ons gesien dat

$$Q_n = (^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n + 1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n+1} c_{ijn+1} Z_i Z_j$$

met $c_{ijn+1} = (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (H'_{kn})^2 \psi_{ikn}\psi_{jkn}$.

Beskou vervolgens die tweede term van K_n : Ons kan weer skryf:

$$V_{jn} = S_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^{n+1} \beta_{ijn} Z_i \qquad (Z_i = Z_i^* - 1).$$

Die tweede term word dus:

$$n^{-1} (\sum_j H'_{jn} S_{n+1}^{-1} \sum_i \beta_{ijn} Z_i)^2$$

$$= n^{-1} \sum_{i,j} H'_{jn} H'_{in} S_{n+1}^{-2} \sum_{k,m} \beta_{kin} \beta_{mjn} Z_k Z_m$$

$$= (^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{k,m} Z_k Z_m \; n^{-1} (n+1)^{-1} \sum_{i,j} H'_{jn} H'_{in} \quad \beta_{kin} \beta_{mjn}$$

$$= (^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j} c'_{ijn+1} Z_i Z_j$$

$$= (^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 Q'_n \qquad \text{(sê)}$$

waar: $Q'_n = (n+1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n+1} c'_{ijn+1} Z_i Z_j$

met $c'_{ijn+1} = n^{-1} (n+1)^{-1} \sum_{k,m=1}^{n} H'_{kn} H'_{mn} \psi_{ikn} \psi_{jmn}$.

Op analoë wyse kan ons die derde term van K_n skryf as:

$$(^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n+1} c''_{ijn+1} Z_i Z_j$$

$$= (^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 Q''_n$$

met $c''_{ijn+1} = n^{-1} (n+1)^{-1} \sum_{k,m=1}^{n} H_{kn} H'_{kn} H_{mn} H'_{mn} \psi_{ikn} \psi_{jmn}$.

K_n reduseer dus na:

$$(^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j} c^o_{ijn+1} Z_i Z_j$$

met $c^o_{ijn} = c_{ijn} - c'_{ijn} - c''_{ijn}$

$$\therefore\ ns_n^2 t_n^2 (1 - r_n^2) = t_n^2 ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (n+1)^{-1} \sum_{i,j} c^o_{ijn+1} Z_i Z_j + nR_{2n}.$$

Die regterlid is dus in effek 'n kwadratiese vorm plus 'n resterm. Op hierdie kwadratiese vorm gaan ons in 'n latere paragraaf die teorie van hoofstuk 2 toepas.

7. 3 KONVERGENSIE VAN DIE RESTERM

Ons sal in hierdie paragraaf aantoon dat $nR_{2n} = o_p(1)$, met R_{2n} soos in paragraaf 7. 2. Die bewyse in hierdie paragraaf verloop baie soos dié in paragraaf 3. 3 en ons sal gevolglik nie heeltemal so volledig wees soos daar nie.

Vooraf let ons op dat uit die bewys van stelling 3. 1 volg dat:

$$\sum_{i=1}^{n} e_{in}^2 = o_p(1) \text{ as } n \to \infty \tag{7. 3. 1}$$

en
$$\sum_{i=1}^{n} e_{in} V_{in} H'_{in} = o_p(1) \text{ as } n \to \infty. \tag{7. 3. 2}$$

Ons beskou nou die ander terme van R_{2n}.

<u>Lemma 7. 1</u>: As $n \to \infty$ geld dat:

$R_{3n}(\lambda) = n^{-\lambda} \sum_i e_{in} = o_p(1)$, vir enige $\lambda > 0$.

<u>Bewys</u>: Ons het dat:

$$2R_{3n}(\lambda) = n^{-\lambda} \sum_j V_{jn}^2 H''(U^*_{jn}).$$

Soos tevore volg dan dat:

$$|2R_{3n}(\lambda)| \leq n^{-\lambda} \sum_j V_{jn}^2 |H''_{jn}| + n^{-\lambda} \sum_j V_{jn}^2 |H''(U_{jn})|$$

$$= R_{3n}(1, \lambda) + R_{3n}(2, \lambda) \qquad \text{(sê).}$$

Volgens lemma a9 geld:

$$ER_{3n}(1, \lambda) \leq n^{-1-\lambda} \sum_j {}^j/_{n+1}(1 - {}^j/_{n+1})|H''_{jn}| \leq n^{-\lambda}|H_{1n}|n^{-1} \sum_j {}^j/_{n+1}(1- {}^j/_{n+1})(H'_{jn})^2$$

$\leq n^{-\lambda}|H_{1n}|\ O(\log n)$, volgens lemma 3.7

$= o(1)$ as $n \to \infty$, volgens lemma 3.1

$\therefore\ ER_{3n}(1, \lambda) = o(1)$ as $n \to \infty$

$\therefore\ R_{3n}(1, \lambda) = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Beskou nou $R_{3n}(2, \lambda)$:

$$R_{3n}(2, \lambda) = n^{-\lambda} \sum_j V^2_{jn}|H''(U_{jn})|.$$

Pas nou hierop lemma a10 toe. Laat dus soos tevore:

$$\mu_{jn}(\tau) = \sup_{u_{jn} < u < u^{jn}} |H''(u)|,$$

dan volg dat:

$$P[R_{3n}(2, \lambda) \leq n^{-\lambda} \sum_j V^2_{jn}\ \mu_{jn}(\tau)] \geq 1 - \tau. \tag{7.3.3}$$

Nou volg uit lemma a9 dat:

$$En^{-\lambda} \sum_j V^2_{jn}\ \mu_{jn}(\tau) \leq n^{-1-\lambda} \sum_j {}^j/_{n+1}(1- {}^j/_{n+1})\ \mu_{jn}(\tau)$$

$$= n^{-1-\lambda} \sum_{j=1}^{[n\delta]} {}^j/_{n+1}(1- {}^j/_{n+1})\ \mu_{jn}(\tau) + n^{-1-\lambda} \sum_{j=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} {}^j/_{n+1}(1- {}^j/_{n+1})\ \mu_{jn}(\tau)$$

$$+ n^{-1-\lambda} \sum_{j=[n(1-\delta)]+1}^{n} {}^j/_{n+1}(1- {}^j/_{n+1})\ \mu_{jn}(\tau)$$

$= R_{3n}(2, \lambda, \delta, 1) + R_{3n}(2, \lambda, \delta, 2) + R_{3n}(2, \lambda, \delta, 3)$ (sê) met $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Aangesien $\delta < \frac{1}{2}$, sal ${}^j/_{n+1} < \frac{1}{2}$ vir $j = 1, 2, \ldots, [n\delta]$ en dus is $u^{jn} < \frac{1}{2}$, vir $j = 1, 2, \ldots, [n\delta]$ en n groot genoeg.

$\therefore\ \mu_{jn}(\tau) = |H''(u_{jn})|, \quad j = 1, 2, \ldots, [n\delta]$

en $u_{jn}H'(u_{jn}) < |H(u_{jn})|^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, [n\delta]$.

Vir n groot genoeg vind ons dus dat:

$$R_{3n}(2, \lambda, \delta, 1) \leq n^{-1-\lambda} \sum_j {}^{j}/_{n+1}\, \mu_{jn}(\tau)$$

$$= n^{-1-\lambda} \sum_j {}^{j}/_{n+1} |H''(u_{jn})| \leq n^{-1-\lambda} \sum_j |H(u_{jn})|^{-1} u_{jn}^{-2} ({}^{j}/_{n+1})$$

$$= (n+1)n^{-1-\lambda} \sum_j |H(u_{jn})|^{-1} \left(\frac{j/n+1}{u_{jn}}\right)^2 .\ j^{-1} \leq O(1)K^2(\tau)n^{-\lambda} \sum_{j=1}^{[n\delta]} |H_{jn}^{-1}|\ j^{-1}$$

$$\leq O(1)K^2(\tau)|H({}^{[n\delta]}/_{n+1})|^{-1}\ n^{-\lambda} \sum_{j=1}^{[n\delta]} j^{-1}$$

$= o(1)$, volgens lemma a4.

$\therefore R_{3n}(2, \lambda, \delta, 1) = o(1)$ as $n \to \infty$.

Soos tevore volg direk dat

$$R_{3n}(2, \lambda, \delta, 2) = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Ook kan net soos hierbo aangetoon word dat $R_{3n}(2, \lambda, \delta, 3) = o(1)$ as $n \to \infty$.

$\therefore\ n^{-\lambda} \sum_j V_{jn}^2\, \mu_{jn}(\tau) = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Dit geld vir elke $\tau > 0$, sodat uit (7.3.3) volg dat:

$$R_{3n}(2, \lambda) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty$$

$\therefore\ R_{3n}(\lambda) = o_p(1)$ as $n \to \infty$, en die lemma volg.

<u>Lemma 7.2:</u> Laat $\lambda > 0$. Dan geld dat:

$$R_{4n}(\lambda) = n^{1-\lambda} v_n = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

<u>Bewys:</u> Ons het dat:

$$2R_{4n}(\lambda) = n^{-\lambda} \sum_{j=1}^{n} V_{jn}^2 H_{jn} H''(U_{jn}^*)$$

$\therefore\ |2R_{4n}(\lambda)| \leq n^{-\lambda} \sum_j V_{jn}^2 |H_{jn}|\,|H''_{jn}| + n^{-\lambda} \sum_j V_{jn}^2 |H_{jn}|\,|H''(U_{jn})|$

$= R_{4n}(1, \lambda) + R_{4n}(2, \lambda).$

Konvergensie van hierdie twee terme volg net soos by lemma 7.1. Dit voltooi die bewys.

Lemma 7.3: Vir $\lambda < \frac{1}{2}$ geld dat:

$$R_{5n}(\lambda) = n^{\lambda} w_n = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Bewys: Ons het dat:

$$R_{5n}(\lambda) = n^{-1+\lambda} \sum_j V_{jn} H_{jn} H'_{jn}.$$

Met behulp van lemma a9 en Schwarz se ongelykheid volg dat:

$$E|R_{5n}(\lambda)| \leq n^{-3/2+\lambda} \sum_j \left({}^j/_{n+1}\left(1 - {}^j/_{n+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} |H_{jn}|\,|H'_{jn}|$$

$$\leq \left(n^{-3/2+\lambda} \sum_j {}^j/_{n+1}\left(1 - {}^j/_{n+1}\right)(H'_{jn})^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(n^{-3/2+\lambda} \sum_j H_{jn}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$= o(1)\,.\,o(1)$, volgens lemma 3.7 en 3.4.

$\therefore\ E|R_{5n}(\lambda)| = o(1)$ as $n \to \infty$

$\therefore\ R_{5n}(\lambda) = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Die lemma volg dus.

Opmerking: Uit lemmas 7.2 en 7.3 volg dat $nw_n v_n = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Lemma 7.4: Vir $\lambda < \frac{1}{2}$ geld dat:

$$R_{6n}(\lambda) = n^{-1+\lambda} \sum_j V_{jn} H'_{jn} = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Bewys: Die bewys verloop net soos dié van lemma 7.3.

Opmerking: Uit lemmas 7.1 en 7.4 volg:

$$n^{-1}(\sum_j e_{jn})(\sum_j V_{jn}H'_{jn}) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Hierdie lemmas stel ons in staat om die volgende te bewys:

Stelling 7.1: As $n \to \infty$ geld dat $nR_{2n} = o_p(1)$.

Bewys: Ons het dat:

$$nR_{2n} = t_n^2(\sum_j e_{jn}^2 + 2\sum_j e_{jn}H_{jn} + 2\sum_j e_{jn}V_{jn}H'_{jn}) - nv_n^2 - 2nt_n^2 v_n - 2nw_n v_n + n(t_n^2-1)w_n^2$$

$$- t_n^2 n^{-1}(\sum_j e_{jn})^2 - t_n^2 n^{-1}(\sum_j e_{jn})(\sum_j V_{jn}H'_{jn}).$$

Aangesien $t_n^2 \to 1$ as $n \to \infty$, volg konvergensie van al hierdie terme, behalwe $n(t_n^2 - 1)w_n^2$, uit (7.3.1), (7.3.2) en bostaande lemmas. (Let op dat $\Sigma_j e_{jn}H_{jn} = nv_n$). Ons toon dus net aan dat:

$$n(t_n^2 - 1)w_n^2 = o_p(1), \text{ as } n \to \infty.$$

Nou, uit lemma 7.3 volg dat $n^\lambda w_n^2 = o_p(1)$ as $n \to \infty$, met $\lambda < 1$. Ook volg uit lemma 3.4

$$t_n^2 - 1 = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1 \text{ as } n \to \infty$$

$\therefore\ n(t_n^2 - 1)w_n^2 = o_p(1)$ as $n \to \infty$.

Die stelling volg dus.

Opmerking: Volgens hierdie stelling sal $ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2)$ en K_n dieselfde asimptotiese verdeling hê. Ons het tevore reeds gesien dat K_n in effek geskryf kan word as 'n kwadratiese vorm in onafhanklik en identies verdeelde stogastiese veranderlikes. In die volgende hoofstuk sal ons aantoon dat die teorie van hoofstuk 2 op K_n van toepassing is, en hoe ons daaruit die asimptotiese verdeling van r_n kan vind.

HOOFSTUK 8

DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN DIE TOETSSTATISTIEK VIR DIE SAMEGESTELDE GEVAL

8.1 INLEIDING

In hierdie hoofstuk wil ons ondersoek instel na die asimptotiese verdeling van:

$$T_n^o = n^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ijn}^o Z_i Z_j$$

met $c_{ijn}^o = c_{ijn} - c'_{ijn} - c''_{ijn}$.

Om nou die teorie van hoofstuk 2 toe te pas op T_n^o, moet ons die getalle $\{b_{imn}\}$ en $\{\gamma_m\}$ vind. Hiervoor gaan ons soos tevore te werk. (Sien opmerking aan die einde van paragraaf 2.3.) Stel dus:

$$c^o(x, y) = c(x, y) - c'(x, y) - c''(x, y)$$

waar $c(x, y) = \int_0^1 H'(u)^2 \psi(x, u)\psi(y, u)du$ soos tevore. $c'(x, y)$ kies ons as:

$$c'(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 H'(u)H'(v)\psi(x, u)\psi(y, v)dudv$$

$$= \left(\int_0^1 H'(u)\psi(x, u)du\right)\left(\int_0^1 H'(v)\psi(y, v)dv\right)$$

$$= c'(x) \, . \, c'(y) \qquad \text{(sê)}$$

waar $c'(x) = \int_0^1 H'(u)\psi(x, u)du$.

$c''(x, y)$ kies ons ooreenkomstig as

$$c''(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 H'(u)H(u)H'(v)H(v)\psi(x, u)\psi(y, v)dudv$$

$$= c''(x) \, . \, c''(y) \qquad \text{(sê)}$$

waar

$$c''(x) = \int_0^1 H'(u)H(u)\psi(x, u)du.$$

Ons wil dus die eiewaardes en eiefunksies van $c^o(x, y)$ vind. Laat nou soos tevore H_m die m-de Hermitiese polinoom wees, en:

$$\left.\begin{aligned} g_m(x) &= H_m(H(x)) \\ \gamma_m &= m^{-1} \end{aligned}\right\} m = 1, 2, \ldots$$

Ons toon nou aan dat die eiewaardes en eiefunksies van $c^o(x, y)$ gegee word deur $g_m(x)$ en γ_m, vir $m = 3, 4, \ldots$

Uit paragraaf 4. 1 volg dadelik dat:

$$\int_0^1 H'(u)\psi(x, u)du = -g_1(x)$$

$$\therefore \quad c'(x) = -g_1(x)$$

Ook is volgens paragraaf 4.1:

$$\int_0^1 H'(u)H(u)\psi(x, u)du = -2^{-\frac{1}{2}}g_2(x)$$

$$\therefore \ c''(x) = -2^{-\frac{1}{2}}\ g_2(x)$$

$$\therefore \ c^o(x, y) = c(x, y) - g_1(x)g_1(y) - \tfrac{1}{2}g_2(x)g_2(y).$$

Hieruit volg direk dat die eiewaardes en eiefunksies van $c^o(x, y)$ gegee word deur:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_m &= m^{-1} \\ g_m(x) &= H_m(H(x)) \end{aligned}\right\} \ m = 3, 4, \ldots.$$

Aangesien $\sum_{m=3}^{\infty} \gamma_m = \infty$, sal ons stelling 2. 4 probeer toepas met $b_{imn} = g_m(i/_{n+1})$, $m = 3, 4, \ldots$ In die volgende paragraaf sal ons aantoon dat die kondisies van stelling 2. 4 wel bevredig word. Die bewyse wat ons sal gee is baie nou verwant aan dié van hoofstuk 4, sodat ons dus nie heeltemal so volledig as in hoofstuk 4 sal wees nie.

Vooraf gee ons net eers 'n resultaat wat ons sal nodig kry:

Stel: $h_{4r}(x) = (1 - x)H(x)^r$

$h_{5r}(x) = xH(x)^r$

$h_1(x) = x(1 - x)H(x)H'(x)$

$h_2(x) = x(1 - x)H'(x)$.

<u>Lemma 8.1</u>: As $n \to \infty$ geld vir elke $\delta < 1$ dat:

(i) $\max_{r \leq k_n} |n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_{4r}(k/_{n+1}) - \int_o^1 h_{4r}(x)dx| = o(n^{-\delta})$

(ii) $\max_{r \leq k_n} |n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_{5r}(k/_{n+1}) - \int_o^1 h_{5r}(x)dx| = o(n^{-\delta})$

(iii) $|n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_2(k/_{n+1}) - \int_o^1 h_2(x)dx| = o(n^{-\delta})$

(iv) $|n^{-1} \sum_{k=1}^{n} h_1(k/_{n+1}) - \int_o^1 h_1(x)dx| = o(n^{-\delta})$.

