

WYSGERIGE BESKOUINGE OOR DIE GETAL1. Inleiding.

Wanneer die vraag: „Wat is die getalsbegrip van die kind op 'n bepaalde stadium in sy ontwikkeling?" of „Hoe ontwikkel die getalsbegrip by die kind?" gestel word, is daar m.i. sekere ander vrae waarop eers 'n antwoord gegee moet word. Hierdie vrae is die volgende: (a) Wat is die getal na sy wese? en (b) Hoe kom die mens tot kennis van die getal? Op hierdie vrae sal die Wysbegeerte of Kentheorie die antwoorde moet gee. In hierdie hoofstuk wil ons kortliks probeer vasstel watter antwoorde op hierdie twee vrae deur groot denkers in die loop van tyd gegee is en daarna wil ons 'n eie beskouing van wat die getal is en hoe die mens tot kennis daarvan kom, formuleer.

Die vraag of die getal überhaupt op die gebied van die Wysbegeerte tuishoort, is deur verskillende denkers oorweeg en almal is dit hieroor met mekaar eens dat dit wel die geval is. Locke stel vas: „For number applies itself to men, angels, actions, thoughts-- everything that either doth exist or can be imagined." ¹⁾ Ook Dooyeweerd beweer dat dit noodsaaklik is dat elke denker oor die Rekenkunde 'n standpunt sal inneem i.v.m. die samehang van ruimtelike, bewegings-en getalsy van die werklikheid. Hy vind selfs dat die moderne Rekenkunde onmoontlik is sonder dat so 'n besliste standpunt ingeneem word. ²⁾ Ook Frege vind dat: „Eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen." ³⁾ Hy wys daarop dat niemand nog daarin geslaag het om 'n bevredigende definisie van die getal te gee nie, maar tog het niemand ook nog ooit iets ontdek wat rede gee om te dink dat die getal ondefinieerbaar is nie.

Volgens.....

-
- 1) Locke, John: An essay concerning human understanding, 141.
 2) Dooyeweerd, H: De Wysbegeerte der Wetsidee, Deel 1, 512.
 3) Frege, G: Die Grundlagen der Arithmetik, v.

Volgens hom het niemand nog ooit 'n aanvaarbare definisie van die begrip EEN gegee nie.¹⁾

Hankel beweer dat die begrip „getal” nie gedefinieer kan word nie.²⁾

Leibnitz beskou die getal as 'n „Adequate Idee, d.h. als eine solche, die es deutlich ist, dass alles was in ihr vorkommt, wieder deutlich ist.”³⁾ Op grond van hierdie en ander uitsprake word in die volgende paragrafe 'n poging aangewend om antwoorde op die vrae wat aan die begin van hierdie hoofstuk gestel is, te vind. Die antwoorde word soos volg gegroepeer:

- (a) 'n Vluchtige historiese oorsig van antwoorde wat in die verlede gegee is; (b) 'n Idealistiese standpunt; (c) 'n Formalistiese standpunt; (d) 'n Logisistiese standpunt; (e) Dooyeweerd se standpunt; (f) 'n Eie standpunt.

2. Wysgerige beskouinge oor getal.

(a) 'n Vluchtige historiese oorsig.

In die wysgerige denke van die verlede word daar slegs hier en daar aanduidings van die heersende opvatting aangaande die getal aangetref en daar kan eintlik nie van ontwikkeling van opvattinge gepraat word nie. Ons tref sporadies uitsprake i.v.m. hierdie probleem aan; daarom sal 'n oorsig ook by wyse van spronge moet geskied en hoofsaaklik bestaan uit grepe uit die verlede.

By primitiewe volke word getal noodwendig realisties beskou.⁴⁾ Hiervolgens is die fisiese omgewing die toessteen van die waarheid. Pythagoras gaan uit van die teenoorgestelde standpunt en verabsoluteer die getal. Vir hom en sy volgelinge is alles, selfs metafisiese begrippe, herleibaar tot getalle. „Alles is getalle.”⁵⁾ En hierin het hy 'n lang ry navolgers onder die Griekse wysgere gehad. So beweer
een/.....

1) Frege: Die Grundlagen der Arithmetik, 27-41.

2) Ibid: 27.

3) Ibid: 41.

4) Curry: Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics, 3-4.

5) Van Os: Getal en Kosmos, 44; Bell: The Magic of Numbers, 110.

een van hulle, Philolaos: „De natuur van het getal schein kennis, leidet en leert voor elkeen by elk ding, die hem twyfelachtig of onbekend voorkomt. Want niets van de dingen zou iemand klaar en duidelyk kunnen zyn, indien het getal niet ware en zyn wezen.“¹⁾ Ook Plato heg besondere waarde aan die getal en dit pas goed by sy ideëleer aan. Die idee getal is abstrak, „rebellion against the introduction of visible or tangible objects into the argument.“²⁾ Die Grieke oor die algemeen, beskou getal as 'n hoeveelheid, saamgestel uit eenhede. Hierdie omskrywing het nie bevredig nie, o.a. omdat die eenhede verskillend is in verskillende gevalle waarin tog dieselfde getal voorkom. Om die moeilikheid te oorbrug, is die eenhede veronderstel om slegs in die bo-sinlike wêreld te bestaan. Aristoteles beskou getal in prinsipe dieselfde as hoeveelheid, mits mens jou losmaak van alle eienskappe waardeur eenhede van die hoeveelhede hulle van mekaar en van eenhede van ander hoeveelhede onderskei.³⁾ Ook hierdie verklaring gaan nie meer op as die getalle so groot word dat die gedagte van „hoeveelheid“ verlore gaan nie. Bell wys daarop dat euelank „there is a blank in which neither mathematicians nor logicians could satisfy themselves what two is on its own merits.“⁴⁾ Selfs lank na die tyd van die Grieke vind ons filosowe soos Locke en Hume wat die getal herlei tot die waargenome werklikheid. Volgens hulle kom alle menslike kennis deur middel van die sintuie - ook kennis van die getal wat dan herlei word tot die uitkoms van empiries waargenome veelvuldigheid. Hume stel dit soos volg: „The only solid foundation we can give to this science itself must be laid on experience and observation.“⁵⁾ Hy beskou die getal as bestaande uit die menslike vermoë om eenhede te onderskei/.....

