WETENSKAPLIKE BYDRAES VAN DIE PU VIR CHO
Reeks H: Inougurele Rede nr. 65

ENKELE KENMERKENDE ASPEKTE VAN FUNKSIONAALANALISE

Peter van Eldik

Rede uitgespreek deur dr. Peter van Eldik by die aanvaarding van die amp as Hoogleraar in die Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde aan die Vaalrivierse Tak van die Potchefstroomse Universiteit vir Christelike Hoër Onderwys op 27 Februarie 1980.

Potchefstroom
1980

ENKELE KENMERKENDE ASPEKTE VAN FUNKSIONAALANALISE

1. Inleiding

Deur net 'n oomblik aan die moderne ontwikkelings in die wêreld rondom ons te dink kom ons tot die besef van die steeds toenemende rol wat Wiskunde in ons huidige samelewing speel. Die grondrede waarom Wiskunde vandag van so 'n groot belang is en wye algemene belangstelling geniet, lê in die gebruik daarvan en die wyse waarop dit ons samelewing verander het. Dit stel die moderne wetenskaplike in staat om sy werk met groter doeltreffendheid en met meer insig te doen. Wiskunde kan daarom ook tereg beskou word as een van die kragtigste stukke gereedskap waarmee die weg vir alle wetenskaplike en tegnologiese ontwikkelinge gebaan word.

Wiskunde speel ook 'n fundamentele rol in die ekonomiese ontwikkeling van 'n land, in besonder ook Suid-Afrika, omdat dit 'n basiese faktor vir alle wetenskaplike en tegnologiese opleiding en navorsing is (Fehr, 1968, p. 666). Dit vorm 'n kerngedeelte in die opleiding van 'n steeds toenemende aantal ingenieurs, fisici, chemici, bioloë, sosioloë, sielkundiges, ekonome, mediese wetenskaplikes en vele ander hoogs gespesialiseerde wetenskaplike navorsers en tegniese spesialiste. Voeg 'n mens hierby die opleiding van wiskundiges, toegepaste wiskundiges, rekenaarwetenskaplikes, statistici en operasionele navorsers, raak jy opnuut bewus van die hoë eise wat moderne ontwikkelings stel.

Gedurende die afgelope eeu het daar pragtige vordering in die vak Wiskunde plaasgevind, waarsonder bogenoemde ontwikkelings sekerlik nie moontlik sou wees nie. Alhoewel die ontwikkeling van die Wiskunde steeds deur nuwe tegnologiese ontwikkelings gestimuleer word, is Wiskunde egter in sy groei nie alleen van die vraag daarna afhanklik nie. Wiskundige ontwikkelings het meermale na verloop van geruime tyd geblyk verrassende toepassings te hê. Een van hierdie ontwikkelings was die vakterrein wat in Wiskunde as Funksionaalanalise bekend staan.

Hierdie vakterrein het my navorsingsgebied geword en is vir my van onskatbare waarde, omdat ek daardeur soveel wyer perspektief en dieper insig in Wiskunde verkry het. Om hierdie rede het ek besluit om met u by 'n paar kenmerkende aspekte van Funksionaalanalise stil te staan. Ek wil u graag 'n kykie in hierdie jong vakterrein gee en terselfdertyd die belangrikheid en toepasbaarheid hiervan vir die hedendaagse wetenskaplike aanstip. Gou het ek egter besef dat dit geensins 'n maklike taak is nie, want uit die aard van die saak wil ek nie in ingewikkelde bewyse betrokke raak nie. Ek gaan derhalwe probeer om enkele grondliggende gedagtes met eenvoudige voorbeelde toe te lig, en ek vertrou dat u dit interessant en insiggewend sal vind.

Die eerste vraag wat u sekerlik sal stel, veral nadat u die titel van my rede verneem het, is: Wat behels die vakterrein Funksionaalanalise?

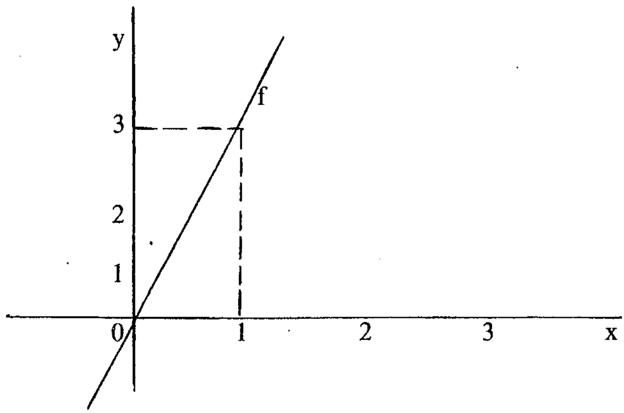
Om in 'n neutedop hierop te antwoord: In Funksionaalanalise bestudeer ons die eienskappe van ruimtes en van afbeeldings tussen ruimtes.

FUNKSIONAALANALISE

STUDIE VAN DIE EIENSKAPPE VAN
RUIMTES
EN VAN
AFBEELDINGS TUSSEN RUIMTES

Aangesien hierdie begrippe van afbeelding en ruimte vir die meeste van u vreemd is, verduidelik ons dit aan die hand van 'n voorbeeld.

Voorbeeld: Beskou die reël f wat aan elke getal 'n nuwe getal toevoeg, naamlik drie keer die getal. Vir 'n getal x skryf ons dan dat $f(x) = 3x$. In hierdie geval is f dan 'n afbeelding van die reële getalle. In besonder is dit 'n voorbeeld van 'n lineêre afbeelding. Die ruimtes wat ter sprake is, is in hierdie geval die versameling reële getalle.