<u>Bewys:</u>

(i) Dit volg maklik dat daar 'n $0 < a \leq \frac{1}{2}$ bestaan sodat $h_{4r}(x)$ monotoon is op

$(0, a)$. Stel:

$R_{1n}(r) = |n^{-1} \sum_{k=1}^{[na]-1} h_{4r}(k/_{n+1}) - \int_o^a h_{4r}(x)dx| \leq (^{n+1}/_n)| (n+1)^{-1} \sum_k h_{4r}(k/_{n+1})$

$- \int_o^a h_{4r}(x)dx| + n^{-1}| \int_o^a h_{4r}(x)dx|$

$= (^{n+1}/_n)R_{1n}(1, r) + R_{1n}(2, r)$ (sê).

Uit lemma a5 volg dat:

$$R_{1n}(1, r) \leq (n+1)^{-1}|h_{4r}(\tfrac{\frac{1}{2}}{n+1}) - h_{4r}(\tfrac{[na]-\frac{1}{2}}{n+1})| + |\int_o^{\frac{1}{2}/n+1} h_{4r}(x)dx| + |\int_{\frac{[na]-\frac{1}{2}}{n+1}}^{a} h_{4r}(x)dx|.$$

Hieruit volg dadelik dat

$$\max_{r \leq k_n} R_{1n}(1, r) = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Verder het ons m. b. v. lemma a12:

$$\begin{aligned} R_{1n}(2, r) &\leq n^{-1} \int_o^1 |H(x)|^r dx \\ &\leq n^{-1}(\int_o^1 H(x)^{2r} dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{-1}(\frac{(2r)!}{r!\, 2^r})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq n^{-1}(2k_n)! \\ &= o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1. \end{aligned}$$

$$\therefore \max_{r \leq k_n} R_{1n}(2, r) = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1$$

$$\therefore \max_{r \leq k_n} R_{1n}(r) = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Beskou nou die interval (a, 1). Ons het dat:

$$h'_{4r}(x) = -H(x)^r + r(1-x)H'(x)H(x)^{r-1}$$

$$\therefore \left|n^{-1} \sum_{k=[na]}^{n} h_{4r}(k/_{n+1}) - \int_a^1 h_{4r}(x)dx\right|$$

$$\leq (^{n+1}/_n)(n+1)^{-2}(n - [na] + 1) \sup_{\frac{[na]-\frac{1}{2}}{n+1} \leq x \leq \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}} |h'_{4r}(x)|$$

$$+ \left|\int_{(\frac{[na]-\frac{1}{2}}{n+1},\, a)} h_{4r}(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}}^{1} h_{4r}(x)dx\right| + n^{-1}\left|\int_a^1 h_{4r}(x)dx\right|.$$

Met behulp van lemmas 3. 3 en a12 volg konvergensie van die laaste drie terme direk. As $n \to \infty$ kan ons vir die eerste term skryf:

$$O(1)n^{-1} \sup_x |h'_{4r}(x)|$$

$$\leq O(1)\, n^{-1}(|H(\tfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1})|^r + r|H(\tfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1})|^{r-1}(1 - a_n)H'(a_n))$$

waar $a_n \to c$ met $a < c < 1$.

Laasgenoemde is dus

$$\leq O(1)n^{-1}(|H(\tfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1})|^{k_n} + k_n|H(\tfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1})|^{k_n} O(1))$$

$= o(n^{-\delta})$, $\delta < 1$, volgens lemma 3. 1. Dit voltooi die bewys van (i).

(ii) Die bewys hiervan volg uit (i) deur simmetrie.

(iii) Ons het dat daar 'n $0 < a \leq \frac{1}{2}$ bestaan sodat $h_2(x)$ stygend is op $(0, a)$ en dalend op $(1 - a, 1)$, terwyl $h_2(x)$ en $h'_2(x)$ begrensd is op $[a, 1 - a]$. Die bewys volg nou direk deur toepassing van lemmas a5 en a6.

(iv) Die bewys hiervan verloop soos dié van (iii).

8. 2 VERIFIKASIE VAN KONDISIES

In hierdie paragraaf sal ons aantoon dat die kondisies van stelling 2. 4 in die huidige geval bevredig word.

Eerstens merk ons op dat T_n^o nie 'n lineêre term bevat nie, sodat die kondisies waarin $\{d_{in}\}$ en $\{\delta_m\}$ voorkom, verval. Tweedens let ons op dat b_{imn} en γ_m soos in hoofstuk 4 is, behalwe dat $m \geq 3$ in die huidige geval. Kondisies (B2), ($B\Gamma 1$) en ($B\Gamma 2$) sal dus soos tevore bevredig word. Ons hoef dus slegs kondisies (C2) en ($CB\Gamma 1$) te verifieer.

8.2.1 Kondisie (C2)

Ons moet aantoon dat:

$$(n+1)^{-2} \sum_{i,j} (c^o_{ijn+1})^2 \to \sum_{m=3}^{\infty} \gamma_m^2 = \sum_{m=3}^{\infty} m^{-2}, \quad \text{as } n \to \infty.$$

Nou het ons dat:

$$(c^o_{ijn})^2 = c^2_{ijn} + (c'_{ijn})^2 + (c''_{ijn})^2 - 2\,c_{ijn}\,c'_{ijn} - 2\,c_{ijn}\,c''_{ijn} + 2\,c'_{ijn}\,c''_{ijn}.$$

Uit hoofstuk 4 weet ons reeds dat:

$$n^{-2} \sum_{i,j} c^2_{ijn} \to \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^2 \text{ as } n \to \infty. \tag{8.2.1}$$

Voorts het ons dat:

$$c'_{ijn+1} = n^{-1}(n+1)^{-1} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} \psi_{ikn} \psi_{jmn}$$

$$= (\tfrac{n+1}{n})\,(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} \psi_{ikn} \psi_{jmn}$$

$$= (\tfrac{n+1}{n})\, c'_{in+1} c'_{jn+1} \qquad \text{(sê)}$$

met $c'_{in+1} = (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} H'_{kn} \psi_{ikn}$

$$\therefore\ (n+1)^{-2} \sum_{i,j} (c'_{ijn+1})^2 \sim ((n+1)^{-1} \sum_{i} c'^{2}_{in+1})^2.$$

Beskou dus:

$$(n+1)^{-1} \sum_i (c'_{in+1})^2 = (n+1)^{-3} \sum_i (\sum_k H'_{kn} \psi_{ikn})^2$$

$$= (n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} ((n+1)^{-1} \sum_i \psi_{ikn} \psi_{imn})$$

$$= (n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} T_{kmn}$$

waar soos in hoofstuk 4:

$$T(x, y) = \begin{cases} x(1-y) \text{ vir } x \leq y \\ y(1-x) \text{ vir } x \geq y. \end{cases}$$

Ons sal nou aantoon dat:

$$(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} T_{kmn} \to \int_0^1 \int_0^1 H'(x)H'(y)T(x, y)dxdy.$$

Nou is:

$$(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} T_{kmn} = 2(n+1)^{-2} \sum_{k \leq m} {}^{k}/_{n+1}(1 - {}^{m}/_{n+1})H'_{kn}H'_{mn}$$

$$- (n+1)^{-2} \sum_{k=1}^{n} {}^{k}/_{n+1}(1 - {}^{k}/_{n+1})(H'_{kn})^2$$

$$= 2I_n - R_n \text{ (sê).}$$

Uit lemma 3. 7 volg direk dat $R_n = o(1)$ as $n \to \infty$. Verder is:

$$T(x, y) = \int_0^1 \psi(u, x)\psi(u, y)du$$

$$\therefore \int_0^1 \int_0^1 H'(x)H'(y)T(x, y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 H'(x)\psi(u, x)dx)^2 du$$

$$= \int_0^1 g_1^2(u)du \qquad \text{(sien paragraaf 8. 1)}$$

$$= 1 \quad (< \infty).$$

Ons toon nou aan dat $I_n \to \frac{1}{2}$ as $n \to \infty$,

Stel: $t(x, y) = x(1-y)H'(x)H'(y)$, en laat $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Dan is:

$$I_n = (n+1)^{-2} \sum_{s=1}^{[n\delta]} \sum_{r=1}^{s} t_{rsn} + (n+1)^{-2} \sum_{s=[n\delta]+1}^{[n(1-\delta)]} \sum_{r=1}^{s} t_{rsn} + (n+1)^{-2} \sum_{s=[n(1-\delta)]+1}^{n} \sum_{r=1}^{s} t_{rsn}$$

$$= I_{1n}(\delta) + I_{2n}(\delta) + I_{3n}(\delta) \qquad \text{(sê).}$$

Ook is: $2I = \int_0^1 \int_0^1 H'(x)H'(y)T(x, y)dxdy$

$$= 2 \int_0^{\delta} \int_0^{y} t(x, y)dxdy + 2 \int_{\delta}^{1-\delta} \int_0^{y} t(x, y)dxdy + 2 \int_{1-\delta}^{1} \int_0^{y} t(x, y)dxdy$$

$$= 2(I_1(\delta) + I_2(\delta) + I_3(\delta)), \qquad \text{(sê)}$$

met $0 < \delta < \frac{1}{2}$ soos hierbo.

Met behulp van lemma 3. 2 het ons nou:

$$I_{1n}(\delta) = (n+1)^{-2} \sum_{s=1}^{[n\delta]} \sum_{r=1}^{s} {}^{r}/_{n+1}(1 - {}^{s}/_{n+1})H'_{rn}H'_{sn} \leq (n+1)^{-2} \sum_{s} \sum_{r} |H_{rn}|^{-1} H'_{sn}$$

$$\leq (n+1)^{-1} \sum_{s} |H_{sn}|^{-1} H'_{sn} ({}^{s}/_{n+1}) \leq (n+1)^{-1} \sum_{s} H_{sn}^{-2} \leq H(\tfrac{[n\delta]}{n+1})^{-2} (n+1)^{-1} [n\delta] \leq H(\delta)^{-2} . \delta$$

$$\therefore I_{1n}(\delta) \leq H(\delta)^{-2} . \delta$$

$$\therefore \limsup_{n \to \infty} I_{1n}(\delta) \leq H(\delta)^{-2} . \delta.$$

Maar $H(\delta)^{-2}$. $\delta \to 0$ as $\delta \to 0$

$$\therefore \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} I_{1n}(\delta) = 0.$$

Op analoë wyse volg dat

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} I_{3n}(\delta) = 0.$$

Dit volg ook direk dat

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n}(\delta) = I_2(\delta) \quad \text{en} \quad \lim_{\delta\to 0} I_1(\delta) = \lim_{\delta\to 0} I_3(\delta) = 0$$

$$\therefore |I - I_n| \le |I_{1n}(\delta) - I_1(\delta)| + |I_{2n}(\delta) - I_2(\delta)| + |I_{3n}(\delta) - I_3(\delta)|$$

$$\therefore \limsup_{n\to\infty} |I - I_n| \le \limsup_{n\to\infty} I_{1n}(\delta) + I_1(\delta) + \limsup_{n\to\infty} I_{3n}(\delta) + I_3(\delta)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} |I - I_n| = 0$$

$$\therefore I_n \to I = \tfrac{1}{2} \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore (n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} T_{kmn} \to 1$$

$$\therefore (n+1)^{-1} \sum_i (c'_{in+1})^2 \to 1$$

$$\therefore (n+1)^{-2} \sum_{i,j} (c'_{ijn+1})^2 \to 1 (= \gamma_1^2) \qquad (8.2.2)$$

Verder het ons dat:

$$c''_{ijn+1} = n^{-1}(n+1)^{-1} \sum_{k,m} H_{kn} H'_{kn} H_{mn} H'_{mn} \psi_{ikn} \psi_{jmn}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H_{kn} H'_{mn} H_{mn} \psi_{ikn} \psi_{jmn}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right) c''_{in+1}\, c''_{jn+1} \qquad \text{(sê)}$$

met $c''_{in+1} = (n+1)^{-1} \sum_k H'_{kn} H_{kn} \psi_{ikn}$

$$\therefore (n+1)^{-2} \sum_{i,j} (c''_{ijn+1})^2 \sim \left((n+1)^{-1} \sum_i (c''_{in+1})^2\right)^2.$$

Beskou dus:

$$(n+1)^{-1} \sum_i (c''_{in+1})^2 = (n+1)^{-3} \sum_i \left(\sum_k H'_{kn} H_{kn} \psi_{ikn}\right)^2$$

$$= (n+1)^{-2} \sum_{k,m} H_{kn} H'_{kn} H_{mn} H'_{mn} T_{kmn}$$

met $T(x, y)$ soos tevore.

Net soos hierbo kan ons nou aantoon dat:

$$(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H_{kn} H'_{kn} H_{mn} H'_{mn} T_{kmn} \to \int_0^1 \int_0^1 H(x)H'(x)H(y)H'(y)T(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 H(x)H'(x)\psi(u, x)dx\right)^2 du$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 g_2^2(x)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\ (n + 1)^{-1} \sum_i (c''_{in+1})^2 \to \tfrac{1}{2} \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore\ (n + 1)^{-2} \sum_{i,j} (c''_{ijn+1})^2 \to 1/4 \ (= \gamma_2^2). \qquad (8.2.3)$$

Verder is:

$$c_{ijn+1}\, c'_{ijn+1} = (n+1)^{-2} \,.\, n^{-1} \sum_{k,r,s} (H'_{kn})^2 \psi_{ikn} \psi_{jkn} H'_{rn} H'_{sn} \psi_{irn} \psi_{jsn}$$

$$\therefore\ (n + 1)^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn+1}\, c'_{ijn+1} \sim (n + 1)^{-3} \sum_{k,r,s} (H'_{kn})^2 H'_{rn} H'_{sn} \left((n+1)^{-1} \sum_i \psi_{irn} \psi_{ikn}\right)$$

$$\times \left((n+1)^{-1} \sum_j \psi_{jsn} \psi_{jkn}\right)$$

$$= (n+1)^{-3} \sum_{k,r,s} (H'_{kn})^2 H'_{rn} H'_{sn} T_{krn} T_{ksn} = I_n \quad \text{(sê)}.$$

Dit is nou duidelik dat ons, analoog aan die vorige, I_n kan opbreek in 'n aantal somme. Ons sal net een van dié terme beskou, sê bv.:

$$I_n(\delta) = (n+1)^{-3} \sum_{k=1}^{[n\delta]} \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{r} (H'_{kn})^2 H'_{rn} H'_{sn} T_{krn} T_{ksn}$$

met $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Dan volg m. b. v. lemma 3. 2 dat:

$$I_n(\delta) \leq (n+1)^{-3} \sum_k \sum_r \sum_s (H'_{kn})^2 |H_{rn}|^{-1} |H_{sn}|^{-1} \leq (n+1)^{-3} \sum_k \sum_r \sum_s (H'_{kn})^2 H_{kn}^{-2}$$

$$= (n+1)^{-1} \sum_k (H'_{kn})^2 H_{kn}^{-2} \left({}^{k}/_{n+1}\right)^2 \leq (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{[n\delta]} H_{kn}^{-4} \leq \delta\, H(\delta)^{-4} \quad \text{(soos tevore)}$$

$$\to 0 \text{ as } \delta \to 0.$$

Ook sal $I(\delta) = \int_o^\delta dz \int_o^z dy \int_o^y H'(z)^2 H'(y)H'(x)T(z, y) \quad T(z, x)dx$

$\rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$,

want: $I = \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(z)^2 H'(y)H'(x)T(z, y)T(z, x)dxdydz$

$$= \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(z)^2 \left(\int_o^1 H'(y)\psi(u, y)dy\right)\left(\int_o^1 H'(x)\psi(v, x)dx\right) \quad \psi(u, z)\psi(v, z)dzdudv$$

$$= \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(z)^2 g_1(u)g_1(v)\psi(u, z)\psi(v, z)dzdudv$$

$$= \int_o^1 \int_o^1 g_1(u)g_1(v)\left(\int_o^1 H'(z)^2 \psi(u, z)\psi(v, z)dz\right)dudv$$

$$= \int_o^1 \int_o^1 c(u, v)g_1(u)g_1(v)dudv$$

$$= \gamma_1 = 1 < \infty.$$

Indien ons dus nou al sodanige deelsomme beskou het, sal volg dat

$I_n \rightarrow I$ as $n \rightarrow \infty$

$$\therefore \quad n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} c'_{ijn} \rightarrow \gamma_1 \ (= \gamma_1^2) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \tag{8. 2. 4}$$

Net só sal volg dat:

$$n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} c''_{ijn} \rightarrow \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(z)^2 H(y)H'(y)H(x)H'(x)T(z, y) \quad T(z, x)dxdydz.$$

Hierdie integraal kan ons weer skryf as:

$$\int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(z)^2 \psi(u, z)\psi(v, z)\left(\int_o^1 H'(y)H(y)\psi(u, y)dy\right) \quad \left(\int_o^1 H'(x)H(x)\psi(v, x)dx\right)dzdudv$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(z)^2 \psi(u, z)\psi(v, z)g_2(u)g_2(v)dzdudv$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_o^1 \int_o^1 c(u, v)g_2(u)g_2(v)dudv$$

$$= \tfrac{1}{2} \gamma_2 = \gamma_2^2$$

$$\therefore \quad n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} c''_{ijn} \rightarrow \gamma_2^2 \quad \text{as } n \rightarrow \infty . \tag{8. 2. 5}$$

Ten slotte sal op analoë wyse volg dat:

$$n^{-2} \sum_{i,j} c'_{ijn} c''_{ijn} \to \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 \int_o^1 H'(u)H'(v)H'(x)H(x)H'(y)H(y) \quad T(u, x)T(v, y)dudvdxdy$$

$$= (\int_o^1 \int_o^1 H'(y)H'(x)H(x)T(y, x)dydx)^2$$

$$= (\int_o^1 \int_o^1 H'(y)\psi(u, y)(\int_o^1 H'(x)H(x)\psi(u, x)dx)dudy)^2$$

$$= (-2^{-\frac{1}{2}} \int_o^1 \int_o^1 H'(y)\psi(u, y)g_2(u)dudy)^2$$

$$= (2^{-\frac{1}{2}} \int_o^1 g_2(u)g_1(u)du)^2$$

$$= 0.$$

$$\therefore n^{-2} \sum c'_{ijn} c''_{ijn} \to 0 \text{ as } n \to \infty . \tag{8.2.6}$$

Uit (8.2.1) - (8.2.6) volg dus dat:

$$n^{-2} \sum (c^o_{ijn})^2 \to \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^2_m + \gamma^2_1 + \gamma^2_2 - 2\gamma^2_1 - 2\gamma^2_2 + 0$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^2_m - \gamma^2_1 - \gamma^2_2$$

$$\therefore n^{-2} \sum_{i,j} (c^o_{ijn})^2 \to \sum_{m=3}^{\infty} \gamma^2_m \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Kondisie (C2) word dus bevredig.