1) Van Os: Getal en Kosmos, 80.

2) Eby and Arrowood: History and Philosophy of Education, 373.

3) Van Os: Getal en Kosmos, 90-91.

4) Bell, E.T.: The magic of numbers, 18.

5) Hume, D: A Treatise of Human Nature, Vol.1, 5.

onderskei en noem twee getalle gelyk „when they are so combined as that the one has always an unit answering to every unit of the other.”¹⁾

Locke beweer: „Number is that which the mind makes use of in measuring all things that by us are measurable.”²⁾ Die getal ontwikkel, volgens hom, deur die herhaalde byvoeging van een en deur aan elke nuwe groep 'n naam te gee waardeur dit van die een wat voorafgegaan en die een wat volg onderskei kan word. Elkeen wat kan bytel en aftrek met een is dan „capable of all the ideas of numbers within the compass of his language.”³⁾ Die opvatting van Pestalozzi sluit hierby aan. Hy beskou getal as 'n geestesbeeld wat afgelei word van sintuiglike waarneming. Sintuiglike prikkels word op 'n een-een-grondslag met die getalname afgepaar en so ontstaan die getal.⁴⁾ Die beskouing van Stanley Hall, wat die getal tot ritme herlei, is nou aan hierdie opvatting verwant. Hy stel dit nl. dat, „counting is the rythmical punctuation of the stream of consciousness.” Die oorsprong van getal is dus die menslike gees.⁵⁾ Klapper gee die volgende definisie: „Number is the total of all the relationships in a group. Number is an idea which the mind evolves and applies to experiences.”⁶⁾

In die meeste van hierdie voorgaande omskrywinge vorm die getal eintlik geen deel van 'n volledige wysgerige stelsel nie maar word in die verbygaan genoem en word dikwels meer psigologies as wysgerig besien.

b. 'n Idealistiese standpunt.

Die idealisme lê neer dat alle kenbare, alle ervaarbare dinge na hulle regte en oorspronklike wese 'n inhoud van die bewussyn is. Sommige idealiste beskou hierdie bewussyn as behorende tot 'n bepaalde individu en/.....

1) Hume, D: A Treatise of Human Nature, Vol. I, 75.

2) Locke: An essay concerning Human understanding, 142.

3) Ibid: 142.

4) Klapper: The Teaching of Arithmetic, 224.

5) Ibid: 226, Hall: Psychological Problems, 387.

6) Klapper: The Teaching of Arithmetic, 227.

en hulle idealisme kan ons subjektief noem; ander weer spreek in algemene taal oor idees sonder te verwys na 'n subjek tot wie se gees hierdie idees behoort en hulle idealisme kan objektief genoem word. Kant se idealisme word transendentiaal genoem omdat hy slegs die formele elemente van kennis as 'n oorspronklike besitting van die menslike gees beskou, maar die materiële as gegewens beskou en op 'n realistiese wyse interpreteer.¹⁾ Plato, die groot vader van die idealisme, gaan uit van die standpunt dat alle ware kennis aangebore is. Hierdie ware kennis is dit waaraan nie getwyfel kan word nie en wat deur elke normale verstand aanvaar word. Dit sluit alle matemitiese waarheid asook alle algemene en abstrakte idees in. Hierdie kennis is die eiendom van die siel voor die geboorte maar deur die geboorte word dit vergeet en word eers later teruggeroep. Kennis kom op tweekaniete: (a) 'n sensoriese proses wat van die voorwerp ontspring en (b) die herstel van die begrip of algemene idee wat alreeds in die gees aanwesig is.

Volgens Plato bestaan daar twee wêreldes: die wêreld van idees en die wêreld van sinlike dinge. Slegs die ideële bestaan werklik -- dit is tydloos, ruimteloos en onveranderlik.²⁾ Die ideë van die klassieke Wiskunde het dan ook volgens hom 'n onafhanklike bestaan en volgens die idealisme in die algemeen het die Wiskunde te doen met geestesbeelde van een of ander aard.³⁾ Die idealistiese beskouing van die getal is noodwendig tot die psigologiese beperk aangesien die buite-menslike aspekte van die Wiskunde in hulle beskouinge uitgesluit is.

As verteenwoordiger van die Idealisme word L.E.J. Brouwer hier vollediger bespreek omdat hy die enigste (sover my bekend) denker is wat 'n volledige verklaring/.....

1) Külpe: Introduction to Philosophy, 194-5.

2) Eby and Arrowood: History and Philosophy of Education, 350-2.

3) Curry: Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics, 5.

verklaring vir die ontstaan van getal en Wiskunde vanuit suiwer idealistiese standpunt uitgewerk het. Sy skool word genoem die Intuisioniste omdat hulle die matematiese intuïsie as toetssteen vir wiskundige waarheid aanvaar.¹⁾

Volgens hierdie denkers besit die intuïsie die volgende kenmerke:

(i) dit is 'n denkaktiwiteit; (ii) dit het 'n a priori-waarheidskarakter; (iii) dit is onafhanklik van taal; (iv) dit het 'n objektiewe bestaan - is dieselfde vir alle denkende wesens.²⁾