8.2.2 Kondisie (CBΓ1)

Ons moet aantoon dat:

$$\Gamma_n \sigma_n = \sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |n^{-2} \sum_{i,j} c^o_{ijn} b_{imn} b_{jmn} - \gamma_m| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Hier is $\sigma_n = \sum_{m=3}^{k_n} \gamma_m = \sum_{m=3}^{k_n} m^{-1}$.

Ons kan dus sê dat:

$$\Gamma_n\sigma_n \leq \sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |n^{-2} \sum_{i,j} c_{ijn} b_{imn} b_{jmn} - \gamma_m| + \sigma_n \max_m |n^{-2} \sum_{i,j} c'_{ijn} b_{imn} b_{jmn}|$$

$$+ \sigma_n \max_m |n^{-2} \sum_{i,j} c''_{ijn} b_{imn} b_{jmn}|.$$

Uit hoofstuk 4 weet ons reeds dat die eerste term hierbo na nul gaan. Ons beskou dus net konvergensie van die tweede en derde terme. Beskou eerstens die tweede term. Soos tevore is:

$$n^{-2} \sum_{i,j} c'_{ijn} b_{imn} b_{jmn} \sim n^{-2} \sum_{i,j} c'_{in} c'_{jn} b_{imn} b_{jmn}$$

$$= (n^{-1} \sum_i c'_{in} b_{imn})^2.$$

Stel nou: $C'_n(m) = n^{-1} \sum_i c'_{in} b_{imn}$

$$= n^{-1} \sum_i (n^{-1} \sum_r H'(^r/_n)\psi(^i/_n, {}^r/_n))b_{imn}.$$

Aangesien b_{imn} soos tevore is, kan ons skryf: (sien paragraaf 4.6)

$$C'_n(m) = \sum_s a_{ms}(m!)^{-\frac{1}{2}} n^{-2} \sum_r H'(^r/_n) \sum_i H^s_{in} \psi(^i/_n, {}^r/_n)$$

$$= \sum_s a_{ms}(m!)^{-\frac{1}{2}} A'_n(s) \qquad \text{(sê)}$$

waar $A'_n(s) = n^{-1} \sum_r H'(^r/_n)((1 - {}^r/_n)n^{-1} \sum_{i \leq r} H^s_{in} - (^r/_n)n^{-1} \sum_{i > r} H^s_{in})$

$$= (^{n+1}/_n)n^{-1} \sum_r H'(^r/_n)J'_{rn}(s) \qquad \text{(sê).}$$

Let op dat $A'_n(0) = 0$.

Laat nou soos tevore:

$$I_{nk}(1, r) = (n+1)^{-1} \sum_{i \le k} H_{in}^r - \int_o^{k/n} H(x)^r dx, \qquad k = 1, \dots, n$$

$$I_{nk}(2, r) = (n+1)^{-1} \sum_{i > k} H_{in}^r - \int_{k/n}^1 H(x)^r dx, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Dan volg dat:

$$J'_{rn}(s) = (1 - {}^r/_n)I_{nr}(1, s) + (1 - {}^r/_n) \int_o^{r/n} H(x)^s dx - ({}^r/_n) I_{nr}(2, s) - ({}^r/_n) \int_{r/n}^1 H(x)^s dx$$

$$= J'_{rn}(1, s) + J'_{rn}(2, s) - J'_{rn}(3, s) - J'_{rn}(4, s).$$

Laat ook:

$$A'_n(i, s) = n^{-1} \sum_r H'({}^r/_n)J'_{rn}(i, s), \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{en } C'_n(i, m) = \sum_s a_{ms}(m!)^{-\frac{1}{2}} A'_n(i, s), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Ons beskou nou elk van bostaande vier terme:

(i) Ons het dat:

$$|A'_n(1, s)| \le \max_{1 \le r \le k_n} \max_{s \le k_n} |I_{nr}(1, s)| n^{-1} \sum_r (1 - {}^r/_n)H'({}^r/_n).$$

Uit lemma 3.4 volg dan dat vir $\delta < 1$ is:

$$|A'_n(1, s)| \le o(n^{-\delta})\, n^{-1} \sum_r (1 - {}^r/_n)H'({}^r/_n) \le o(n^{-\delta})(n^{-1} \sum_r ({}^r/_n)^2 (1-{}^r/_n)^2 h({}^r/_n))^{\frac{1}{2}} (n^{-1} \sum_r ({}^n/_r)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= o(n^{-\delta})\, O(1) \,.\, n^{\frac{1}{2}} \,.\, O(1)$$

$$= o(n^{-\delta'}) \qquad \text{met } \delta' < \tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore \sigma_n \max_m |C'_n(1, m)| \le o(n^{-\delta})\sigma_n \max_m \sum_s |a_{ms}| (m!)^{-\frac{1}{2}} \qquad (\delta < \tfrac{1}{2})$$

$$\le o(n^{-\delta})\sigma_n (k_n!)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(soos tevore)}$$

$$= o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(ii) Uit simmetrie volg nou dat

$$\sigma_n \max_m |C'_n(3, m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(iii) Verder het ons dat:

$$J'_{rn}(2, s) = (1 - {}^{r}/_{n}) \int_{o}^{r/n} H(x)^{s} dx$$

$$= (1 - {}^{r}/_{n}) \beta_{s}(H({}^{r}/_{n})),$$

volgens lemma a8.

$$\therefore A'_{n}(2, s) = n^{-1} \sum_{r} (1 - {}^{r}/_{n}) H'({}^{r}/_{n}) \beta_{s}(H({}^{r}/_{n})).$$

Ook is vir $m \geq 3$:

$$I'(m) = 0 = \int_{o}^{1} g_{1}(x) g_{m}(x) dx$$

$$= \int_{o}^{1} g_{m}(x) \left(\int_{o}^{1} H'(z) \psi(x, z) dz \right) dx$$

$$= \int_{o}^{1} H'(z) \int_{o}^{1} \psi(x, z) g_{m}(x) dx dz$$

$$= \sum_{s} a_{ms} (m!)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{o}^{1} (1-z) H'(z) \int_{o}^{z} H(x)^{s} dx dz - \int_{o}^{1} z H'(z) \int_{z}^{1} H(x)^{s} dx dz \right)$$

$$= I'_{1}(m) - I'_{2}(m) \qquad \text{(sê)}$$

$$\therefore C'_{n}(m) = C'_{n}(m) - I'(m)$$

$$= C'_{n}(1, m) + (C'_{n}(2, m) - I'_{1}(m)) - C'_{n}(3, m) - (C'_{n}(4, m) - I'_{2}(m)).$$

Stel nou:

$$I'_{1}(m) = \sum_{s} a_{ms} (m!)^{-\frac{1}{2}} I'_{1}(m, s) \text{ en:}$$

$$D'_{n}(1, s) = A'_{n}(2, s) - I'_{1}(m, s)$$

$$= \sum_{r} (1 - {}^{r}/_{n}) H({}^{r}/_{n})^{s-1} (1 + \nu_{s}(H({}^{r}/_{n}))) - \int_{o}^{1} (1-z) H(z)^{s-1} (1 + \nu_{s}(H(z))) dz$$

$$= n^{-1} \sum_{r} (1 - {}^{r}/_{n}) H({}^{r}/_{n})^{s-1} - \int_{o}^{1} (1-z) H(z)^{s-1} dz + n^{-1} \sum_{r} (1 - {}^{r}/_{n}) H({}^{r}/_{n})^{s-1} \nu_{s}(H({}^{r}/_{n}))$$

$$- \int_{o}^{1} (1-z) H(z)^{s-1} \nu_{s}(H(z)) dz$$

$= D'_n(1, s, 1) + D'_n(1, s, 2)$ (sê).

Uit lemma 8.1 volg dadelik dat:

$$\max_{s \le k_n} |D'_n(1, s, 1)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Beskou nou $D'_n(1, s, 2)$ en gestel eers s is onewe, sodat:

$$\nu_s(z) = \sum_{k=1}^{\frac{s-1}{2}} (s-1)(s-3)\ldots(s-2k+1)z^{-2k}, \text{ volgens lemma a8}$$

$$\therefore |D'_n(1, s, 2)| \le s! \max_{k \le \frac{s-1}{2}} |n^{-1} \sum_r (1 - {}^r/_n) H({}^r/_n)^{s-2k-1} - \int_0^1 (1-z)H(z)^{s-2k-1}dz|.$$

Uit lemma 8.1 volg dus:

$$\max_{\substack{s \le k_n \\ \{s \text{ onewe}\}}} |D'_n(1, s, 2)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Gestel nou s is ewe, dan volg:

$$|D'_n(1, s, 2)| \le \sum_{k=1}^{\frac{s}{2}-1} (s-1)\ldots(s-2k+1)|n^{-1} \sum_r (1 - {}^r/_n)H({}^r/_n)^{s-2k-1} - \int_0^1 (1-z)H(z)^{s-2k-1}dz|$$

$$+ (s-1)(s-3)\ldots 3.1|n^{-1} \sum_r (1-{}^r/_n)({}^r/_n)H'({}^r/_n) - \int_0^1 z(1-z)H'(z)dz|.$$

Die eerste term kan net soos by die geval s onewe behandel word, terwyl vir die tweede term ons lemma 8.1 (iii) toepas.

$$\therefore \max_{\substack{s \le k_n \\ \{s \text{ ewe}\}}} |D'_n(1, s, 2)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

$$\therefore \max_{s \le k_n} |D'_n(1, s, 2)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1$$

$$\therefore \max_{s \le k_n} |D'_n(1, s)| = o(n^{-\delta}), \quad \delta < 1.$$

Dit volg dan direk dat:

$$\sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |C'_n(2, m) - I'_1(m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

(iv) Analoog aan (iii) volg dat:

$$\sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |C'_n(4, m) - I'_2(m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Uit (i) - (iv) volg dus dat:

$$\sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |C'_n(m)| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

$$\therefore \sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |n^{-2} \sum_{i,j} c'_{ijn} b_{imn} b_{jmn}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Ten slotte moet ons aantoon dat:

$$\sigma_n \max_{3 \leq m \leq k_n} |n^{-2} \sum_{i,j} c''_{ijn} b_{imn} b_{jmn}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Aangesien $c''_{ijn} \sim c''_{in} c''_{jn}$

met $c''_{in+1} = (n+1)^{-1} \sum_k H_{kn} H'_{kn} \psi_{ikn}$

kan die bewys hier net so deurgevoer word as vir die vorige geval, behalwe dat ons lemma 8. 1 (iv) gebruik waar ons tevore lemma 8. 1 (iii) gebruik het.

Ons konkludeer dus dat $\Gamma_n \sigma_n = o(1)$ as $n \to \infty$, sodat kondisie (CBΓ1) in die huidige situasie bevredig word.

8. 3 DIE VORM VAN DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN r_n

In paragraaf 8. 2 het ons aangetoon dat die kondisies van stelling 2. 4 bevredig word vir daardie bepaalde keuse van die konstantes.

Met $T^o_n = n^{-1} \sum_{i,j} c^o_{ijn} Z_i Z_j$ volg dus dat:

$$D(T_n^o - ET_n^o) \quad \rightarrow \quad D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \rightarrow \infty. \tag{8.3.1}$$

In paragraaf 7.2 het ons ook gesien dat:

$$ns_n^2 t_n^2 (1 - r_n^2) = t_n^2 K_n + nR_{2n}$$

waar $nR_{2n} = o_p(1)$, terwyl:

$$K_n = ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 T_{n+1}^o. \tag{8.3.2}$$

In hierdie paragraaf wil ons die vorm van die asimptotiese verdeling van r_n m.b.v. (8.3.1) en (8.3.2) bepaal. Vooraf gee ons eers 'n resultaat wat ons later sal nodig kry. Laat soos tevore:

$$T(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{vir } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{vir } x \geq y \end{cases}$$

<u>Lemma 8.2:</u> Met T_n^o soos hierbo, geld:

$$ET_n^o = n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} {}^k/_n(1 - {}^k/_n)h({}^k/_n) - (n-1)^{-1} n^{-1} \sum_{k,m=1}^{n-1} H'({}^k/_n)H'({}^m/_n)T({}^k/_n, {}^m/_n)$$

$$- (n-1)^{-1} n^{-1} \sum_{k,m=1}^{n-1} H'({}^k/_n)H({}^k/_n)H'({}^m/_n)H({}^m/_n)T({}^k/_n, {}^m/_n).$$

<u>Bewys:</u> Ons het dat:

$$ET_n^o = n^{-1} \sum_i (c_{iin} - c'_{iin} - c''_{iin})$$

waaruit die bewys direk volg.

<u>Opmerking:</u> Volgens paragraaf 8.2.1 geld:

$$(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H'_{kn} H'_{mn} T_{kmn} \rightarrow \int_o^1 \int_o^1 H'(x)H'(y)T(x, y)dxdy = 1$$

en:

$$(n+1)^{-2} \sum_{k,m} H_{kn} H'_{kn} H_{mn} H'_{mn} T_{kmn} \rightarrow \int_o^1 \int_o^1 H(x)H'(x)H(y)H'(y)T(x, y)dxdy = \tfrac{1}{2}.$$

Dit volg dus dat:

$ET^o_{n+1} \sim a_n - {}^3/_2$, met a_n soos in hoofstuk 4. Hierdie is 'n handige asimptotiese uitdrukking vir ET^o_{n+1} i. t. v. a_n. Stel nou $a^o_n = ET^o_{n+1}$. Dan het ons die volgende stelling:

Stelling 8. 1: As $n \to \infty$ geld dat:

$$D(2n(1 - r_n) - a^o_n) \to D\Big(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y^2_m - 1)\Big).$$

Bewys: Ons het dat:

$$ns^2_n t^2_n (1 - r^2_n) = t^2_n K_n + o_p(1) \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore ns^2_n t^2_n (1 - r^2_n) - a^o_n = t^2_n ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 T^o_{n+1} - a^o_n + o_p(1)$$

$$= t^2_n ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (T^o_{n+1} - a^o_n) + a^o_n (t^2_n ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 - 1) + o_p(1).$$

Uit lemmas 3. 7 en 8. 2 en paragraaf 8. 2. 1 volg direk dat $a^o_n = O(\log n)$ as $n \to \infty$. Soos tevore is:

$({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 = 1 + O_p(n^{-\frac{1}{2}})$ as $n \to \infty$, (sien stelling 4. 1) terwyl volgens lemma 3. 4 geld dat:

$$t^2_n = 1 + o(n^{-\frac{1}{2}}) \text{ as } n \to \infty \tag{8. 3. 3}$$

$$\therefore t^2_n ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 = 1 + O_p(n^{-\frac{1}{2}})$$

$$\therefore a^o_n (t^2_n ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 - 1) = o_p(1)$$

$$\therefore ns^2_n t^2_n (1 - r^2_n) - a^o_n = t^2_n ({}^{n+1}/_{S_{n+1}})^2 (T^o_{n+1} - a^o_n) + o_p(1) \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore D(ns^2_n t^2_n (1 - r^2_n) - a^o_n) \to D\Big(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y^2_m - 1)\Big) \text{ as } n \to \infty.$$

Voorts is dit bekend dat:

$$D(n^{\frac{1}{2}}(s_n^2 - 1)) \rightarrow N(0, 2) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore s_n^2 = 1 + O_p(n^{-\frac{1}{2}}). \qquad (8.3.4)$$

Uit (8. 3. 3) en (8. 3. 4) volg dus:

$$s_n^2 t_n^2 = 1 + O_p(n^{-\frac{1}{2}}) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore a_n^o (s_n^2 t_n^2 - 1) = o_p(1) \text{ as } n \rightarrow \infty. \qquad (8.3.5)$$

Nou geld egter dat:

$$ns_n^2 t_n^2 (1 - r_n^2) - a_n^o = s_n^2 t_n^2 (n(1 - r_n^2) - a_n^o) + a_n^o (s_n^2 t_n^2 - 1)$$

$$= s_n^2 t_n^2 (n(1 - r_n^2) - a_n^o) + o_p(1) \text{ as } n \rightarrow \infty, \text{ volgens } (8.3.5).$$

$$\therefore D(n(1 - r_n^2) - a_n^o) \rightarrow D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \rightarrow \infty. \qquad (8.3.6)$$

Hieruit volg dat $n(1 - r_n)(1 + r_n) - a_n^o$ 'n asimptotiese verdeling het sodat volgens bostaande geld: $(a_n^o = O(\log n))$

$$n^{\frac{1}{2}}(1 - r_n)(1 + r_n) = o_p(1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

M. b. v. opmerking (i) van paragraaf 6. 1 volg dus dat:

$$n^{\frac{1}{2}}(1 - r_n) = o_p(1) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore n(1 - r_n)^2 = o_p(1) \text{ as } n \rightarrow \infty \qquad (8.3.7)$$

$$\text{Maar } 2n(1 - r_n) - a_n^o = n(1 - r_n^2) + n(1 - r_n)^2 - a_n^o. \qquad (8.3.8)$$

Uit (8. 3. 6), (8. 3. 7) en (8. 3. 8) volg dus:

$$D(2n(1 - r_n) - a_n^o) \rightarrow D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Die stelling volg dus.