Brouwer se standpunt berus op 'n a priori basiese intuïsie van TYD waardeur die mens in staat is om dinge uitmekaar te dink as reekse.³⁾ Hierop word later vollediger teruggekom. Hy neem verder aan dat die ry klanke en ook die ry simbole vir die ordinale getalle intuïtief duidelik is.⁴⁾ Die oer-intuïsie van die Wiskunde (en van alle werking van die intellek) is die „van kwaliteit ontdane substraat van alle waarneming van verandering, een eenheid van continu en discreet, een moegelykheid van samendenken van meerdere eenhede, verbonden door een „tussen“ dat door inskakeling van nuwe eenhede zich nooit uitput.“⁵⁾ Enige Wiskunde word dan opgebou deur eenvoudige juxtaposisie van voorstellingseenhede of deur die vorming van reekse of continua. Geen Wiskunde wat nie op hierdie wyse intuïtief opgebou is, kan bestaan nie. By hierdie opbou is die enigste moontlike grondslag van die vak die vraag wat die intuïsie toelaat en wat nie.⁶⁾ „Den menschen is één vermogen eigen dat al hun wisselwerkingen met de natuur begeleidt, het vermogen n.l. tot wiskundig bekyken van hun leven. Het oer-phenomeen is

daarby/.....

1) Brouwer: Over de Grondslagen der Wiskunde, 77.

2) Curry: Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics, 5-6.

3) Brouwer: Over de Grondslagen der Wiskunde, 81-82.

4) Ibid: 3.

5) Ibid: 8.

6) Ibid: 77.

daarby de tydsintuisie zonder meer, waarin herhaling als 'ding in den tyd en nog eens ding' mogelyk is, en op grond waarvan levensmomenten uiteenvallen als volgreekse van kwalitatief verskillende dinge, die vervolgens zich in het intellekt concentreeren tot niet gevoelde doch waargenomen wiskundige volgreekse." ¹⁾ Die abstrakte Wiskunde word deur die intellekt uit sy oer-intuisie opgebou en so kry ons 'n voorraad „onwerkelyk causale volgreekse.” Die eenvoudigste hiervan is „het door de telhandeling verkregen klankbeeld of schriftteeken van aantal of het door de maathandeling verkregen klankbeeld van maatgetal.” ²⁾ Hy verwerp met nadruk die stelling dat die Wiskunde uit die Logika opgebou is. „Is dus de Wiskunde niet afhankelyk van de logika, de logica is wél afhankelyk van de Wiskunde: voor eerst het intuitief logisch redeneeren is dat besondere wiskundige redeneeren dat overblyft, als men by het bekyken der wiskundige systemen zich uitsluitend beperkt tot relaties van geheel en deel; de beschouwde wiskundige systemen zelf dragen in geen opzicht een speciaal elementair karakter, dat een prioriteit van logisch redeneeren ten opzichte van gewoonwiskundig redeneeren zou kunnen wettigen.” ³⁾ Hy noem verder sowel Logika as Logistiek empiriese wetenskappe en toepassings van die Wiskunde. ⁴⁾ Deur die Logika het die mens geen hoop om die grondslae van die Wiskunde te lê nie. ⁵⁾ Taal is slegs 'n middel, en 'n gebrekkige middel, om Wiskunde aan ander mee te deel en het met die Wiskunde self niks uitstaande nie. ⁶⁾ „Hoe men zich draait of wendt, de grond van de Wiskunde blyft de Wiskunde en die grodt over haar geheele gebied vry en intuitief.” ⁷⁾ As
 grondstelling/.....

1) Brouwer: Over de Grondslagen der Wiskunde, 81-2.

2) Ibid: 83-4.

3) Ibid: 127.

4) Ibid: 130.

5) Ibid: 132.

6) Ibid: 141.

7) Ibid: 161.

grondstelling van die Rekenkunde sien Brouwer die feit dat 'n reeks wat eenmaal getel is, dieselfde uitkoms sal gee as dit in enige ander volgorde getel word. Prosesse van optelling, (ook van negatiewe getalle) sowel as vermenigvuldiging en magsverheffing, word herlei tot telwerk. 'n Rasionale getal word gedefinieer as 'n "paar" ordinale getalle geskryf in die vorm a/b waarvan die noemer positief is, en die negatiewe getal is die ordinale getal na links deur te tel in twee rigtings.¹⁾ Irrasionale getalle is "een symbolisch agglomoraat van reeds ingevoerde getallen te schryven en daarin verder te lezen een verdeling der reeds ingevoerde getallen in twee klassen, de tweede waarvan geheel op de eerste volgt en geen eerste element heeft."²⁾ Die geheel van die getalle wat op elke punt ingevoer word, is orals "dig", d.w.s. tussen enige twee lê nog verdere elemente.³⁾

'n Bepaalde benaderingsreeks van 'n punt het geen eerste of laaste punt nie - kan nooit as "klaar" gedink word nie.⁴⁾

Die groot waarde van die vak lê, volgens Brouwer, daarin dat, in die plek van 'n wonderlike verskynsel, 'n minder wonderlike gestel word.⁵⁾ Die vak kry sy groot mag deur die samevatting van 'n groot aantal volgreekse onder een gesigspunt of wet of sisteem, deur matematiese induksie opgebou.⁶⁾ Die diskrete waarnemings word aangevul tot kontinue funksies - 'n willekeurige daad wat blyk te werk en dus gehandhaaf word.⁷⁾

Heyting bou die werk van Brouwer verder uit. Hy stel die standpunt van die Intuisioniste soos volg: "Die Mathematik (hat) inhaltliche Bedeutung und entsteht durch eine konstruktive Tätigkeit unseres Verstands."¹⁾ /.....

1) Brouwer: Over de Grondslagen der Wiskunde, 5.

2) Ibid: 6.

3) Ibid: 7.

4) Ibid: 10.

5) Ibid: 91.

6) Ibid: 84.