Opmerking: Hierdie stelling gee dus vir ons die vorm van die asimptotiese verdeling van r_n onder H_o. Ons kan r_n dus nou gebruik as toetsstatistiek vir H_o. In die volgende paragraaf gee ons die kritieke waardes van die asimptotiese verdeling van r_n asook 'n tabel van a_n^o, vir sekere keuses van n.

8.4 KRITIEKE WAARDES VAN DIE ASIMPTOTIESE VERDELING

Ons het in die vorige paragraaf gesien dat onder H_o geld:

$$D(2n(1 - r_n) - a_n^o) \to D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat $Y_o = \sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)$, dan sal ons in hierdie paragraaf die kritieke waardes van die verdeling van Y_o bepaal. Om dit te doen gaan ons soos in paragraaf 4.8 te werk. Gestel nou Y_o se distribusiefunksie en karakteristieke funksie word respektiewelik gegee deur F_o en φ_o. Dan volg soos in paragraaf 4.8 dat:

$$F_o(y) - F_o(o) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_o(t)}{it} (1 - e^{-ity})dt.$$

Ook is dit duidelik dat:

$$\begin{aligned} \varphi_o(t) &= \prod_{k=3}^{\infty} e^{-it/k}(1 - 2it/k)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r_o(t)e^{i\theta_o(t)} \qquad \text{(sê)}, \end{aligned}$$

waar uit paragraaf 4.8 volg dat:

$$\begin{aligned} r_o(t) &= \prod_{k=3}^{\infty} (1 + 4t^2/k^2)^{-1/4} \\ &= r(t)(1 + 4t^2)^{-1/4}(1 + t^2)^{-1/4} \end{aligned}$$

en:

$$\theta_o(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (\tan^{-1} \frac{2t}{k} - \frac{2t}{k})$$

$$= \theta(t) - \frac{\tan^{-1}2t + \tan^{-1}t}{2} + \frac{3t}{2},$$

met $r(t)$ en $\theta(t)$ soos in paragraaf 4. 8. Dit volg dus dat:

$$F_o(y) - F_o(o) = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \frac{r_o(t)}{t} (\sin \theta_o(t) + \sin(ty - \theta_o(t)))dt.$$

$F_o(y)$ kan ons nou hieruit soos tevore bepaal.

Die volgende tabel gee die waardes van $F_o(y)$, afgerond tot 3 desimale, vir sekere keuses van y.

TABEL 8. 4. 1 DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN $2n(1 - r_n) - a_n^o$

x	$F_o(x)$	x	$F_o(x)$	x	$F_o(x)$	x	$F_o(x)$
-2, 0	0, 000	-0, 5	0, 310	1, 0	0, 873	2, 5	0, 987
-1, 9	0, 001	-0, 4	0, 359	1, 1	0, 890	2, 6	0, 989
-1, 8	0, 002	-0, 3	0, 409	1, 2	0, 905	2, 7	0, 990
-1, 7	0, 005	-0, 2	0, 458	1, 3	0, 918	2, 8	0, 992
-1, 6	0, 009	-0, 1	0, 507	1, 4	0, 930	2, 9	0, 993
-1, 5	0, 015	0, 0	0, 554	1, 5	0, 939	3, 0	0, 994
-1, 4	0, 025	0, 1	0, 599	1, 6	0, 948	3, 1	0, 995
-1, 3	0, 038	0, 2	0, 641	1, 7	0, 955	3, 2	0, 996
-1, 2	0, 056	0, 3	0, 681	1, 8	0, 962	3, 3	0, 996
-1, 1	0, 078	0, 4	0, 717	1, 9	0, 967	3, 4	0, 997
-1, 0	0, 106	0, 5	0, 750	2, 0	0, 972	3, 5	0, 997
-0, 9	0, 139	0, 6	0, 780	2, 1	0, 976	4, 0	0, 999
-0, 8	0, 176	0, 7	0, 808	2, 2	0, 980	4, 5	0, 999
-0, 7	0, 217	0, 8	0, 832	2, 3	0, 983	5, 0	1, 000
-0, 6	0, 262	0, 9	0, 854	2, 4	0, 985		

Laat weer α die grootte van die tipe I fout wees, dan is die kritieke waardes vir 'n toets van grootte $1-\alpha$, vir 'n aantal keuses van α, bepaal. Om te bepaal hoe goed hierdie kritieke waardes dië van die verdeling van $2n(1 - r_n) - a_n^o$ benader wanneer n eindig is, is 1500 waardes van $2n(1 - r_n)$ gesimuleer vir sekere keuses van n. Hieruit is die kritieke waardes van die verdeling van $2n(1 - r_n) - a_n^o$ geskat. Hierdie resultate, tesame met die kritieke waardes van die asimptotiese verde= ling (d. w. s. vir $n = \infty$) word in die volgende tabel gegee:

TABEL 8. 4. 2. KRITIEKE WAARDES VAN DIE VERDELING VAN $2n(1 - r_n) - a_n^o$

	Kritieke waardes		
α	$n = 50$	$n = 100$	$n = \infty$
0, 20	0, 53	0, 67	0, 67
0,15	0, 76	0, 88	0, 88
0,10	1, 03	1, 27	1,16
0, 05	1, 53	1, 74	1, 63
0, 01	2, 66	2, 89	2, 65

Die geskatte waardes is soos in tabel 4. 8. 2 verkry deur van 3 generators gebruik te maak en die opmerkings na tabel 4. 8. 2 is ook hier van toepassing. Dit lyk dus asof die asimptotiese kritieke waardes 'n goeie benadering gee vir $n = 100$ terwyl hulle vir $n = 50$ ietwat te groot blyk te wees.

Die konstante a_n^o wat hierbo gebruik is, word in die volgende tabel gegee vir sekere keuses van n.

TABEL 8.4.3. WAARDES VAN DIE NORMERINGSKONSTANTE a_n^o

n	a_n^o	n	a_n^o
1	0,0000	50	1,0131
2	0,2282	60	1,0487
3	0,3550	70	1,0785
4	0,4391	80	1,1041
5	0,5006	90	1,1264
6	0,5485	100	1,1463
7	0,5875	150	1,2211
8	0,6203	200	1,2727
9	0,6485	300	1,3432
10	0,6733	400	1,3917
15	0,7646	500	1,4283
20	0,8264	600	1,4576
25	0,8732	700	1,4820
30	0,9107	800	1,5028
35	0,9420	900	1,5208
40	0,9688	1000	1,5368
45	0,9922		

HOOFSTUK 9

VERGELYKING VAN $2n(1 - r_n)$ MET 'N ANDER TOETSSTATISTIEK VIR DIE SAMEGESTELDE GEVAL

9.1 INLEIDING

In paragraaf 1.2 het ons gesien dat W_n^2 gebruik kan word as 'n toetsstatistiek vir die enkelvoudige hipotese $H_o : F(x) = \Phi(x)$.

Gestel nou ons wil die samegestelde hipotese $H_o : F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, vir een of ander μ en $\sigma > 0$, toets. Dit is duidelik dat 'n moontlike ekwivalent van W_n^2 in hierdie geval gegee word deur:

$$W_n^2(\bar{X}_n, s_n) = n \int_{-\infty}^{\infty} (G_n^*(y) - \Phi(\frac{y-\bar{X}_n}{s_n}))^2 d\Phi(\frac{y-\bar{X}_n}{s_n}) \qquad (9.1.1)$$

waar G_n^* die empiriese distribusiefunksie van die data is, terwyl $\bar{X}_n$ en s_n^2 die steekproef rekenkundige gemiddeld en variansie respektiewelik is. (Ons kies die gewigsfunksie, wat in (1.2.1) ter sprake is, in hierdie geval identies een.) $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$ kan ons nou gebruik as toetsstatistiek vir die samegestelde geval.

Dit volg direk dat $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$ skaal en translasie invariant is, sodat ons kan aanneem dat $\mu = 0$ en $\sigma = 1$. Uit (9.1.1) volg ook m.b.v. die transformasie

$$x = \Phi(\frac{y - \bar{X}_n}{s_n}) \text{ dat:}$$

$$W_n^2(\bar{X}_n, s_n) = n \int_o^1 (G_n^*(s_n H(x) + \bar{X}_n) - x)^2 dx.$$

Die statistiek $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$ is deur Kac, Kiefer en Wolfowitz (1955) ondersoek. Hulle het o.a. aangetoon dat onder H_o geld:

$$\lim_{n \to \infty} P(W_n^2(\bar{X}_n, s_n) \leq w) = P(W^2 \leq w)$$

waar die karakteristieke funksie van W^2 gegee word deur:

$$Ee^{itW^2} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 2it\rho_k)^{-\frac{1}{2}} \qquad (9.1.2)$$

met $\{\rho_k\}$ die eiewaardes van 'n bepaalde integraal vergelyking. (Sien paragraaf 2.6 van bogenoemde verwysing.)

In die volgende paragraaf sal ons die statistiek $2n(1 - r_n)$ (sien hoofstuk 7) t.o.v. Bahadur hellings vergelyk met $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$. Ons sal ook sekere tipes alter= natiewes gee waarvoor dit lyk asof $2n(1 - r_n)$ beter is as $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$.

In die daaropvolgende paragraaf bereken ons die asimptotiese verdeling (onder H_1) van $2n(1 - r_n)$ indien die alternatiewes 'n bepaalde vorm het. Dit stel ons in die laaste paragraaf in staat om die asimptotiese mag van die verdeling van $2n(1 - r_n)$ te vind.

9.2 VERGELYKING VAN $2n(1 - r_n)$ MET $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$ t.o.v. BENADERDE HELLINGS

In hierdie paragraaf sal ons $2n(1 - r_n)$ vergelyk met $W_n^2(\bar{X}_n, s_n)$. Om die teorie van paragraaf 5.1 op hierdie twee statistieke te kan toepas, beskou ons al= ternatiewes van 'n bepaalde vorm, nl. $H_1 : F^{-1}(x) = F_\theta^{-1}(x) = H(x) + G_\theta(x)$, waar G_θ sô gekies moet word dat F_θ 'n distribusiefunksie is. Ons kies G_θ ook sô dat $G_o \equiv 0$, d.w.s. H_o reduseer na $H_o : \theta = 0$. Ons bepaal vervolgens die benaderde hellings van die twee statistieke, onder sekere kondisies op die funksie G_θ.

Beskou eerstens $2n(1 - r_n)$. Ons het dat:

$$r_n = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} H_{jn} X_{jn} / s_n t_n.$$

Gestel nou H_1 is waar. Dan is:

$$X_{jn} = F_\theta^{-1}(U_{jn})$$

$$= H(U_{jn}) + G_\theta(U_{jn}).$$

Die teller van r_n word dan:

$$n^{-1}\sum_j H_{jn}H(U_{jn}) + n^{-1}\sum_j H_{jn}G_\theta(U_{jn}).$$

Dit volg maklik dat:

$$|n^{-1}\sum_j H_{jn}H(U_{jn}) - \int_0^1 H(x)^2dx| = o_p(1) \text{ as } n\to\infty,$$

$$\therefore\ |n^{-1}\sum_j H_{jn}H(U_{jn}) - 1| = o_p(1) \text{ as } n\to\infty.$$

Gestel nou dat:

$$|n^{-1}\sum_j H_{jn}G_\theta(U_{jn}) - I(\theta)| = o_p(1) \text{ as } n\to\infty \qquad (9.2.1)$$

met $|I(\theta)| < \infty$. Vir 'n redelike wye klas van funksies G_θ sou ons verwag dat:

$$I(\theta) = \int_0^1 H(x)G_\theta(x)dx. \qquad (9.2.2)$$

Indien (9. 2. 1) geld volg dus dat die teller van r_n in waarskynlikheid kon=vergeer na $1 + I(\theta)$, as $n\to\infty$.

Voorts het ons dat:

$$s_n^2 = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{jn} - \bar{X}_n)^2$$

$$= n^{-1}\sum_j[(H(U_{jn}) + G_\theta(U_{jn})) - n^{-1}\sum_i(H(U_{in}) + G_\theta(U_{in}))]^2$$

$$= n^{-1}\sum_j(H(U_{jn}) - n^{-1}\sum_i H(U_{in}))^2 + n^{-1}\sum_j(G_\theta(U_{jn}) - n^{-1}\sum_i G_\theta(U_{in}))^2$$

$$+ 2n^{-1}\sum_j(H(U_{jn}) - n^{-1}\sum_i H(U_{in}))(G_\theta(U_{jn}) - n^{-1}\sum G_\theta(U_{in})).$$

Die eerste term is duidelik die steekproef variansie van 'n steekproef van grootte n uit 'n N(0, 1)verdeling, en konvergeer dus byna seker na 1 as $n \to \infty$.

Gestel dat:

$$\left|n^{-1} \sum_j (G_\theta(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i G_\theta(U_{in}))^2 - I_1(\theta)\right|$$

$$= o_p(1) \text{ as } n \to \infty, \qquad (9.2.3)$$

en:

$$\left|n^{-1} \sum_j (G(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i H(U_{in}))(G_\theta(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i G_\theta(U_{in})) - I_2(\theta)\right| = o_p(1) \text{ as } n \to \infty, \qquad (9.2.4)$$

met $|I_1(\theta)|$, $|I_2(\theta)| < \infty$.

Soos hierbo sou ons vir 'n wye klas funksies verwag dat:

$$I_1(\theta) = \int_0^1 (G_\theta(x) - \bar{G}_\theta)^2 dx, \qquad (9.2.5)$$

met $\bar{G}_\theta = \int_0^1 G_\theta(x)dx$, en:

$$I_2(\theta) = \int_0^1 (H(x) - \bar{H})(G_\theta(x) - \bar{G}_\theta)dx$$

$$= \int_0^1 H(x)(G_\theta(x) - \bar{G}_\theta)dx$$

$$= \int_0^1 H(x)G_\theta(x)dx = I(\theta), \qquad (9.2.6)$$

waar $\bar{H} = \int_0^1 H(x)dx = 0$.

Laat $g(\theta) = (1 + I_1(\theta) + 2I_2(\theta))^{\frac{1}{2}}$. Indien (9.2.1), (9.2.3) en (9.2.4) geld, volg dus dat:

$$r_n = \frac{1 + I(\theta)}{g(\theta)} + o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Ons kry nou die volgende:

Stelling 9.1: Indien (9.2.1), (9.2.3) en (9.2.4) geld dan word die benaderde helling van

$2n(1 - r_n) - a_n^o$ gegee deur:

$$c_1(\theta) = 6[1 - \frac{1 + I(\theta)}{g(\theta)}].$$

<u>Bewys</u>: Onder H_o het ons volgens stelling 8. 1 dat:

$$D(2n(1 - r_n) - a_n^o) \to D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1)) \text{ as } n \to \infty.$$

Dit is duidelik dat stelling 5. 1 hier van toepassing is met $d = 3/2$, d. w. s. $a = 3$. Aangesien $n^{-1}a_n^o = o(1)$ as $n \to \infty$ (sien die bewys van stelling 8. 1) volg uit die bespreking hierbo dat kondisie SIII van paragraaf 5. 1 bevredig word met:

$$b(\theta) = 2(1 - \frac{1 + I(\theta)}{g(\theta)}).$$

Die stelling volg nou direk uit die feit dat $c_1(\theta) = a \cdot b(\theta)$.

<u>Opmerking</u>: Hierdie stelling gee ons die vorm van die benaderde helling $c_1(\theta)$ onder redelik eenvoudige kondisies. Ons sou dus verwag dat die stelling van toe= passing is op 'n redelike wye klas funksies G_θ.

Beskou vervolgens die statistiek $W_n^2(\bar{X}_n, s_n) = W_n^2$ (sê).

Ons het onder H_1 dat:

$$\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_{jn} = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} G_\theta(U_{jn}).$$

Gestel dat:

$$|\bar{X}_n - I_3(\theta)| = o_p(1) \text{ as } n \to \infty, \tag{9. 2. 7}$$

met $|I_3(\theta)| < \infty$. Soos tevore sou ons vir 'n wye klas funksies verwag dat:

$$I_3(\theta) = \int_0^1 G_\theta(x)dx. \tag{9. 2. 8}$$

Gestel nou dat:

$$n^{-1}W_n^2 = \int_0^1 (F_\theta(g(\theta)H(x) + I_3(\theta)) - x)^2 dx + o_p(1) \text{ as } n \to \infty, \tag{9. 2. 9}$$

met $g(\theta)$ soos hierbo.

Opmerking: Uit die feit dat $\sup_x |G_n^*(x) - F_\theta(x)| = o(1)$ as $n \to \infty$, met waarskynlikheid 1 onder H_1, en uit (9. 2. 3), (9. 2. 4) en (9. 2. 7) volg dat hierdie 'n redelike aanname is om te maak.