7) Ibid: 85

Verstands."¹⁾ Volgens hom berus die Intuisionisme op die volgende grondwette: (a) Matesis het nie alleen formele nie, maar ook inhoudelike betekenis en (b) die matematiese voorwerpe (Gegens tände) word deur die denkende gees direk gesnap; die matematiese insig (Erkenntnis) is dus onafhanklik van ervaring.²⁾ Hy beskou Poincare as een van die voorlopers van die Intuisionisme. Hoevel lg. die vryheid van teësprak nie as 'n bewys in alle Wiskunde aanvaar nie, „betrachtet er die Widerspruchsfreiheit der Lehre von den natürliche Zahlen, als durch ihre intuitive Klarheit gewährleistet."³⁾

Ook Borel beskou die natuurlike getal as so duidelik dat misverstand onmoontlik is.⁴⁾ „Nach Brouwer ist die Mathematik identisch mit dem exakten Teil unseres Denkens."⁵⁾ Hy herlei dit tot „die Fähigkeit bestimmte Begriffe und Schlüsse, die im gewöhnlichen Denken regelmässig auftreten, gesondert zu betrachten."⁶⁾ Heyting beskou die grondslag van die natuurlike getal as geleë in die eenheid, d.w.s. 'n voorwerp of ondervinding wat ons vir ons self as afgesonder van die res van die wêreld kan beskou; tweedens kan ons so 'n eenheid van 'n ander onderskei en derdens kan ons vir ons 'n onbeperkte herhaling van die proses voorstel. Sodoende ontstaan die ry van die natuurlike getalle.⁷⁾

Uit hierdie kort uiteensetting word dit duidelik dat die Intuisioniste die getal sien as 'n begrip wat aan die mens eie en deur sy intuïsie opgebou is. Die hele getalleleer en Wiskunde word deur hierdie intuïsie verder ontwikkel en die matematiese intuïsie is die toets van reg of verkeerd. Die vermoë om in die tyd te onderskei maak die vorming/.....

-
- 1) Heyting: Mathematische Grundlagenforschung intuitionismus Beweistheorie, 2.
 2) Heyting, Mathematische Grundlagenforschung intuitionismus Beweistheorie, 3.
 3) Ibid: 3
 4) Ibid: 5.
 5) Ibid: 11
 6) Ibid: 12.
 7) Ibid: 13.

ming van reekse moontlik en die grondliggende reeks is dié van die natuurlike getal.

Die Intuisioniste is deur ander denkers op verskillende punte aangeval en aan kritiek onderwerp. Die idealistiese verklaring van getal bevat, volgens Curry, 'n teenstrydigheid aangesien dit metafisiese opvattinge veronderstel waarvan die Wiskunde volgens 'n idealistiese beskouing vry behoort te wees.¹⁾

Volgens Von Freytag kan die volgende punte van kritiek op die standpunt van die Intuisioniste ingebring word:

(a) Volgens die idealistiese beskouing word die getal psigies verklaar en dan ontstaan die vraag direk: Waarom is dit dan dieselfde vir alle mense? Hierdie argument kan egter met ewe veel reg ten gunste van die idealistiese standpunt aangevoer word.

(b) Intuïsie is slegs die middel waardeur die mens met die getal kennis maak. Dit veronderstel dus 'n eie bestaan of syn van getal buite die menslike gees. Hiervan gee die intuisioniste geen verklaring nie.

(c) Intuïsie is 'n twyfelagtige herkenningsmiddel en dit mag ons verkeerd lei. Dit kan dus nooit 'n bewysmiddel word nie.²⁾ Ook hierdie punt van kritiek is aanvegbaar, omdat die mens tog dikwels van intuïtiewe wete as bewysmiddel gebruik maak, bv. in geloof, en by primitiewe volke in baie dinge soos die onderskeiding van goed en kwaad.

Vir skrywer hiervan is die Intuisionisme nie aanneemlik as 'n verklaring vir die ontstaan en wese van getal nie, maar wel as verklaring vir die ontwikkeling en uitbou van die Rekenkunde en getalleleer. In die laaste paragraaf van hierdie hoofstuk word hierop teruggekom.

c. Die Formalisme/.....

1) Curry: Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics, 5.

2) Von Freytag: Die ontologischen Grundlagen der Mathematik, 12.

Die Formalisme gaan uit van sekere vooropgestelde aksiomas en definisies. Hieruit moet, en kan, alle wiskundige wette en reëls afgelei en bewys word. Daar word vooraf 'n oer-stelsel opgestel waarin 'n noukeurige omskrywing van terme voorkom; daar word vasgestel watter maniere daar is om nuwe terme te vorm; 'n lys van die moontlike manipulasies met die soort argumente wat vir elk aangevoer kan word, word opgestel; die eenvoudige vooropgestelde stellings, aksiomas en reëls van procedure word noukeurig vasgestel; die verskillende prosesse en begrippe word deur middel van simbole voorgestel, en die verklaring van hierdie simbole vorm 'n deel van die oorspronklike raamwerk. Hierdie uiteensetting moet af wees, d.w.s. terme, stellings, aksiomas sowel as alle prosesse moet volledig wees. Die stelsel verkry hierdeur 'n morfologiese sowel as 'n teoretiese karakter. Hierdie primêre wette, aksiomas en postulate word beskou as wáár volgens definisie.¹⁾

Hilbert kan as een van die toonaangewende Formaliste beskou word. Hy het begin deur die Euklidiese Meetkunde van onnodige en/of onsuivere definisies, postulate en aksiomas te suiwer en die kleinste aantal noodsaaklike aksiomas vir die opbou van die Wiskunde te formuleer. Baldus stel dit soos volg: die Formalis „ist Axiomatiker in der vorher gekennzeichneten abstrakter Weise, hält zur Vollendung des Beweises der Widerspruchlosigkeit der Geometrie den Beweis der Widerspruchlosigkeit der Arithmetik der ganzen Zahlen für nötig, glaubt an die Lösbarkeit jedes mathematischen Problems, benützt ununterbrochen den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und lässt reine Existenzialaussagen gelten.“²⁾

Die grondvare van die formalisme kom neer op: (a) Is die aksiomas van die stelsel vry van teësprak? en
(b)/.....