Hierdie aannames stel ons in staat om die volgende te bewys:

Stelling 9. 2: Indien (9. 2. 3), (9. 2. 4) en (9. 2. 9) geld, dan word die benaderde hel= ling van W_n^2 gegee deur:

$$c_2(\theta) = 54,466 \int_0^1 (F_\theta(g(\theta)H(x) + I_3(\theta)) - x)^2 dx.$$

Bewys: Uit (9. 2. 9) volg direk dat kondisie SIII van paragraaf 5. 1 bevredig word met:

$$b(\theta) = \int_0^1 (F_\theta(g(\theta)H(x) + I_3(\theta)) - x)^2 dx.$$

Kac, Kiefer en Wolfowitz (1955) het ook aangetoon dat:

$$\rho_1 = \max_{k \geq 1} \rho_k = 0,01836.$$

Uit (9. 1. 2) en stelling 5. 1 volg dus dat $d = \frac{1}{2}\rho_1$ en $a = 1/\rho_1 = 54,466$.

Die stelling volg nou direk.

Opmerking: Stellings 9. 1 en 9. 2 stel ons dus in staat om $2n(1 - r_n)$ en W_n^2 t. o. v. benaderde hellings met mekaar te vergelyk. In hoofstuk 5 het ons gesien dat ons

$\lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_2(\theta)}$ kan gebruik om die twee statistieke te vergelyk. Ons gee vervolgens 'n stelling wat die waarde van hierdie limiet onder sekere voorwaardes gee.

Laat $g(\theta)$ soos hierbo wees, en beskou die volgende kondisies:

(HS1) (9. 2. 1), (9. 2. 3), (9. 2. 4) en (9. 2. 9) geld, d. w. s. $c_1(\theta)$ en $c_2(\theta)$ word gegee deur die uitdrukkings in stellings 9. 1 en 9. 2 respektiewelik.

(HS2) $I(\theta) = o(1)$ en $I_i(\theta) = o(1)$ as $\theta \to 0$, vir $i = 1, 2, 3$.

(HS3) $I'(0) = \lim_{\theta \to 0} I'(\theta)$

$I''(0) = \lim_{\theta \to 0} I''(\theta)$

$I_i'(0) = \lim_{\theta \to 0} I_i'(\theta)$, $i = 1, 2, 3$

$I_i''(0) = \lim_{\theta \to 0} I_i''(\theta)$, $i = 1, 2$

$G_0'(y) = \lim_{\theta \to 0} G_\theta'(y) (G_\theta' = \frac{d}{d\theta} G_\theta)$ en $\lim_{\theta \to 0} (g'(\theta) - I'(\theta)) = 0$,

waar ons aanneem dat al die afgeleides en limiete bestaan.

(HS4) F_θ het 'n digtheidsfunksie f_θ, d.w.s. $F_\theta'(x) = f_\theta(x)$, en:

$$\lim_{\theta \to 0} \int_0^1 \left(\frac{\Phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right) - y}{\theta} \right)^2 \phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right) \frac{dy}{g(\theta) f_\theta(F^{-1}(y))}$$

$$= \int_0^1 \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\Phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right) - y}{\theta} \right)^2 \phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right) \frac{dy}{g(\theta) f_\theta(F_\theta^{-1}(y))}$$

met beide limiete eindig.

Vooraf gee ons 'n resultaat wat ons in die volgende stelling sal gebruik:

<u>Lemma 9.1</u>: Met $g(\theta) = (1 + I_1(\theta) + 2I_2(\theta))^{\frac{1}{2}}$ geld:

$g'(0) = \frac{1}{2}(I_1'(0) + 2I_2'(0))$ en:

$g''(0) = \frac{1}{2}(I_1''(0) + 2I_2''(0)) - 1/4(I_1'(0) + 2I_2'(0))^2$.

<u>Bewys</u>: Dit volg direk deur differensiasie.

Ons kry nou die volgende:

<u>Stelling 9.3</u>: Indien (HS1) - (HS4) geld, dan is:

$$L_{12} = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_2(\theta)}$$

$$= \frac{3[\frac{1}{2}(I''_1(0) + 2I''_2(0)) - 1/4(I'_1(0) + 2I'_2(0))^2 - I''(0)]}{54,466 \int_0^1 \phi(H(y))^2[G'_o(y) - I'_3(0) - \frac{1}{2}(I'_1(0) + 2I'_2(0))H(y)]^2 dy} \cdot$$

<u>Bewys</u>: Volgens stelling 9. 1 geld:

$$c_1(\theta) = 6[1 - \frac{1 + I(\theta)}{g(\theta)}] \sim 6[g(\theta) - 1 - I(\theta)] \text{ as } \theta \to 0, \text{ volgens (HS2).}$$

Pas ons nou l'Hospital se reël toe, dan volg dat:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{\theta^2} = 6 \lim_{\theta \to 0} \frac{g(\theta) - 1 - I(\theta)}{\theta^2}$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0} \frac{g'(\theta) - I'(\theta)}{\theta}$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0} (g''(\theta) - I''(\theta))$$

$$= 3(g''(0) - I''(0))$$

$$= 3[\tfrac{1}{2}(I''_1(0) + 2I''_2(0)) - 1/4(I'_1(0) + 2I'_2(0))^2 - I''(0)],$$

volgens lemma 9. 1.

Voorts geld volgens stelling 9. 2 dat:

$$c_2(\theta) = 54,466 \int_0^1 [F_\theta(g(\theta)H(x) + I_3(\theta)) - x]^2 dx.$$

Stel: $y = F_\theta(g(\theta)H(x) + I_3(\theta))$

$$\therefore x = \Phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right)$$

en $dx = \phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right) \cdot \frac{dy}{g(\theta)f_\theta(F_\theta^{-1}(y))} \to dy$ as $\theta \to 0$.

Pas ons l'Hospital se reël toe, dan volg dat:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\Phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right) - y}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \phi\left(\frac{F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta)}{g(\theta)}\right)\left[\frac{g(\theta)(G_\theta'(y) - I_3'(\theta)) - g'(\theta)(F_\theta^{-1}(y) - I_3(\theta))}{g(\theta)^2}\right]$$

$$= \phi(H(y))(G_o'(y) - I_3'(0) - g'(0)H(y)).$$

Met behulp van lemma 9.1 volg dus:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{c_2(\theta)}{\theta^2} = 54,466 \int_o^1 \phi(H(y))^2[G_o'(y) - I_3'(0) - \tfrac{1}{2}(I_1'(0) + 2I_2'(0))H(y)]^2 dy.$$

Die stelling volg nou direk uit die feit dat:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_2(\theta)} = \left(\lim_{\theta \to 0} \frac{c_1(\theta)}{\theta^2}\right)\left(\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^2}{c_2(\theta)}\right).$$

<u>Opmerking</u>: Beskou die spesiale geval waar $G_\theta(x) = \theta G(x)$, vir een of ander funksie G. Gestel ook dat $I(\theta)$, $I_1(\theta)$, $I_2(\theta)$ en $I_3(\theta)$ word respektiewelik gegee deur (9.2.2), (9.2.5), (9.2.6) en (9.2.8). In hierdie geval is dus:

$$G_o'(x) = G(x)$$

$$I(\theta) = \theta \int_o^1 H(x)G(x)dx \;(= I_2(\theta))$$

$$\therefore\; I'(0) = \int_o^1 H(x)G(x)dx = \overline{HG} \text{ (sê), en } I''(0) = 0.$$

Ook is:

$$I_1(\theta) = \theta^2 \int_o^1 (G(x) - \overline{G})^2 dx \text{ met } \overline{G} = \int_o^1 G(x)dx$$

$$\therefore\; I_1'(0) = 0 \text{ en:}$$

$$I_1''(0) = 2 \int_o^1 (G(x) - \overline{G})^2 dx = 2S^2(G) \qquad \text{(sê).}$$

Ten slotte is:

$$I_3(\theta) = \theta \int_0^1 G(x)dx = \theta\bar{G}$$

$$\therefore\ I_3'(0) = \bar{G}.$$

Stelling 9. 3 reduseer dus in hierdie geval na:

$$L_{12} = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_1(\theta)}{c_2(\theta)} = \frac{3[S^2(G) - (\overline{HG})^2]}{54,466 \int_0^1 \phi(H(y))^2[G(y) - \bar{G} - (\overline{HG})H(y)]^2dy} \qquad (9.2.10)$$

In die voorbeelde wat volg sal ons uitsluitlik van hierdie vorm van stelling 9. 3 gebruik maak.

Voorbeelde: Ons beskou vervolgens 'n aantal voorbeelde waar stelling 9. 3 van toe=passing is. Die verifikasie van die kondisies van stelling 9. 3 volg maklik en ons sal dit nie hier bespreek nie.

(i) Laat H_1 : $F_\theta^{-1} = H + \theta H^3$, d. w. s. $G(x) = H(x)^3$. Dit is duidelik dat F_θ 'n distri=busiefunksie is wat meer gewig op die stert plaas as Φ.

In hierdie geval is

$\bar{G} = 0$, sodat:

$S^2(G) = \int_0^1 G(x)^2dx = \int_0^1 H(x)^6dx = 15$,

en $\overline{HG} = \int_0^1 H(x)^4dx = 3$.

Die teller van (9. 2. 10) word:

$$3(15 - (3)^2) = 18.$$

Die integraal in die noemer van (9. 2. 10) word:

$$\int_0^1 \phi(H(x))^2(H(x)^3 - 3H(x))^2dx$$

$$= \int_0^1 \phi(H(x))^2(H(x)^6 - 6H(x)^4 + 9H(x)^2)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^6\phi(y)^3dy - 6\int_{-\infty}^{\infty} y^4\phi(y)^3dy + 9\int_{-\infty}^{\infty} y^2\phi(y)^3dy$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)15 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)3 + 9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

$$= 0,1429$$

$$\therefore \; L_{12}^{(1)} = \frac{18}{54,466\ (0,1429)} = 2,3127$$

$\therefore$ $2n(1 - r_n)$ is in hierdie geval beter as W_n^2.

(ii) Laat: $H_1 : F_\theta^{-1} = H + \theta H^5$, d.w.s. $G(x) = H(x)^5$. Hierdie alternatiewes plaas nog meer gewig op die sterte as dié in (i). Soos by (i) volg dat:

$$L_{12}^{(2)} = 6,9362 \; (> L_{12}^{(1)}).$$

(iii) As 'n derde voorbeeld beskou ons $H_1 : F_\theta^{-1}(x) = H(x) + \theta(\frac{1}{2} - x)$, d.w.s. $G(x) = \frac{1}{2} - x$. Hierdie alternatiewes plaas weer meer gewig in die middel as Φ.

Ons het weer dat $\overline{G} = 0$ en:

$$S^2(G) = \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - x)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Werk ons $\overline{HG}$ numeries uit, dan word die teller van (9.2.10):

$$3(0,083333 - (0,282)^2)$$

$$= 0,011427.$$

Die integraal in die noemer van (9.2.10) word deur numeriese integrasie gevind as:

$$\int_0^1 \phi(H(x))^2 [(\tfrac{1}{2} - x) + (0,282)H(x)]^2 dx$$

$$= 0,0001626$$

$$\therefore \; L_{12}^{(3)} = \frac{0,011427}{54,466\ (0,0001626)} = 1,2903 \; (< L_{12}^{(1)}).$$

Ook in hierdie geval vaar $2n(1 - r_n)$ nog beter as W_n^2.

(iv) As 'n ander tipe alternatief, laat:

$$H_1 : F_\theta^{-1} = H + \theta G, \text{ met:}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ vir } x \geq \frac{1}{2} \\ H(x)^3 \text{ vir } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hierdie alternatiewes verskil van Φ deurdat hulle nie simmetries is nie, maar skeef.

Ons het dat:

$$\overline{G} = \int_0^{\frac{1}{2}} H(x)^3 dx = \int_{-\infty}^{0} x^3 \phi(x) dx$$

$$= -2/\sqrt{2\pi}$$

$$S^2(G) = \int_0^{\frac{1}{2}} H(x)^6 dx - 4/2\pi$$

$$= 15/2 - 2/\pi = 6,863380.$$

Ook is:

$$\overline{HG} = \int_0^{\frac{1}{2}} H(x)^4 dx = 3/2 = 1,5.$$

Die teller van (9.2.10) word: $3(6,863380 - (1,5)^2)$

$$= 13,840140.$$

Die integraal in die noemer van (9.2.10) word:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 [H(x)^3 + 2/\sqrt{2\pi} - 1,5H(x)]^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \phi(H(x))^2 [2/\sqrt{2\pi} - 1,5\,H(x)]^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^6 dx + 4/2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 dx + 2,25 \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^2 dx$$

$$+ 4/\sqrt{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^3 dx - 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^4 dx - 6/\sqrt{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x) dx$$

$$+ 4/2\pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \phi(H(x))^2 dx + 2,25 \int_{\frac{1}{2}}^{1} \phi(H(x))^2 H(x)^2 dx - 6/\sqrt{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \phi(H(x))^2 H(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^6 dx + 4/2\pi \int_0^{1} \phi(H(x))^2 dx + 2,25 \int_0^{1} \phi(H(x))^2 H(x)^2 dx$$

$$+ 4/2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^3 dx - 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(H(x))^2 H(x)^4 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^6(\tfrac{1}{\sqrt{3}})(\tfrac{1}{2\pi}) .\ 15 + \tfrac{4}{2\pi}(\tfrac{1}{\sqrt{3}})(\tfrac{1}{2\pi}) + 2,25(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2(\tfrac{1}{\sqrt{3}})(\tfrac{1}{2\pi}) + \tfrac{4}{\sqrt{2\pi}}(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^3(\tfrac{1}{\sqrt{3}})(\tfrac{1}{2\pi})(-\tfrac{2}{\sqrt{2\pi}})$$

$$- 3/2(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^4(\tfrac{1}{\sqrt{3}})(\tfrac{1}{2\pi}) .\ 3$$

$$= 0,099296$$

$$\therefore L_{12}^{(4)} = \frac{13,840140}{54,466\ (0,099296)}$$

$$= 2,5591\ (>1),$$

sodat $2n(1 - r_n)$ in hierdie geval beter is as W_n^2.

(v) Laat ten slotte:

$$H_1 : F_\theta^{-1} = H + \theta G, \quad \text{met:}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ vir } x \geq \frac{1}{2} \\ H(x) \text{ vir } x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Hierdie alternatiewes is minder skeef as dié in (v), maar ook nie simmetries nie.

Gaan ons nou soos hierbo te werk, dan volg:

$$L_{12}^{(5)} = 0,9276 \quad (<1),$$

sodat W_n^2 in hierdie geval beter vaar as $2n(1 - r_n)$.

<u>Opmerking</u>: Alhoewel hierdie voorbeelde nie in die algemeen iets bewys nie, wil dit tog voorkom of ons die volgende kan konkludeer:

(i) Hoe platter die alternatiewe verdelings, hoe beter vaar $2n(1 - r_n)$ teen W_n^2.

(ii) Hoe skewer die alternatiewe verdelings, hoe beter vaar $2n(1 - r_n)$ teen W_n^2.

9.3 DIE ASIMPTOTIESE VERDELING VAN $2n(1 - r_n)$ ONDER ALTERNATIEWE HIPOTESES

Beskou die alternatiewe hipoteses : $H_1 : F_n^{-1} = H + n^{-\frac{1}{2}}G_n$, waar G_n 'n funksie op (0, 1) is wat só gekies moet word dat F_n 'n distribusiefunksie is. Ons sal in hierdie paragraaf die asimptotiese verdeling van $2n(1 - r_n)$ onder H_1 vind. In die volgende paragraaf pas ons dit dan toe op 'n bepaalde keuse van G_n.

Nou, onder H_1 is:

$$X_{jn} = F_n^{-1}(U_{jn})$$

$$= H(U_{jn}) + n^{-\frac{1}{2}}G_n(U_{jn}).$$

Onder H_1 word die teller van r_n dus:

$$n^{-1}\sum_j X_{jn}H_{jn} = n^{-1}\sum_j H_{jn}H(U_{jn}) + n^{-3/2}\sum_j H_{jn}G_n(U_{jn}).$$

Pas ons 'n Taylor ontwikkeling toe op $H(U_{jn})$ en $G_n(U_{jn})$ dan is:

$$H(U_{jn}) = H_{jn} + V_{jn}H'_{jn} + 1/2V_{jn}^2 H''(U^*_{jn}) \text{ en } G_n(U_{jn}) = G_n(j/n+1) + V_{jn}G'_n(U^{**}_{jn})$$

met U^*_{jn} en U^{**}_{jn} tussen U_{jn} en $j/n+1$. (Ons neem aan dat G_n minstens 'n eerste orde afgeleide besit.) Met behulp van hierdie ontwikkelings word die teller van r_n dus:

$$n^{-1}\sum_j H_{jn}^2 + n^{-1}\sum_j V_{jn}H_{jn}H'_{jn} + n^{-3/2}\sum_j H_{jn}G_n(j/n+1) + \tfrac{1}{2}n^{-1}\sum_j V_{jn}^2H_{jn}H''(U^*_{jn})$$

$$+ n^{-3/2}\sum_j V_{jn}H_{jn}G'_n(U^{**}_{jn})$$

$$= t_n^2 + n^{-1}\sum_j V_{jn}H_{jn}H'_{jn} + n^{-3/2}\sum_j H_{jn}G_n(j/n+1) + R_{1n},$$

met $t_n^2 = n^{-1}\sum_j H_{jn}^2$ soos tevore, en

$$R_{1n} = \tfrac{1}{2}n^{-1}\sum_j V_{jn}^2H_{jn}H''(U^*_{jn}) + n^{-3/2}\sum_j V_{jn}H_{jn}G'_n(U^{**}_{jn}).$$

Voorts het ons onder H_1 dat:

$$n^{-1}\sum_j X_{jn}^2 = n^{-1}\sum_j [H(U_{jn}) + n^{-1/2}G_n(U_{jn})]^2$$

$$= n^{-1}\sum_j [H_{jn} + V_{jn}H'_{jn} + n^{-1/2}G_n(j/n+1) + 1/2\, V_{jn}^2 H''(U^*_{jn}) + n^{-1/2}V_{jn}G'_n(U^{**}_{jn})]^2$$

$$= n^{-1}\sum_j H_{jn}^2 + n^{-1}\sum_j V_{jn}^2 h_{jn} + 2n^{-1}\sum_j V_{jn}H_{jn}H'_{jn} + 2n^{-3/2}\sum_j V_{jn}H'_{jn}G_n(j/n+1)$$

$$+ n^{-1}\sum_j G_n^2(j/n+1) + 2n^{-3/2}\sum_j H_{jn}G_n(j/n+1) + R_{2n}$$

$$= t_n^2 + n^{-1}\, Q_n + 2w_n + 2P_n + n^{-1}d_n + n^{-1}b_n + R_{2n}$$

waar:

$$Q_n = Q_n^{(h)} = \sum_j V_{jn}^2 h_{jn},\ \text{soos tevore,}$$

$$w_n = n^{-1}\sum_j V_{jn}H_{jn}H'_{jn},\ \text{soos in paragraaf 7. 2,}$$

$$P_n = n^{-3/2}\sum_j V_{jn}H'_{jn}G_n(j/n+1),$$

$$d_n = n^{-1}\sum_j G_n^2\,(j/n+1),$$

$$b_n = 2n^{-1/2}\sum_j H_{jn}G_n(j/n+1),\ \text{en:}$$

$$R_{2n} = 2R_{1n} + n^{-1}\sum_j V_{jn}^3 H'_{jn}H''(U^*_{jn}) + 2n^{-3/2}\sum_j V_{jn}^2 H'_{jn}G'_n(U^{**}_{jn}) + n^{-3/2}\sum_j V_{jn}^2 G_n(j/n+1)H''(U^*_{jn})$$

$$+ 2n^{-2}\sum_j V_{jn}G_n(j/n+1)G'_n(U^{**}_{jn}) + 1/4\, n^{-1}\sum_j V_{jn}^4 H''(U^*_{jn})^2 + n^{-2}\sum_j V_{jn}^2 G'_n(U^{**}_{jn})^2.$$

Ook is:

$$\bar{X}_n = n^{-1}\sum_j X_{jn}$$

$$= n^{-1}\sum_j (H(U_{jn}) + n^{-1/2}G_n(U_{jn}))$$

$$= n^{-1} \sum_j (H_{jn} + V_{jn}H'_{jn} + n^{-1/2}G_n(j/n+1) + 1/2\, V^2_{jn}\, H''(U^*_{jn}) + n^{-1/2}V_{jn}G'_n(U^{**}_{jn}))$$

$$= n^{-1} \sum_j V_{jn}H'_{jn} + n^{-3/2} \sum_j G_n(j/n+1) + R_{3n}$$

waar: $R_{3n} = 1/2\, n^{-1} \sum_j V^2_{jn} H''(U^*_{jn}) + n^{-3/2} \sum_j V_{jn} G_n(U^{**}_{jn})$.

Onder H_1 vind ons dus dat:

$$s^2_n t^2_n (1 - r^2_n) = s^2_n t^2_n - (n^{-1} \sum_j X_{jn} H_{jn})^2$$

$$= t^2_n\, [t^2_n + n^{-1}\, Q_n + 2w_n + 2P_n + n^{-1} d_n + n^{-1} b_n + R_{2n} - (n^{-1} \sum_j V_{jn} H'_{jn} + n^{-3/2} \sum_j G_n(j/n+1)$$

$$+ R_{3n})^2] - [t^2_n + w_n + \tfrac{1}{2} n^{-1} b_n + R_{1n}]^2$$

$$= n^{-1}\, t^2_n\, K_n + (2t^2_n\, P_n - 2t^2_n\, n^{-1/2}\, \bar{G}_n (n^{-1} \sum_j V_{jn} H'_{jn}) - 2n^{-1/2} (\overline{HG}_n) w_n)$$

$$+ (n^{-1} t^2_n d_n - n^{-1} t^2_n (\bar{G}_n)^2 - n^{-1} (\overline{HG}_n)^2) + R_{4n}$$

$$= n^{-1} t^2_n (K_n + Lr_n) + n^{-1} C_n + R_{5n}$$

waar K_n soos in paragraaf 7. 2 is, terwyl:

$$\bar{G}_n = n^{-1} \sum_j G_n(j/n+1),$$

$$\overline{HG}_n = n^{-1} \sum_j H_{jn}\, G_n(j/n+1),$$

$$Lr_n = 2n^{-1/2} \sum_j V_{jn} H'_{jn} G_n(j/n+1) - 2n^{-1/2} \bar{G}_n \sum_j V_{jn} H'_{jn} - 2n^{-1/2} (\overline{HG}_n) \sum_j V_{jn} H_{jn} H'_{jn}$$

$$C_n = t^2_n d_n - t^2_n (\bar{G}_n)^2 - (\overline{HG}_n)^2.$$

Ten slotte is:

$$R_{4n} = t^2_n\, R_{2n} - 2R_{3n} t^2_n (n^{-1} \sum_j V_{jn} H'_{jn} + n^{-3/2} \sum_j G_n(j/n+1)) - t^2_n R^2_{3n} - 2R_{1n} (t^2_n + w_n + \tfrac{1}{2} n^{-1} b_n))$$

$$- R_{1n}^2 + w_n^2(t_n^2 - 1)$$

en $$R_{5n} = R_{4n} + 2(t_n^2 - 1)n^{-1/2}\overline{(HG_n)}w_n.$$

In paragraaf 7. 2 het ons gesien dat:

$$K_n = (n+1/S_{n+1})^2(n+1)^{-1}\sum_{i,j} c^o_{ijn+1} Z_iZ_j.$$

Beskou nou die term Lr_n. Pas ons die tegniek van paragraaf 1. 3 daarop toe, dan volg dat:

$$Lr_n = (n+1/S_{n+1})(n+1)^{-1/2}\sum_{i=1}^{n+1} d_{in+1} Z_i$$

met:

$$d_{in+1} = 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}(n+1)^{-1}\sum_{k=1}^{n} \psi_{ikn}(H'_{kn}G_n(k/n+1) - \bar{G}_nH'_{kn} - \overline{(HG_n)}H_{kn}H'_{kn}).$$

Hieruit volg dus dat:

$$ns_n^2t_n^2(1 - r_n^2) = t_n^2(n+1/S_{n+1})^2[(n+1)^{-1}\sum_{i,j} c^o_{ijn+1}Z_iZ_j + (n+1)^{-1/2}\sum_i d_{in+1}Z_i] + C_n + nR_{6n} \qquad (9.3.1)$$

$$= t_n^2(n+1/S_{n+1})^2T_{n+1} + C_n + nR_{6n}$$

met $T_n = n^{-1}\sum_{i,j} c^o_{ijn}Z_iZ_j + n^{-1/2}\sum_i d_{in}Z_i$

en:

$$R_{6n} = R_{5n} + n^{-1}(n+1/S_{n+1})(1 - \frac{n+1}{S_{n+1}})(n+1)^{-1/2}\sum_i d_{in+1}Z_i.$$

Laat nou $\gamma_m = m^{-1}$ en $b_{imn} = g_m(i/n+1)$, soos in hoofstuk 8.

Stel ook:

$$d(x) = 2\int_0^1 \psi(x, y)H'(y)(G(y) - \bar{G} - \overline{(HG)}H(y))dy$$

waar G só is dat $G_n \to G$ as $n \to \infty$, terwyl $\bar{G} = \int_0^1 G(x)dx$ en $\overline{HG} = \int_0^1 H(x)G(x)dx$.

Laat ook:

$\delta_m = \int_0^1 d(x)g_m(x)dx$, $m = 3, 4, \ldots$, terwyl a_n^o soos in paragraaf 8.3 gedefinieer word. Beskou die volgende kondisies:

(MS1) $nR_{6n} = o_p(1)$ as $n \to \infty$,

(MS2) $C_n = C + o(1)$, as $n \to \infty$, waar C 'n eindige konstante is.

(MS3) As $n \to \infty$ geld dat:

(i) $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} H_{jn} G_n(U_{jn}) = O_p(1)$

(ii) $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (G_n(U_{jn}) - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} G_n(U_{in}))^2 = O_p(1)$

(iii) $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} (H(U_{jn}) - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} H(U_{in}))(G_n(U_{jn}) - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} G_n(U_{in})) = O_p(1)$.

(MS4) $\{d_{in}\}$ en $\{\delta_m\}$ voldoen aan kondisies (D2), (BΔ1) en (DBΔ1) van stelling 2.4.

Ons het dan die volgende:

<u>Stelling 9.4</u>: Indien H_1 en kondisies (MS1), (MS2), (MS3) en (MS4) geld, dan sal:

$$D(2n(1 - r_n) - a_n^o) \to D\left(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=3}^{\infty} \delta_m Y_m + C\right) \text{ as } n \to \infty.$$

<u>Bewys</u>: Uit (9.3.1) en kondisies (MS1) en (MS2) volg dat:

$$ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) = t_n^2(n+1/S_{n+1})^2 T_{n+1} + C + o_p(1)$$

$$\therefore\ ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) - a_n^o = t_n^2 (n+1/S_{n+1})^2 (T_{n+1} - a_n^o) + C + a_n^o(t_n^2(n+1/S_{n+1})^2 - 1) + o_p(1),$$

as $n \to \infty$.

Uit die bewys van stelling 8. 1 weet ons dat:

$$a_n^o(t_n^2(n+1/S_{n+1})^2 - 1) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

$$\therefore \quad ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) = t_n^2(n+1/S_{n+1})^2(T_{n+1} - a_n^o) + C + o_p(1). \qquad (9.3.2)$$

Met behulp van paragraaf 8. 3 en (MS4) volg uit stelling 2. 4 dat:

$$D(T_{n+1} - a_n^o) \to D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=3}^{\infty} \delta_m Y_m) \text{ as } n \to \infty.$$

Dit volg dus direk uit (9. 3. 2) dat:

$$D(ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) - a_n^o) \to D(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=3}^{\infty} \delta_m Y_m + C) \text{ as } n \to \infty. \qquad (9.3.3)$$

Voorts het ons dat:

$$ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) - a_n^o = s_n^2 t_n^2(n(1 - r_n^2) - a_n^o) + a_n^o(s_n^2 t_n^2 - 1).$$

Nou het ons dat:

$$s_n^2 = n^{-1} \sum_j (X_{jn} - \bar{X}_n)^2$$

$$= n^{-1} \sum_j (H(U_{jn}) - n^{-1/2} G_n(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i H(U_{in}) - n^{-3/2} \sum_i G_n(U_{in}))^2$$

$$= n^{-1} \sum_j (H(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i H(U_{in}))^2 + n^{-2} \sum_j (G_n(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i G_n(U_{in}))^2$$

$$+ 2n^{-3/2} \sum_j (H(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i H(U_{in}))(G_n(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i G_n(U_{in}))$$

$$= s_{on}^2 + O_p(n^{-1/2}), \text{ volgens (MS3)},$$

waar $s_{on}^2 = n^{-1} \sum_j (H(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i H(U_{in}))^2$,

d. w. s. s_{on}^2 is die steekproef variansie van 'n steekproef van grootte n uit 'n N(0, 1) verdeling. Volgens (8. 3. 4) is dus:

$$s_{on}^2 = 1 + O_p(n^{-1/2}) \text{ as } n \to \infty.$$

$$\therefore \quad s_n^2 = 1 + O_p(n^{-1/2}) \text{ as } n \to \infty.$$

Maar $t_n^2 = 1 + o(n^{-1/2})$ as $n \to \infty$, sodat dus:

$$s_n^2 t_n^2 = 1 + O_p(n^{-1/2}) \text{ as } n \to \infty. \qquad (9.3.4)$$

Ook is $a_n^o = O(\log n)$ sodat volg dat:

$$a_n^o(s_n^2 t_n^2 - 1) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

$$\therefore \quad ns_n^2 t_n^2(1 - r_n^2) - a_n^o = s_n^2 t_n^2(n(1 - r_n^2) - a_n^o) \text{ as } n \to \infty.$$

Hierdie tesame met (9. 3. 3) lewer dan:

$$D(n(1 - r_n^2) - a_n^o) \to D\left(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=3}^{\infty} \delta_m Y_m + C\right) \text{ as } n \to \infty. \qquad (9.3.5)$$

Hieruit volg dat $n(1 - r_n)(1 + r_n) - a_n^o$ 'n asimptotiese verdeling het, sodat dus:

$$n^{1/2}(1 - r_n)(1 + r_n) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty\,. \qquad (9.3.6)$$

Nou is: $r_n = \dfrac{n^{-1}\sum_j X_{jn} H_{jn}}{s_n t_n}$ en $n^{-1}\sum_j X_{jn} H_{jn} = n^{-1}\sum_j H_{jn} H(U_{jn}) + n^{-3/2}\sum_j H_{jn} G_n(U_{jn})$

$$= n^{-1}\sum_j H_{jn} H(U_{jn}) + O_p(n^{-1/2}), \text{ volgens (MS3)(i).}$$

Met behulp van opmerking (i) van paragraaf 7. 1 volg dat:

$$D((2n)^{\frac{1}{2}}(n^{-1}\sum_j H_{jn} H(U_{jn}) - 1)) \to N(0, 1) \text{ as } n \to \infty.$$

$$\therefore \quad n^{-1}\sum_j H_{jn} H(U_{jn}) = 1 + O_p(n^{-1/2})$$

$$\therefore \quad n^{-1}\sum_j H_{jn} X_{jn} = 1 + O_p(n^{-1/2}) \text{ as } n \to \infty.$$

Hierdie tesame met (9. 3. 4) lewer dus:

$$r_n = 1 + O_p(n^{-1/2}) \text{ as } n \to \infty.$$

Uit (9. 3. 6) volg dus dat:

$$n^{1/2}(1 - r_n) = o_p(1) \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore\ n(1 - r_n)^2 = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Maar nou is:

$$2n(1 - r_n) - a_n^o = n(1 - r_n^2) - a_n^o + n(1 - r_n)^2$$
$$= n(1 - r_n^2) - a_n^o + o_p(1).$$

Uit (9. 3. 5) volg dus:

$$D(2n(1 - r_n) - a_n^o) \to D\left(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) + \sum_{m=3}^{\infty} \delta_m Y_m + C\right) \text{ as } n \to \infty.$$

Dit voltooi die bewys.

Opmerking: Deur nou die karakteristieke funksie van die asimptotiese verdeling om te keer kan ons dus in beginsel die asimptotiese mag van $2n(1 - r_n) - a_n^o$ binne sekere klasse van alternatiewes vind. In die volgende paragraaf sal ons dit doen vir 'n bepaalde keuse van G_n.

9. 4 TOEPASSING OP 'N BEPAALDE KEUSE VAN G_n

As toepassing van die teorie van die vorige paragraaf beskou ons die geval waar $G_n = H^3$ d. w. s. : $H_1 : F_n^{-1} = H + n^{-1/2}H^3$. Soos ons reeds gesien het, het F_n 'n platter verdeling as Φ. Ons toon nou aan dat stelling 9. 4 op hierdie geval van toe=passing is.

Vir die verifikasie van (MS1) moet ons aantoon dat $nR_{6n} = o_p(1)$. Om aan te toon dat $nR_{5n} = o_p(1)$ volg maklik met die tegnieke tot dusver ontwikkel. (Sien bv.

paragraaf 3. 3 en paragraaf 7. 2.) Nou is:

$$nR_{6n} = nR_{5n} + (n+1/S_{n+1})(1 - \frac{n+1}{S_{n+1}})(n+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_i d_{in+1} Z_i.$$

Ons het dat:

$$d_{in+1} = 2(\frac{n+1}{n})^{1/2}(n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \psi_{ikn}(H'_{kn}H^3_{kn} - (\overline{HG}_n)H'_{kn}H_{kn}).$$

Volgens lemma 3. 4 sal:

$$\overline{HG}_n = n^{-1} \sum_k H^4_{kn} \to {}_0\int^1 H(x)^4 dx = 3, \text{ as } n \to \infty.$$

Voorts het ons dat:

$$(n+1)^{-1}\sum_i d^2_{in+1} = 4(\frac{n+1}{n})(n+1)^{-1} \sum_i((n+1)^{-1}\sum_k \psi_{ikn}(H'_{kn}H^3_{kn} - (\overline{HG}_n)H'_{kn}H_{kn}))^2.$$

Nou volg soos in paragraaf 8. 2. 1 dat:

$$(n+1)^{-1}\sum_i d^2_{in+1} \to 4 \int_0^1 (\int_0^1 \psi(x, y)(H'(y)H(y)^3 - 3H'(y)H(y))dy)^2 dx \text{ as } n \to \infty.$$

$$= I \text{ (sê).}$$

Ons het volgens paragraaf 4. 1 dat:

$$I = 4 \int_0^1 (\int_0^1 \psi(x, y)H'(y)\sqrt{3}\, g_3(y)dy)^2 dx$$

$$= 12 \int_0^1 (\int_0^1 \psi(x, y)H'(y)g_3(y)dy)^2 dx$$

$$= 12 \int_0^1 (-1/\sqrt{4}\, g_4(x))^2 dx$$

$$= 3 \int_0^1 g_4(x)^2 dx = 3.$$

$$\therefore \quad (n+1)^{-1} \sum_i d^2_{in+1} \to 3 \text{ as } n \to \infty. \qquad (9.3.7)$$

Voorts het ons dat:

$$n^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq n} |d_{in+1}| \leq O(1)\ (n+1)^{-3/2} \max_i \sum_k |\psi_{ikn}| H'_{kn} |H^3_{kn} - (\overline{HG}_n)H_{kn}|$$

$$\leq O(1)(|H_{1n}^3| + (\overline{HG}_n)|H_{1n}|)(n+1)^{-3/2} \max_i \sum_k |\psi_{ikn}| H'_{kn}.$$

Uit die bewys van lemma 6.1 volg direk dat:

$$\max_{1 \leq i \leq n} (n+1)^{-3/2} \sum_k |\psi_{ikn}| H'_{kn} = o(n^{-\delta}),\ \delta < 1/2.$$

Hieruit volg dan dat:

$$n^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq n} |d_{in+1}| = o(1) \text{ as } n \to \infty, \qquad (9.3.8)$$

Uit (9.3.7), (9.3.8) en lemma a1 volg dan:

$$D(n^{-1/2} \sum_i d_{in} Z_i) \to N(0, 3) \text{ as } n \to \infty$$

$$\therefore\ n^{-1/2} \sum_i d_{in} Z_i = O_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Maar $n+1/S_{n+1} = 1 + o_p(1)$ as $n \to \infty$.

$$\therefore\ (n+1/S_{n+1})(1 - \frac{n+1}{S_{n+1}})(n+1)^{-1/2} \sum_i d_{in+1} Z_i = o_p(1)$$

$$\therefore\ nR_{6n} = o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Kondisie (MS1) geld dus.