1) Curry: Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics, ch. IV.

2) Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, 18.

(b) Is die aksiomas van die stelsel onderling onafhanklik?¹⁾

Hilbert sien getalle as „Zeichen ohne Bedeutung.“²⁾ en beweer verder „die Existenz mathematischer Gegenstände sei ihre Widerspruchsfreiheit, sonst nichts.“³⁾ Enige konsekwente aksiomatikus sê dan ook: „bestaan = niet-strydig-zyn.“ Die probleem van 'n formalistiese bewys kom dus op die volgende neer: „We moeten een systeem van bestaande dingen aanwysen, die, op de juiste wyze met de dingen van ons systeem in correspondentie gebracht, aan de in ons systeem gestelde axiomata blyken te voldoen .. de rekenkunde ... volgens Hilbert.“⁴⁾ Om dus sekerheid vir sy bewysgronde te hê, moet die Formalisme die Rekenkunde self weer formeel-aksiomaties grondves en opbou.⁵⁾ Die formaliste stuit altyd noodwendig op die probleem om die natuurlike getal op sekere aksiomas te fundeer en dan die vryheid van teësprak hieruit te bewys.⁶⁾ Hulle herlei wiskundige redenering tot die toepassing van suiwer meganiese rekenwerk.⁷⁾ „An die Stelle des mathematischen Denkens treten damit formale Gesetzmäßigkeiten.“⁸⁾ Hilbert verabsoluteer nóg die Wiskunde, nóg die Logika maar wil die twee gesamentlik aksiomaties opbou.⁹⁾ In die Metawiskunde of bewysteorie, moet die dooie tekens lewe ingeblaas word en teësprakvryheid bewys word. Hiervoor is die natuurlike getal nodig en moet volledige induksie gebruik word.¹⁰⁾

As verklaring vir die wese van die getal, bevredig die Formalisme nie. Vryheid van teësprak het betrekking/.....

-
- 1) Baldus: Formalismus und Intuitionismus, 17.
 - 2) Freytag: Die ontologischen Grundlagen der Mathematik, 10.
 - 3) Ibid: 10.
 - 4) Koksma: Wiskunde en Waarheid, 19.
 - 5) Ibid: 20.
 - 6) Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, 19, ook Koksma: Wiskunde en Waarheid, 20, 21, 36.
 - 7) Koksma: Wiskunde en Waarheid, 35.
 - 8) Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, 23.
 - 9) Koksma: Wiskunde en Waarheid, 35.
 - 10) Ibid: 36.

betrekking op 'n matematiese stelsel en nie op die wese, die syn, van dinge nie. Getal was lank voor die aksiomas en bestaan onafhanklik van die aksiomas voort. Die formalistiese Wiskunde berus op die „gestaltlichen Eigenschaften von Zeichen.“, iets wat meeste denkers nie bevredig nie. Formalisme sluit 'n realistiese opvatting van getalle nie uit nie en gee dus self nie 'n finale antwoord op die grondvrae i.v.m. getalle nie.¹⁾ Die formalistiese aksiomas is dikwels gekunsteld en nie evident nie,²⁾ en die opgeboude stelsels moet weer op die Rekenkunde 'n beroep doen vir hulle bewysgronde -- moet dus weer die Rekenkunde formeel-aksiomaties grondves en opbou. Die probleem is om weer iets te vind waarop hierdie aksiomas gegrond kan word. Enige poging om die Rekenkunde op iets anders te grond, moet lei tot 'n „vitieusen sirkel.“³⁾ Die grootste struikelblok in die weg van die Formalisme is dan ook om die teësprakvryheid van die natuurlike getal te bewys.⁴⁾ Ook Frege wys daarop dat daar in die Meetkunde gemaklik die teenoorgestelde van een of ander postulaat neergelê kan wordter wille van redenering, maar as dieselfde op die terrein van die getal gedoen word, al is dit slegs in verband met een feit, tree algehele verwarring in.⁵⁾ Selfs t.o.v. die Meetkunde bevredig die standpunt van die formaliste nie. Die postulate en aksiomas word so opgestel dat dit die gegewens van die Euklidiese Meetkunde insluit en tot die bevindings van die klassieke Wiskunde lei, of anders word die vooropgestelde raamwerk gewysig om dit in te sluit. As dit nie die geval was nie, sou eenvoudiger postulate opgestel kon word en die hele stelsel so vereenvoudig kon word.⁶⁾ Die

formalistiese/.....

1) Von Freytag: Die ontologischen Grundlagen der Mathematik, 10.

2) Koksma: Wiskunde en Waarheid, 25.

3) Ibid: 20, 35.

4) Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, 19.

5) Frege: Die Grundlagen der Arithmetik, i.ve.

6) Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, 14.

formalistiese stelsel word dus aan die klassieke Wiskunde getoets en nie andersom nie.

'n Laaste beswaar teen die Formalisme is dat Hilbert sy grondbegrippe nie definieer nie en die hele stelsel bly dus vaag en onbevredigend as verklaring van die wese van die getal of die Wiskunde.¹⁾

d. 'n Logisistiese Standpunt.

Die Logisisme is nou verwant aan die Formalisme, maar by e.g. val die nadruk op die logiese redenering en objektiewe denke.

As voorbeeld van hierdie denkrigting, word Bertrand Russell, een van die toonaangewende wiskundige filosowe, hier bespreek, met kort verwysings na 'n paar minder bekendes.