Voorts het ons dat:

$$C_n = t_n^2 d_n - (\overline{HG}_n)^2.$$

Ons het reeds hierbo gesien dat $\overline{HG}_n \to 3$ as $n \to \infty$. Uit lemma 3.4 volg ook direk dat:

$$d_n = n^{-1} \sum_j H_{jn}^6 \to \int_o^1 H(x)^6 dx = 15 \qquad \text{as } n \to \infty$$

$$\therefore\ C_n \to 15 - 3^2 = 6 \text{ as } n \to \infty.$$

Kondisie (MS2) geld dus met $C = 6$.

Vir die bewys van kondisie (MS3) volg maklik dat:

(i) $n^{-1} \sum_j H_{jn} H(U_{jn})^3 = n^{-1} \sum_j H_{jn}^4 + o_p(1)$

$$= \int_o^1 H(x)^4 dx + o_p(1)$$

$$= 3 + o_p(1).$$

(ii) $n^{-1} \sum_j (H(U_{jn})^3 - n^{-1} \sum_i H(U_{in})^3)^2$

$$= n^{-1} \sum_j (H_{jn}^3 - n^{-1} \sum_i H_{in}^3)^2 + o_p(1)$$

$$= n^{-1} \sum_j H_{jn}^6 + o_p(1)$$

$$= \int_o^1 H(x)^6 dx + o_p(1)$$

$$= 15 + o_p(1), \text{ as } n \to \infty.$$

(iii) $n^{-1} \sum_j (H(U_{jn}) - n^{-1} \sum_i H(U_{in}))(H(U_{jn})^3 - n^{-1} \sum_i H(U_{in})^3)$

$$= n^{-1} \sum_j (H_{jn} - n^{-1} \sum_i H_{in})(H_{jn}^3 - n^{-1} \sum_i H_{in}^3) + o_p(1)$$

$$= n^{-1} \sum_j H_{jn}^4 + o_p(1) = \int_o^1 H(x)^4 dx + o_p(1)$$

$$= 3 + o_p(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Kondisie (MS3) geld dus.

Ten slotte moet ons kondisie (MS4) verifieer. Hiervoor moet ons eers die getalle $\{\delta_m\}$ bepaal. Nou is, volgens paragraaf 4.1:

$$d(x) = 2 \int_o^1 \psi(x, y) H'(y)(H(y)^3 - 3H(y))dy$$

$$= 2/\sqrt{3} \int_o^1 \psi(x, y) H'(y) g_3(y) dy$$

$$= 2/\sqrt{3} \, (- 1/\sqrt{4} \, g_4(x))$$

$$= -\sqrt{3} \, g_4(x)$$

$$\therefore \ \delta_m = \int_o^1 d(x) g_m(x) dx$$

$$= -\sqrt{3} \int_o^1 g_4(x) g_m(x) dx.$$

Uit die ortonormaliteit van $\{g_m(x)\}$ volg dus dat:

$$\delta_m = \begin{cases} -\sqrt{3} & \text{vir } m = 4 \\ 0 & \text{vir } m \neq 4 \end{cases}$$

$$\therefore \ \sigma_n^* = \sum_{m=3}^{k_n} |\delta_m|$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ vir } k_n < 4 \\ \sqrt{3} \text{ vir } k_n \geq 4. \end{cases}$$

Uit paragraaf 4. 4 volg dus direk dat (BΔ1) bevredig word. Uit die bespreking hierbo volg ook dat:

$$n^{-1} \sum_i d_{in}^2 \to 3 = \delta_4^2 = \sum_{m=3}^{\infty} \delta_m^2 \text{ as } n \to \infty,$$

sodat kondisie (D2) geld. Vir kondisie (DBΔ1) moet ons aantoon dat:

$$\max_{3 \leq m \leq k_n} \left| n^{-1} \sum_i d_{in} b_{imn} - \delta_m \right| = o(1) \text{ as } n \to \infty$$

d. w. s. $\left| n^{-1} \sum_i d_{in} b_{i4n} + \sqrt{3} \right| = o(1)$

$$\text{en} \max_{\substack{3 \leq m \leq k_n \\ m \neq 4}} \left| n^{-1} \sum_i d_{in} b_{imn} \right| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Die bewyse hiervan volg analoog aan die bewys in paragraaf 8. 2. 2 en ons sal dit nie hier herhaal nie. Kondisie (MS4) geld dus.

Uit stelling 9. 4 konkludeer ons dan die volgende:

Stelling 9.5: Indien $H_1 : F_n^{-1} = H + n^{-1/2} H^3$ waar is, dan geld dat:

$$D(2n(1 - r_n) - a_n^o) \to D\left(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - \sqrt{3}\, Y_4 + 6\right) \text{ as } n \to \infty.$$

Ons bepaal nou die asimptotiese mag van $2n(1 - r_n) - a_n^o$ in die geval van bostaande alternatiewes. Laat $Y = \sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - \sqrt{3}\, Y_4 + 6$, en gestel Y het distribusiefunksie F_3 en karakteristieke funksie $\varphi_3(t) = r_3(t)e^{i\theta_3(t)}$.

$$\therefore \quad \varphi_3(t) = E \exp[it(\sum_{m=3}^{\infty} m^{-1}(Y_m^2 - 1) - \sqrt{3}\, Y_4 + 6)]$$

$$= e^{6it} \prod_{\substack{m=3 \\ m \neq 4}}^{\infty} Ee^{itm^{-1}(Y_m^2 - 1)} \, Ee^{it(1/4(Y_4^2-1) - \sqrt{3}\, Y_4)}$$

$$= e^{6it} \prod_{m \neq 4} e^{-it/m} \, Ee^{itm^{-1}Y_m^2} \, Ee^{it(1/4Y_4^2 - \sqrt{3}Y_4)} e^{-it/4}$$

$$= e^{6it} \varphi_o(t)(1 - it/2)^{1/2} \, Ee^{it(1/4Y_4^2 - \sqrt{3}\, Y_4)},$$ waar $\varphi_o(t)$ soos in paragraaf 8.4 is.

Ons het dat:

$$Ee^{it(1/4Y_4^2 - \sqrt{3}\, Y_4)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(1/4y^2 - \sqrt{3}\, y)} e^{-1/2y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2y^2(1-it/2) - \sqrt{3}\, ity} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-1/2(1-it/2)(y + \frac{\sqrt{3}\, it}{1 - it/2})^2} \cdot e^{-\frac{3t^2}{2(1-it/2)}} dy$$

$$= e^{-\frac{3t^2}{2-it}} (1 - it/2)^{-1/2}.$$

Ons vind dus dat:

$$\varphi_3(t) = e^{6it}\varphi_o(t)\, e^{-\frac{3t^2}{2-it}}$$

$$= e^{6it}\varphi_o(t)\, e^{-\frac{6t^2}{4+t^2}}\, e^{-\frac{3it^3}{4+t^2}}$$

$$= r_3(t)e^{i\theta_3(t)}, \text{ sodat dus:}$$

$$r_3(t) = r_o(t)e^{-\frac{6t^2}{4+t^2}} \text{ en } \theta_3(t) = \theta_o(t) - \frac{3t^3}{4+t^2} + 6t.$$

Uit paragraaf 8. 4 volg dus dat:

$$r_3(t) = r(t)(1 + 4t^2)^{-1/4}(1 + t^2)^{-1/4} e^{-\frac{6t^2}{4+t^2}} \text{ en}$$

$$\theta_3(t) = \theta(t) - \frac{\tan^{-1}2t + \tan^{-1}t}{2} - \frac{3t^3}{4+t^2} + \frac{15t}{2}$$

met $r(t)$ en $\theta(t)$ soos in paragraaf 4. 8.

Dit volg dus dat:

$$F_3(y) - F_3(o) = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{r_3(t)}{t} (\sin\theta_3(t) + \sin(ty - \theta_3(t))dy.$$

Hieruit kan ons nou vir $F_3(y)$ vind. Indien ons $F_3(y)$ het kan ons dus die asimptotiese mag vind, en dit word in die volgende tabel gegee, by verskillende keuses van α, die grootte van die toets.

TABEL 9. 4. 1 ASIMPTOTIESE MAG VAN $2n(1 - r_n) - a_n^o$

α	Asimptotiese Mag
0, 20	1, 0000
0, 15	1, 0000
0, 10	1, 0000
0, 05	0, 9997
0, 01	0, 9847

Hierdie magte kan ons nou gebruik om $2n(1 - r_n)$, t.o.v. die bepaalde alternatiewes beskou, te vergelyk met ander toetsstatistieke vir die samegestelde geval.

AANHANGSEL

Ons stel en bewys hier 'n aantal resultate wat in die voorafgaande werk gebruik is. Laat weer $\{Z_i\}$ onafhanklike en identies verdeelde stogastiese veranderlikes aandui met $EZ_1 = 0$ en $EZ_1^2 = 1$.

Lemma a1. Laat $\{a_{in};\ i = 1, \ldots, n\}$ reële getalle wees sodat:

$$\text{(A1)}\ n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 \to \sigma^2 \text{ as } n \to \infty$$

en

$$\text{(A2)}\ n^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{in}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Indien ons stel:

$$Y_n = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} a_{in} Z_i$$

dan geld dat

$$D(Y_n) \to N(0, \sigma^2) \quad \text{as } n \to \infty.$$

Bewys: Die karakteristieke funksie van Y_n is:

$$E\exp(itY_n) = \prod_{j=1}^{n} E\exp(ita_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j).$$

Vir u reëel geld nou dat:

$$\exp(iu) = 1 + iu - \tfrac{1}{2}u^2 + u^2 g(u)$$

waar $|g(u)| \leq 1$; $g(0) = 0$ en $g(u)$ kontinu is in u.

Ons kan dus skryf:

$$E\exp(ita_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j) = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 a_{jn}^2 n^{-1} + Et^2 a_{jn}^2 n^{-1} Z_j^2 g(ta_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}t^2 a_{jn}^2 n^{-1} (1 - 2v_{jn}) \qquad \text{(sê)}$$

waar $v_{jn} = EZ_j^2\, g(ta_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j)$.

Ons toon nou aan dat:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |v_{jn}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat $\delta > 0$, en vir enige versameling B laat:

$$I_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{as } x \in B \\ 0 & \text{andersins.} \end{cases}$$

Dan geld dat:

$$EZ_1^2 I_{[|Z_1|>A]} = o(1) \text{ as } A \to \infty.$$

Kies A nou sô groot dat:

$$EZ_1^2 I_{[|Z_1|>A]} < \delta/2.$$

Verder bestaan daar 'n $\eta(\delta) > 0$ sodat vir $|u| < \eta(\delta)$ sal $|g(u)| < \delta/2$. Vir vaste t volg uit (A2) dat vir alle n groot genoeg, geld:

$|n^{-\frac{1}{2}} a_{jn}| < \eta(\delta)/A|t|$ vir $|t| \neq 0$, vir $j = 1, 2, \ldots, n$, en dus:

$$I_{[|Z_j| \leq A]} g(ta_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j) \leq \delta/2 \, I_{[|Z_j| \leq A]}$$

$$\therefore |v_{jn}| = |EZ_j^2 g(ta_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j)| \leq EI_{[|Z_j| \leq A]} |g(ta_{jn} n^{-\frac{1}{2}} Z_j| Z_j^2 + EI_{[|Z_j| > A]} Z_j^2$$

$\leq \delta/2 \, EI_{[|Z_j| \leq A]} Z_j^2 + \delta/2 \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$, vir alle n groot genoeg.

Ook is $\log(1 - x) = -x - x^2 h(x)$ waar $|h(x)| \leq 1$ vir $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Met $x_{jn} = \frac{1}{2} t^2 a_{jn}^2 n^{-1}(1 - v_{jn})$ volg dat $|x_{jn}| \leq \frac{1}{2}$, vir alle j, as n groot genoeg is.

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} \log(1 - x_{jn}) = -\sum_j x_{jn} - \sum_j x_{jn}^2 h(x_{jn}).$$

Nou is:

$$|\sum_j x_{jn}^2 h(x_{jn})| \leq \sum_j x_{jn}^2 \leq t^4 \sum_j a_{jn}^4 \cdot n^{-2} \leq t^4 \max_{1 \leq j \leq n} (n^{-\frac{1}{2}} a_{jn})^2 n^{-1} \sum_j a_{jn}^2$$

$= o(1)$ as $n \to \infty$.

Ook is: $\sum_j x_{jn} = \frac{1}{2} t^2 n^{-1} \sum_j a_{jn}^2 - t^2 n^{-1} \sum_j a_{jn} v_{jn}$.

Die eerste term nader na $\frac{1}{2} t^2 \sigma^2$ en die tweede term na nul. Die resultaat volg dus.

Opmerking: Lemma a1 gee bloot kondisies waaronder 'n soort sentrale limietstelling geld. Uitbreiding hiervan is die volgende:

Lemma a2: Laat $\{b_{imn},\ i = 1, \ldots, n;\ m = 1, \ldots, M;\ n = 1, 2, \ldots\}$ reële getalle wees sodat:

$$\text{(B1)}\ n^{-1} \sum_{i=1}^{n} b_{imn} b_{ikn} \to \delta_{mk} \quad \text{as } n \to \infty$$

en, vir elke m geld dat:

$$\text{(B2)}\ n^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq n} |b_{imn}| = o(1) \text{ as } n \to \infty.$$

Laat $Y_{mn} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} b_{imn} Z_i$

$\underline{Y}_n = (Y_{1n}, \ldots, Y_{Mn})'$.

Dan geld dat $D(\underline{Y}_n) \to N(0, I)$, as $n \to \infty$, met I die M x M eenheidsmatriks.

Bewys: Laat $t_1, t_2, \ldots, t_M$ reële getalle wees. Dit is voldoende om aan te toon dat:

$$D\left(\sum_{m=1}^{M} t_m Y_{mn}\right) \to N\left(0, \sum_{k,m=1}^{M} t_k t_m \delta_{km}\right).$$

Nou is:

$$\sum_{m=1}^{M} t_m Y_{mn} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{M} t_m b_{imn}\right) Z_i$$

sodat lemma a1 met

$$a_{in} = \sum_{m=1}^{M} t_m b_{imn}$$

toegepas kan word, en die bewys volg.

Lemma a3: As $x \to \infty$, geld dat:

$$1 - \Phi(x) \sim x^{-1}\phi(x)$$

en as $x \to -\infty$, geld dat:

$$\Phi(x) \sim |x|^{-1}\phi(x).$$

Ons het ook dat:

$$1 - \Phi(x) < x^{-1}\phi(x) \text{ vir } x \geq 0$$

en $$\Phi(x) < |x^{-1}|\phi(x) \quad \text{vir } x \leq 0.$$

Bewys: Sien bv. Feller (1968), bl. 175.

Lemma a4: As $n \to \infty$ geld dat:

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-1} = \log n + C + (2n)^{-1} + O(n^{-2})$$

waar C Euler se konstante is.

In die besonder kan ons dus sê:

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-1} \sim \log n \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Ook is $\sum_{m=1}^{n} m^{-\frac{1}{2}} \leq 2n^{\frac{1}{2}}$ as $n \to \infty$.

Bewys: Sien bv. Cramér (1966), bl. 125 vir die bewys van die eerste deel.

Vir die bewys van die tweede deel sien ons maklik uit 'n skets dat:

$$\sum_{m=1}^{n} m^{-\frac{1}{2}} \leq \int_{0}^{n} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2n^{\frac{1}{2}}$$

en die resultaat volg.

Die volgende twee lemmas was baie handig by die vasstelling van die tempo van konvergensie van Riemann somme na die ooreenkomstige Riemann integraal.

Lemma a5: Laat $a_1, a_2, \ldots, a_k$ k punte wees sodat:

$$a_{i+1} = a_i + h,\ h > 0,\ i = 1, \ldots, k-1.$$

Gestel g(x) is monotoon en Lebesgue integreerbaar op $[a_1-\frac{1}{2}h,\ a_k+\frac{1}{2}h]$. Dan geld dat:

$$A = \left| \int_{a_1-h/2}^{a_k+h/2} g(x)dx - h \sum_{i=1}^{k} g(a_i) \right| \leq h \left| g(a_1 - \tfrac{1}{2}h) - g(a_k + \tfrac{1}{2}h) \right|.$$

Bewys:

Ons het dat:

$$A = \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} g(x)dx - h \sum_{i=1}^{k} g(a_i) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} g(x)dx - \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} g(a_i)dx \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} |g(x) - g(a_i)| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} |g(a_i + h/2) - g(a_i - h/2)| dx$$

$$= \sum_{i=1}^{k} h |g(a_i + h/2) - g(a_i - h/2)|$$

$$= h |g(a_1 - h/2) - g(a_k + h/2)|$$

wat die resultaat lewer.