Russell stel hom ten doel: „the proof that all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of logical concepts, and that all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logical principles.”²⁾ Hy sê verder: „I have accepted the non-existential nature of propositions and their independence of any knowing mind, also the pluralism which regards the world, both that of existents and that of entities as composed of an infinite number of mutually independent entities, with relations that are ultimate, and not reducible to adjectives of their terms or of the whole which these compose.”³⁾ Russell wil dan uit 'n paar fundamentele aksiomas deur logiese redenering, sy wiskundige en rekenkundige stelsels opbou. Wanneer hy by die definisie van die natuurlike getal kom, stel hy voorop dat 'n definisie nie altyd moontlik is nie, want „given any set of notions, a term is definable by these notions when, and only when, it is the only term having to certain of these notions a certain relation which itself is one of the said notions.”⁴⁾ Hy beskou sekere logiese grondbeginsels/.....

1) Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik,

2) Russell: The Principles of Mathematics, xv. 19, 20.

3) Ibid: cviii

4) Ibid: lll

beginnels as die enigste ondefinieerbare gegewens.¹⁾ Om tot die definisie van die natuurlike getal te kom, voer hy die begrip van Klasse in. „All finite collections of individuals form classes, so that what results is after all the number of a class. Thus, when any class-concept is given, there is a certain number of individuals to which this class-concept is applicable, and the number may therefore be regarded as a property of the class. Numbers, then, are to be regarded as property of classes. Two classes have the same number when their terms can be correlated one to one, so that any one term of either corresponds to one and only one term of the other.”²⁾ We must not bring in counting where the definition of numbers is in question.³⁾ Mathematically, a number is nothing but a class of similar classes.”⁴⁾ Deur gebruik te maak van hierdie definisie, asmede 'n aantal logiese denkwette, lei Russell die verdere Rekenkunde en Wiskunde af.

Ook Dedekind beskou die getal as die produk van suiwere denke. „Indem ich die Arithmetik nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus dasz ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauung des Raumes und der Zeit, dasz ich ihn wehlmehr für einen unmittelbaren Ausfließ der reinen Denkgesetze halte. Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel um die Verscheidenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.”⁵⁾ Die getal is 'n skepping van die menslike gees - word in aansyn geroep deur die denke. „So sind wir auch schon von unserer Geburt an beständig und in immer steigendem Masse veranlaszt, Dinge auf Dinge zu beziehen und damit diejenige Fähigkeit des Geistes zu üben, auf welcher auch die Schöpfung der Zahlen beruht. Durch diese Übung erwerben wir uns auch

einen/.....

1) Russell: The Principles of Mathematics, 112.

2) Ibid: 113.

3) Ibid: 114.

4) Ibid: 116.

5) Dedekind: Gesammelte Mathematische Werke, Band 111, 335.

einen Schatz von eigentlich arithmetischen Wahrheiten, und so kommt es dasz manche, eigentlich sehr zusammengesetzte Begriffe fälschlich für einfach gelten."¹⁾ Alle rekenkundige feite en uitbreidings van die getallery, is die produk van die menslike rede. „Um so schöner erscheint es mir dasz der Mensch, ohne jede Vorstellung von mezbare Gröszen, und zwar durch ein endliches System einfacher Denkschritte sich zur Schöpfung des reinen, stetigen, Zahlreihe Aufschwingen kann."²⁾ Dedekind wil 'n suiwer, onafhanklike definisie van getal gee. „Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung ϕ geordneten Systems von der besondere Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehung auffast in die sie durch die ordnende Abbildung ϕ zueinander gesetzt sind, so hieszen diese Elemente natürliche Zahlen, oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen."³⁾ Ook Frege beskou getal as die produk van die menslike denke en gebaseer op, selfs deel van, die Logika. „I go so far as to agree with those who hold that it is impossible to effect any sharp separation of logic and mathematics."⁴⁾ I infer, therefore, that the notion of unity becomes known to us through those higher intellectual powers which distinguish men from brutes."⁵⁾ Hy verwerp die idealistiese sowel as die realistiese opvatting van getal. „Number is neither anything sensible nor a property of external things."⁶⁾ Number words are to be understood as standing for selfsubsistent objects."⁷⁾ The laws of arithmetic are analytical judgments and/.....

1) Dedekind: Gesammelte mathematische Werke, Band 3, 337.

2) Ibid: 340.

3) Ibid: 360.

4) Frege: Die Grundlagen der Arithmetik (Trans. J.L. Austin) (Hierdie werk bevat die oorspronklike Duitse teks met die Engelse vertaling daarlangs in dieselfde band. Die bladsye van die Engelse gedeelte word met 'n e aangedui)

5) Ibid: 42e.

6) Ibid: 70e.

7) Ibid: 73e.

and consequently apriori. Arithmetic becomes simply a development of logic, and every proposition of arithmetic a law of logic, albeit a derivative one. Calculation becomes deduction."¹⁾ Die konsekwente deurvoering van hierdie opvatting bevredig Frege nie ten volle nie, want hy verklaar: "I do not claim to have made the analytical character of arithmetical propositions more than probable, because it can still always be doubted whether they are deducible solely from purely logical laws, or whether some other type of premiss is not involved."²⁾ Die rede vir hierdie twyfel moet in die verskil tussen Rekenkunde en aanverwante vakke soos Meetkunde gesoek word.

"For purposes of concepted thought we can always postulate the contrary of one or other of the geometrical axioms. Can the same be said of the fundamental propositions of the science of number? Here we have only to try denying any one of them, and complete confusion ensues. The basis of arithmetic lies deeper, it seems, than that of any of the empirical sciences and even than that of Geometry. The truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all: for to it belongs not only the existent, not only the intuitable but everything thinkable."³⁾ In sy poging om vas te stel wat die getal dan eintlik is, maak Frege gebruik van die term: "begrip". "The concept has a power of collecting together far superior to the unifying power of synthetic apperception. A statement of number contains an assertion about a concept."⁴⁾ Numbers are assigned only to the concepts, under which are brought both the physical and mental alike."⁵⁾ Omdat Frege die begrip verabsoluteer, baseer hy ook sy definisies hierop. Hy begin met die begrip nul. "The number 0 belongs to a concept if the proposition that a does not fall/.....

1) Frege: Die Grundlagen der Arithmetik, 99e.

2) Ibid: 102e.

3) Ibid: 20e, 21e.

4) Ibid: 59e.

5) Ibid: 83e.

fall under that concept is true universally, whatever a may be." Daarna volg die definisie van een. "The number 1 belongs to a concept F, if the proposition that a does not fall under F is not true universally, whatever a may be, and if from the propositions a falls under F' and 'b falls under F' it follows universally that a and b are the same."¹⁾

Om die getal in die algemeen te definieer, vind Frege dit nodig om eers duidelik te stel wat hy onder 'n een-een-korrelasie verstaan. Hy doen dit soos volg: "If now every object which falls under the concept F stands in the relation $\emptyset$ to an object falling under the concept G, and if to every object which falls under G there stands in the relation $\emptyset$ an object falling under F, then the objects falling under F and G are correlated with each other by the relation $\emptyset$ ".²⁾ In die geval van die ordinale getalle moet die verband $\emptyset$ 'n een-een-betrekking wees. As hierdie korrelasie bestaan, kan die getalle soos volg gedefinieer word: "Die Anzahl welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes ,gleichzahlig dem Begriffe F' ".³⁾ Om die volle getalreeks op te bou, begin Frege by 0 wat reeds gedefinieer is en bou daarop voort op grond van die stellings: y volg op x in die $\emptyset$ -reeks en x kom voor y in die $\emptyset$ -reeks.⁴⁾

Die standpunt van die logisiste bring ook probleme mee. Die eerste probleem van die Logisisme is dat die Logika self met sekere paradokse worstel en dus self alles behalwe vry van teësprak is, terwyl teësprakvryheid een van die toetsstene van die Wiskunde is en die bewysgrond moet vorm.⁵⁾ Die getal is/.....

-
- 1) Frége: Die Grundlagen der Arithmetik, (Trans. Austin) 67e.
 2) Ibid: 83e.
 3) Ibid: 80-81.
 4) Ibid: 92e.
 5) Koksma: Wiskunde en Waarheid, 24.

is ook vir die Logika onmisbaar, al is dit dan slegs om die verskillende stellings te nommer en in volgorde te plaas. Die Logisisme moet dus van die getal gebruik maak om getal af te lei.¹⁾ Op grond van hierdie oorwegings moet die standpunt van die Logisisme as verklaring vir getal verwerp word.

Die drie groepe denkers wat nou bespreek is, Idealiste, Formaliste en Logisiste is al drie wiskundig. Dit gaan by hulle om die Wiskunde en Rekenkunde en Getal en nie om 'n omvattende wysgerige stelsel nie. In die volgende paragraaf word een van die verteenwoordigers van 'n omvattende wysgerige siening waarin getal ook sy plek inneem, bespreek. Die hele benadering van die probleem is anders en dit lei nie tot 'n definisie van getal nie maar dui die plek van getal in die Kosmos aan.

e. Dooyeweerd se Standpunt

Hoewel Dooyeweerd, een van die mees voor-
aanstaande Calvinistiese wysgere, nie tot 'n volledige ontwikkeling van sy teorie i.v.m. die wets-
kring van die getal gekom het nie, sluit sy filosofie tog nie hierdie gebied uit nie. Dit is Dooyeweerd in die eerste plek te doen om 'n transendentale wysgerige stelsel op te bou waarin hy dan ook sy Archimedespunt buite die Kosmos kies. Hierdeur plaas hy sy denke onmiddellik op 'n veel hoër vlak as dié van die wysgere wat in die vorige paragrafe bespreek is. Hulle uitgangspunt was die mens en menslike denke; hy stel die soewereiniteit van God voorop. „De wysbegeerte blyft, in al haar werkzaamheid gebonden onder de wet des tyds, ze is niet de soevereine, aan niets en aan niemand verantwoording schuldige werkzaamheid der menschelyke rede, gelyk aan modern humanist de , kennisleer' in humanistischen hoogmoed meende te kunnen kwalificeeren, maar ze is de dienstmaagd van God, den Souverein. Het dienen/.....

1) Koksma: Wiskunde en Waarheid, 25.

dienens Gods is haar eereposisie, de loochening Gods haar doemvonniss.¹⁾ Volgens hierdie opvatting is die

mens dus nie verantwoordelik vir die skepping van getal of die menslike denke alleen vir die getal-leer nie. In die Tyd word die skepping in verskillende wetskringe „gebreek.” Getal is geen produk van die menslike rede as sodanig nie, geen willekeurige saamgestelde aksiomatiese wetenskap wat op logiese denkwette berus nie, maar dit word bepaal deur die wette van God, die wette wat die onoor-koomlike grens tussen Skepper en Skepping vorm.²⁾

Die grense van die Wysbegeerte word dan ook bepaal deur die wetsidee.³⁾ Daar bestaan trouens geen dimensie waar die wetsidee nie sy sentrale, aprioristiese invloed laat geld nie. Die tydelike eenheid van alle dinge is die „gegees” van die naiewe ervaring wat tot 'n wysgerige taak moet word in 'n deur die wetsidee bepaalde rigting.⁴⁾ Getal kan, volgens hierdie beskouing, nooit alleen, los van die ander wetskringe, beskou word nie. „In waarheid kan niemand, die over getallen, ruimtefiguren, bewegingen, enz., of ook over de concrete dinge spreek, ze anders dan in hun zin, dat is hun betrekkelike, naar elkander en naar aller oorsprong heenwyzende zynswyzevatten.”⁵⁾ „Zin” beteken hierdie „zynswyze van alle creatuurlyk zynde.”⁶⁾ Die feit dat $2 \times 2 = 4$ is nie waar „an sich” nie maar slegs in relatiewe sin „de zin-verbinding van de zin-bezonderheid der getalswetten en die der logische denkwetten.” Hierdie verbinding is dan alleen moontlik in die alsydige samehang van al die wetskringe en veronderstel 'n totaliteit waarvan getalskring en logiese kring albei slegs 'n besondere „zin-breking” is.⁷⁾ Op grond

van/.....