Gevolgtrekking: As spesiale geval van hierdie lemma kan ons die volgende doen:

Kies: $a_i = {}^{i}/_{n+1}$, $i = m, \ldots, m+k-1$ met $1 \leq m \leq m+k-1 \leq n$

$$\therefore h = {}^{1}/_{n+1}$$

$$\therefore \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=m}^{m+k-1} g({}^{i}/_{n+1}) - \int_{\frac{m-\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{m+k-\frac{1}{2}}{n+1}} g(x)dx \right| \leq (n+1)^{-1} \left| (\frac{m-\frac{1}{2}}{n+1}) - g(\frac{m+k-\frac{1}{2}}{n+1}) \right|.$$

Dit is in hierdie vorm wat ons die lemma gebruik het.

Indien ons nie monotonisiteit wil aanneem nie, kry ons die volgende:

Lemma a6: Laat $a_1, \ldots, a_k$ k punte wees sodat:

$$a_{i+1} = a_i + h \qquad h > 0, \; i = 1, \ldots, k-1.$$

Gestel $g'(x)$ bestaan op $[a_1 - h/2, a_k + h/2]$. Dan geld dat:

$$B = \left| \int_{a_1-h/2}^{a_k+h/2} g(x)dx - h \sum_{i=1}^{k} g(a_i) \right| \le h^2 \sum_{i=1}^{k} \sup_{a_i-h/2 \le x \le a_i+h/2} |g'(x)|$$

$$\le h^2 k \sup_{a_1 - h/2 \le x \le a_k+h/2} |g'(x)|$$

Bewys: Ons het dat:

$$B = \left| \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} g(x)dx - \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} g(a_i)dx \right| \le \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} |g(x) - g(a_i)| dx.$$

Nou kan ons volgens Taylor skryf:

$$g(x) = g(a_i) + (x - a_i)g'(x_i)$$

waar x_i vir elke x lê tussen x en a_i.

$$\therefore \quad B \le \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} |x - a_i| \, |g'(x_i)| dx \le h \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i-h/2}^{a_i+h/2} |g'(x_i)| dx$$

$$\le h^2 \sum_{i=1}^{k} \sup_{(a_i-h/2, \; a_i+h/2)} |g'(x)| \le h^2 k \sup_{(a_1-h/2, \; a_k+h/2)} |g'(x)|$$

wat die bewys voltooi.

Gevolgtrekking: Soos tevore kan ons skryf:

$$\left| (n+1)^{-1} \sum_{i=m}^{m+k-1} g(i/_{n+1}) - \int_{\frac{m-\frac{1}{2}}{n+1}}^{\frac{m+k-\frac{1}{2}}{n+1}} g(x)dx \right| \le (n+1)^{-2} \sum_{i=m}^{m+k-1} \sup_{\frac{i-\frac{1}{2}}{n+1} \le x \le \frac{i+\frac{1}{2}}{n+1}} |g'(x)|$$

$$\le (n+1)^{-2} k \sup_{\frac{m-\frac{1}{2}}{n+1} \le x \le \frac{m+k-\frac{1}{2}}{n+1}} |g'(x)|.$$

Hierdie is weereens die vorm waarin ons die lemma gebruik het.

Lemma a7: As $n \to \infty$ is:

$$n! = o(n^n).$$

Bewys: Volgens Stirling se formule is:

$$n! \sim n^n e^{-n} (2\pi n)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Hieruit volg die lemma dadelik.

Lemma a8: Stel:

$$\alpha_r(z) = \int_z^{\infty} x^r \phi(x)dx \text{ en}$$

$$\beta_r(z) = \int_{-\infty}^{z} x^r \phi(x)dx, \; z \neq 0.$$

Dan is:

(i) $\alpha_r(z) = \phi(z) \, . \, z^{r-1}[1 + \mu_r(z)]$

waar:

$$\mu_r(z) = \sum_{k=1}^{\frac{r-1}{2}} (r-1)(r-3)\ldots(r-2k+1)z^{-2k} \quad \text{vir r onewe}$$

en:

$$\mu_r(z) = \sum_{k=1}^{\frac{r}{2}-1} (r-1)(r-3)\ldots(r-2k+1)z^{-2k} + (r-1)(r-3)\ldots 3.1 \frac{1-\Phi(z)}{\phi(z)z^{r-1}} \quad \text{vir r ewe.}$$

(ii) $\beta_r(z) = -\phi(z)z^{r-1}[1 + \nu_r(z)]$

waar:

$\nu_r(z) = \mu_r(z)$ vir r onewe en:

$$\nu_r(z) = \sum_{k=1}^{\frac{r}{2}-1} (r-1)(r-3)\ldots(r-2k+1)z^{-2k} - (r-1)(r-3)\ldots 3.1 \, . \frac{\Phi(z)}{\phi(z)z^{r-1}} \quad \text{vir r ewe.}$$

Bewys: (i) Deur parsiële integrasie volg:

$$\alpha_r(z) = z^{r-1}\phi(z) + (r-1)\alpha_{r-2}(z)$$

$$= z^{r-1}\phi(z) + (r-1)(z^{r-3}\phi(z) + (r-3)\alpha_{r-4}(z))$$

$$= z^{r-1}\phi(z)(1 + (r-1)z^{-2}) + (r-1)(r-3)\alpha_{r-4}(z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{cases} z^{r-1}\phi(z)(1 + (r-1)z^{-2} + (r-1)(r-3)z^{-4} + \ldots \\ \quad \ldots. + (r-1)(r-3)\ldots\ldots 4 \, . \, z^{-(r-3)}) + (r-1)(r-3)\ldots 4.\,2\,\alpha_1(z) \\ \quad \text{vir } r \text{ onewe} \\ z^{r-1}\phi(z)(1 + (r-1)z^{-2} + \ldots + (r-1)(r-3)z^{-4} + \ldots + (r-1)(r-3)\ldots 3 \, . \, z^{-(r-2)}) \\ \quad + (r-1)(r-3)\ldots 3.\,1\,\alpha_0(z) \qquad \text{vir } r \text{ ewe.} \end{cases}$$

$$= z^{r-1}\phi(z)(1 + \mu_r(z)) \text{ met } \mu_r(z) \text{ soos hierbo.}$$

(ii) Die bewys hiervan volg analoog.

<u>Gevolgtrekkings:</u>

(a) $\alpha_r(z) \underset{(\text{of} \leq)}{\sim} \phi(z)z^{r-1}(1 + \mu^*_r(z))$ vir $z \geq 0$

waar $\mu^*_r(z) = \sum_{k=1}^{[\frac{r}{2}]} (r-1)\ldots(r-2k+1)z^{-2k}$

(b) $\beta_r(z) \underset{(\text{of} \leq)}{\sim} -\phi(z)z^{r-1}(1 + \mu^*_r(z))$ vir $z \leq 0$

met $\mu^*_r(z)$ soos hierbo.

(c) $|\beta_r(z)| \leq \alpha_r(|z|)$ vir $z \leq 0$

(d) $\mu_r(z) \leq r!$ vir $z \geq 1$

en $\nu_r(z) \leq r!$ vir $z \leq -1$.

<u>Lemma a9:</u> As $n \to \infty$ geld dat:

$$E(U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^2 = (n+2)^{-1}({}^{j}/_{n+1})(1-{}^{j}/_{n+1}) \sim n^{-1}({}^{j}/_{n+1})(1-{}^{j}/_{n+1})$$

en $E(U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^4 \leq 27n^{-2}({}^{j}/_{n+1})^2(1-{}^{j}/_{n+1})^2 \leq 36n^{-2}({}^{j}/_{n+1})^2(1-{}^{j}/_{n+1})^2$, vir $n \geq 5$.

Bewys: Dit is bekend dat U_{jn} 'n Beta verdeling het met parameters j en n-j+1.

Dit volg dus dat:

$$EU_{jn} = {}^{j}/_{n+1}; \qquad EU_{jn}^2 = \frac{j(j+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$EU_{jn}^3 = \frac{j(j+1)(j+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad EU_{jn}^4 = \frac{j(j+1)(j+2)(j+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Hieruit volg die eerste deel van die lemma dadelik. Vir die tweede deel is:

$$E(U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^4 = EU_{jn}^4 - 4\,{}^{j}/_{n+1}\,EU_{jn}^3 + 6({}^{j}/_{n+1})^2EU_{jn}^2 - 3({}^{j}/_{n+1})^4$$

$$EU_{jn}^4 - \frac{j}{n+1}EU_{jn}^3 = \frac{j(j+1)(j+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(\frac{j+3}{n+4} - \frac{j}{n+1}\right)$$

$$= \frac{3}{n+4}\cdot\frac{j+1}{n+2}\cdot\frac{j+2}{n+3}\cdot\frac{j}{n+1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$$

$$\left(\frac{j}{n+1}\right)^2 EU_{jn}^2 - \frac{j}{n+1}EU_{jn}^3 = \left(\frac{j}{n+1}\right)^2\frac{j+1}{n+2}\left(\frac{j}{n+1} - \frac{j+2}{n+3}\right)$$

$$= \frac{-2}{n+3}\cdot\frac{j+1}{n+2}\cdot\left(\frac{j}{n+1}\right)^2\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$$

$$\left(\frac{j}{n+1}\right)^2 EU_{jn}^2 - \left(\frac{j}{n+1}\right)^4 = \frac{j}{n+2}\left(\frac{j}{n+1}\right)^3\left(1-\frac{j}{n+1}\right),$$ uit die eerste deel van die lemma.

$$\therefore\ E(U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^4 = 3\frac{j}{n+1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+4}\cdot\frac{j+1}{n+2}\cdot\frac{j+2}{n+3} - \frac{2}{n+3}\cdot\frac{j+1}{n+2}\cdot\frac{j}{n+1} + \frac{1}{n+2}\left(\frac{j}{n+1}\right)^2\right)$$

$$= 3\frac{j}{n+1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)A_{nj} \qquad \text{(sê).}$$

Beskou nou A_{nj}:

Stel $x = {}^{j}/_{n+1}$, dan is:

$$A_{nj} = (n+2)^{-1}(n+3)^{-1}(n+4)^{-1}((j+1)(j+2) - 2(n+4)(j+1)x + (n+3)(n+4)x^2).$$

Nou is $j = (n+1)x$, sodat:

$$(n+2)(n+3)(n+4)A_{nj} = (n+1)^2x^2 + 3(n+1)x + 2 - 2(n+4)(n+1)x^2 - 2(n+4)x + (n+3)(n+4)x^2$$

$$= n^2x^2 + 2nx^2 + x^2 + 3nx + 3x + 2 - 2n^2x^2 - 10nx^2 - 8x^2 - 2nx - 8x + n^2x^2 + 7nx^2 + 12x^2$$

$$= -nx^2 + 5x^2 + nx - 5x + 2$$

$$= (n - 5)x - (n - 5)x^2 + 2$$

$$= (n - 5)x(1 - x) + 2$$

$$\therefore A_{nj} = (n+2)^{-1}(n+3)^{-1}(n+4)^{-1}((n - 5)x(1 - x) + 2) \leq n^{-3}((n-5)x(1-x) + 2)$$

$$\leq n^{-3}(nx(1 - x) + 2)$$

$$= n^{-2}x(1 - x)(1 + \frac{2}{nx(1 - x)}).$$

Nou: $$\frac{2}{nx(1-x)} = \frac{2}{n}(\frac{j}{n+1}(1 - \frac{j}{n+1}))^{-1} \leq 2n^{-1}({}^{1}/_{n+1}(1 - {}^{1}/_{n+1}))^{-1}$$

$$= 2n^{-1}(\frac{n}{(n + 1)^2})^{-1}$$

$$\therefore A_{nj} \leq n^{-2}x(1 - x)(1 + 2n^{-2}(n + 1)^2) \leq n^{-2}x(1 - x)(1 + 2(2)^2)$$

$$= 9n^{-2}x(1 - x)$$

$$= 9n^{-2}({}^{j}/_{n+1})(1 - {}^{j}/_{n+1})$$

$\therefore E(U_{jn} - {}^{j}/_{n+1})^4 \leq 27n^{-2}({}^{j}/_{n+1})^2(1 - {}^{j}/_{n+1})^2$ wat die bewys voltooi.

Lemma a10: Laat $\{U_{jn}\}$ soos tevore wees. By gegewe $\delta > 0$ bestaan daar dan getalle $u_{jn}(\delta) > 0$ en $u^{jn}(\delta) < 1$, $j = 1, \ldots, n$, sodat:

$P(u_{jn}(\delta) < U_{jn} < u^{jn}(\delta);\ 1 \leq j \leq n) \geq 1 - \delta$ vir $n \geq 1$ en:

$$\max_{1 \leq j \leq n}(u^{jn}(\delta) - u_{jn}(\delta)) = o(1) \text{ as } n \to \infty$$

$$\max_{1 \leq j \leq n}(u^{jn}(\delta)/u_{jn}(\delta)) \leq K(\delta), \text{ onafhanklik van } n$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} (1 - u_{jn}(\delta))/(1 - u^{jn}(\delta)) \leq K(\delta)$$

en $u_{jn}(\delta) < {}^{j}/_{n+1} < u^{jn}(\delta)$, $j = 1, \ldots, n$.

Bewys: Sien Chernoff, Gastwirth en Johns (1967).

Lemma a11: Laat $\{a_{kn}\}$, $k, n = 1, 2, \ldots$ 'n dubbele ry van reële getalle wees sodat vir elke vaste k geld

$$a_{kn} \to a_k \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Gestel voorts dat:

$$a_k \to a \qquad \text{as } k \to \infty.$$

Dan geld dat $a_{nn} \to a$, as $n \to \infty$, as en slegs as

$$\lim_{k \to \infty} \limsup_{n \to \infty} |a_{kn} - a_{nn}| = 0.$$

Bewys: Gestel die kondisie geld. Dan volg die lemma dadelik uit:

$$|a_{nn} - a| \leq |a_{nn} - a_{kn}| + |a_{kn} - a_k| + |a_k - a|.$$

Die omgekeerde volg weer dadelik uit:

$$|a_{kn} - a_{nn}| \leq |a_{kn} - a| + |a_{nn} - a|.$$

Opmerking: Hierdie lemma is duidelik die ekwivalent van lemma 2.3 in die geval van reële getalle.

Lemma a12: Indien Z 'n N(0, 1) verdeling het dan geld dat:

$$EZ^{2k} = (2k)!/(2^k k!) \quad \text{vir } k = 0, 1, \ldots$$

Bewys: Dit volg dadelik deur parsiële integrasie.

DANKBETUIGING

Hiermee betuig ek graag my dank aan Prof. J. H. Venter, Hoof, Departement Statistiek, P. U. vir C. H. O., vir die voorstel van die onderwerp en die hulp en leiding by die bestudering daarvan.

VERWYSINGS

ABRAHAMSON, I. G. (1965). On the stochastic comparison of tests of hypotheses. Ph. D. tesis, Universiteit van Chicago.

ANDERSON, T. W. & Darling, D. A. (1952). Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes. Ann. Math. Stat., Vol. 23, pp. 193 - 212.

BAHADUR, R. R. (1960). Stochastic comparison of tests. Ann. Math. Stat., Vol. 31, pp. 276 - 295.

BAHADUR, R. R. (1967). Rates of convergence of estimates and test statistics. Ann. Math. Stat., Vol. 38, pp. 303 - 324.

BILLINGSLEY, P. (1968). Convergence of probability measures. John Wiley and Sons, Inc., New York.

BREIMAN, L. (1968). Probability. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts.

CHERNOFF, H., Gastwirth, J. L. & Johns, M. V. (1967). Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation. Ann. Math. Stat., Vol. 38, pp. 52 - 73.

CRAMÉR, H. (1966). Mathematical methods of statistics. Princeton University Press. (Elfde druk.)

DARLING, D. A. (1957). The Kolmogorov-Smirnov, Cramér- von Mises tests. Ann. Math. Stat., Vol. 28, pp. 823 - 838.

FELLER, W. (1968). An introduction to probability theory and its applications. John Wiley and Sons, Inc., New York. (Derde uitgawe.)

KAC, M., Kiefer, J. & Wolfowitz, J. (1955). On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. Ann. Math. Stat., Vol. 26, pp. 189 - 211.

PARZEN, E. (1964). Stochastic Processes. Holden-Day, Inc., San Francisco, California. (Tweede druk.)

RAINVILLE, E. D. (1967). Special functions. The Macmillan Company, New York. (Vierde druk.)

SCHACH, S. (1970). The asymptotic distribution of a class of nonparametric test statistics. Metrika, Vol. 15, pp. 48 - 58.

TRICOMI, F. G. (1957). Integral equations. Interscience Publishers, Inc., New York.

VAN DER WATT, P. (1968). A comparison of certain tests for normality. U. N. I. S. A. Colloquium reeks, No. 4, pp. 78 - 106.

VARBERG, D. E. (1966). Convergence of quadratic forms in independent random variables. Ann. Math. Stat., Vol. 37, pp. 567 - 575.

VENTER, J. H. (1968). Passingstoetse gebaseer op rangorde statistieke. U. N. I. S. A. Colloquium reeks, No. 4, pp. 37 - 52.