1) Dooyeweerd: De Wysbegeerte der Wetsidee, Deel 1, 57.

2) Ibid: 58.

3) Ibid: 59.

4) Ibid: 60.

5) Ibid: 63.

6) Ibid: 62.

7) Ibid: 81.

van hierdie en soortgelyke uitsprake, beweer Dooyeweerd dat die Rekenkunde, as moderne, sistematiese vakwetenskap, nie moontlik is sonder dat mens stelling t.o.v. die onderlinge verhouding en samehang van die getalle, beweging, ruimte, werklikheid en logiese denke inneem nie.¹⁾ Hy sien die Kosmos as skepping van God, as een groot geheel wat in ons tyd gebreek word in verskillende wetskringe wat egter nie sonder onderlinge verband is nie. Elk van hierdie wetskringe wys vooruit op 'n volgende en terug op 'n voorgaande maar die getalskring is die basiese. „Alle andere Wetskringen zyn maar hun modale zinstructuur in den getalskring gefundeerd en daarin erkennen wy den getalskring als eersten grenskring van onzen Kosmos. In de structuur van den originairen modalen zin van het getal treffen wy geen enkele retrocipatie aan. De originairen quantiteit is analogie-loos.“²⁾ Volgens hierdie standpunt is die logiese eenheid ~~an~~ menigvuldigheid in die getalsin gefundeerd en nie andersom nie.³⁾ Dooyeweerd beskou die getal nie as 'n produk of uitkoms van telwerk nie, omdat alle telwerk „een althans voor-theoretische besef van den zin van het getal en zyn innerlyke wetmatigheid veronderstelt.“⁴⁾ Die getal berus dus op 'n voor-teoretiese, naïewe begrip - op intuïsie.

Volgens Dooyeweerd bestaan die intuïsie daarin dat „de continue zin-samenhang in de tydelike zin-breking wordt in haar achter alle theoretische begripsgrenzen onmiddellyk gevat.“⁵⁾

Uit hierdie kort uiteensetting word dit duidelik dat Dooyeweerd radikaal van beide Intuïtioniste sowel as Formaliste en Logisiste verskil omdat hy die oorsprong en wese van getal buite mens of Kosmos soek. Dooyeweerd het, so ver my bekend, nog nie gekom tot 'n volledige uiteensetting van die wetskring/.....

1) Dooyeweerd: De Wysbegeerte der Wetsidee, Deel 2, 65.

2) Ibid: 65.

3) Ibid: 61.

4) Ibid: 63.

5) Ibid: 408.

wetskring van die getal nie, maar sy uitgangspunt is die Calvinistiese en vir die gelowige heel aanneemlik.

f. Die standpunt wat vir die skrywer die aanneemlikste is.

Die kritiek wat op die Intuisionisme, Logisisme, en Formalisme uitgespreek is¹⁾ is m.i. voldoende om al drie hierdie pogings om die wese van getal te bepaal, te verwerp. Hoewel Dooyeweerd se beskouinge nie ver genoeg ontwikkel is om op die grondvraag 'n finale en afdoende antwoord te gee nie, is sy standpunt vir my die aanneemlikste. Dit plaas die oorsprong van getal buite die denke van die mens en bestempel dit, saam met alle ander wetskringe, as brekings in die Tyd van die skepping van God.

Ek sou dit graag soos volg wou stel: God het in die skepping eenheid en veelheid vasgelê, meer en minder. Dit is 'n inherente deel en kenmerk van die Kosmos waarin die mens gebore word en opgroei, nie alleen wat die konkrete dinge betref nie, maar ook op die gebied van alle bestaande en denkbare begrippe. Eenheid en veelheid, meer en minder is die basiese begrippe en lê alle getal ten grondslag. Beide groep en rang is in die skepping ingebou. Die vermoë om te onderskei tussen een en weer een ding of begrip wat as losstaande van ander van dieselfde en ander van 'n ander soort gedink kan word, is deur God aan die mens gegee en is 'n algemene, eg-menslike vermoë, so ook die vermoë om tussen meer en minder, groot en klein, lank en kort, swaar en lig, te onderskei. Uit hierdie basiese vermoëns ontwikkel die bekwaamheid om tussen groepe te onderskei, deur ervaring, en spontaan deur ryping. Dit kan dus 'n intuïtiewe vermoë genoem word. Nadat groepe benoem is, word die grondliggende reëls ontdek en ontwikkel deur wat Brouwer matematiese intuïsie noem. Die ontwikkeling is logies maar die Logika is nie 'n vereiste vir die ontwikkeling nie. 'n Formalistiese oer-raamwerk is nie nodig nie/.....

1) Kyk bladsye: 14, 16, 25.

nie, ook nie 'n formalistiese aksioma-stelling nie. Die feit dat die Formalisme sy stelsel aan die Klas-sieke Wiskunde toets en nie andersom nie, is m.i. hiervoor afdoende bewys. Ten opsigte van die groei en ontwikkeling van die getalleleer, sluit hierdie standpunt aan by dié van Brouwer. Samevattend kan ons sê: die getalskring is een van die wetskringe waarin die skepping van God in die Tyd gebreek word en die mens kom tot kennis daarvan deur middel van 'n, ook deur God gegewe, verstandelike vermoë en bou dit uit deur matematiese, logiese intuïsie.

In hierdie hoofstuk is die eerste vraag wat in die eerste hoofstuk gestel is, nl. wat die getal na sy wese is, kortliks behandel en 'n antwoord tentatief gegee. By die verdere ondersoek na die ontwikkeling van die getalsbegrip van die kind, word dan nou van die beskouing soos hierbo beskrywe, uitgegaan wanneer van getal gepraat word.