Om saam te vat: In Funksionaalanalise stel ons belang in die eienskappe van sulke afbeeldings tussen algemene soorte ruimtes.

Voordat ons verder hierop ingaan, beantwoord ons kortliks die vraag: Hoe het Funksionaalanalise sy ontstaan gehad?

Die einde van die 19de eeu is gekenmerk deur verskeie nuwe ontwikkelings in Wiskunde wat uit die veralgemening en abstraksie van bekende situasies in die plat vlak en die driedimensionele ruimte voortgespruit het.

Die gedagte wat tot die ontstaan van Funksionaalanalise aanleiding gegee het, was dat dit moontlik behoort te wees om hierdie ontwikkelings in 'n algemene raamwerk te plaas wat deur 'n algemene omvattende teorie beskryf kan word. Die name van persone soos Peano, Volterra, Hilbert, Riesz, Banach en Wiener moet in hierdie verband genoem word (Kline, 1971, p. 1077 en Monna, 1973, p. 76).

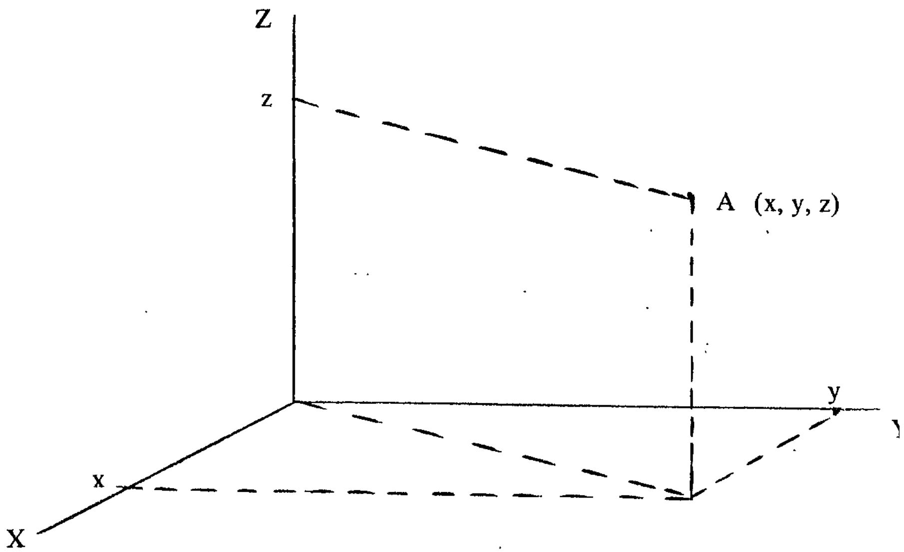
Om hulle gedagtegang beter te beskryf skenk ons vervolgens nadere aandag aan die begrippe ruimte en afbeelding.

2. Die begrippe ruimte en afstand

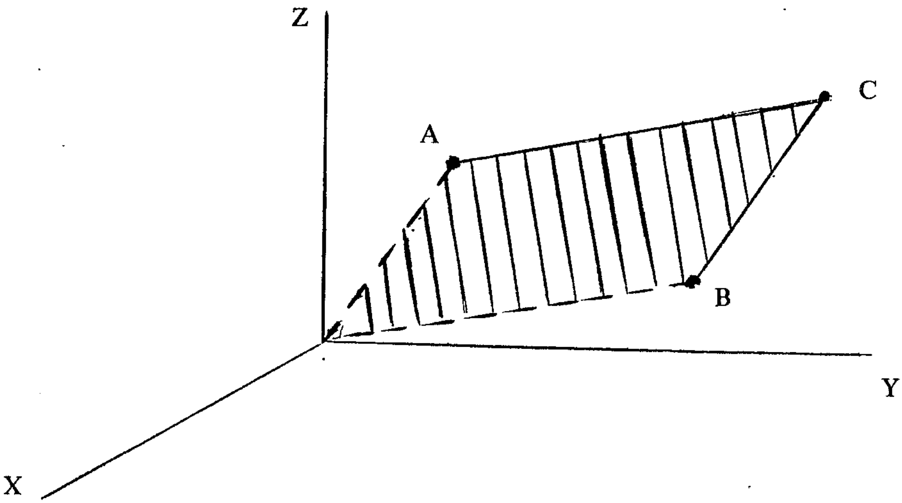
Een van die eerste aspekte wat die ontwikkeling van Funksionaalanalise sterk beïnvloed het, was die veralgemening van die bekende ruimte- en afstandsbegrippe.

Die ruimte waarmee ons die beste vertroud is, is die ruimte waarin ons lewe, ook genoem die driedimensionele ruimte. Daarteenoor is 'n plat vlak 'n voorbeeld van 'n tweedimensionele ruimte en 'n reguit lyn 'n voorbeeld van 'n eendimensionele ruimte. In ons bekende driedimensionele ruimte is daar verskeie grondliggende idees wat in 'n algemener raamwerk geplaas kan word.

Elke punt A in hierdie ruimte kan deur 'n drietal van getalle (x, y, z) voorgestel word.



Tussen sulke punte of drietalle kan ons 'n optelling op so 'n wyse definieer dat dit dieselfde eienskappe openbaar as wat met die gewone optelling van getalle die geval is. Die „som" van die punte A (x_1, y_1, z_1) en B (x_2, y_2, z_2) is 'n punt C met koördinate $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

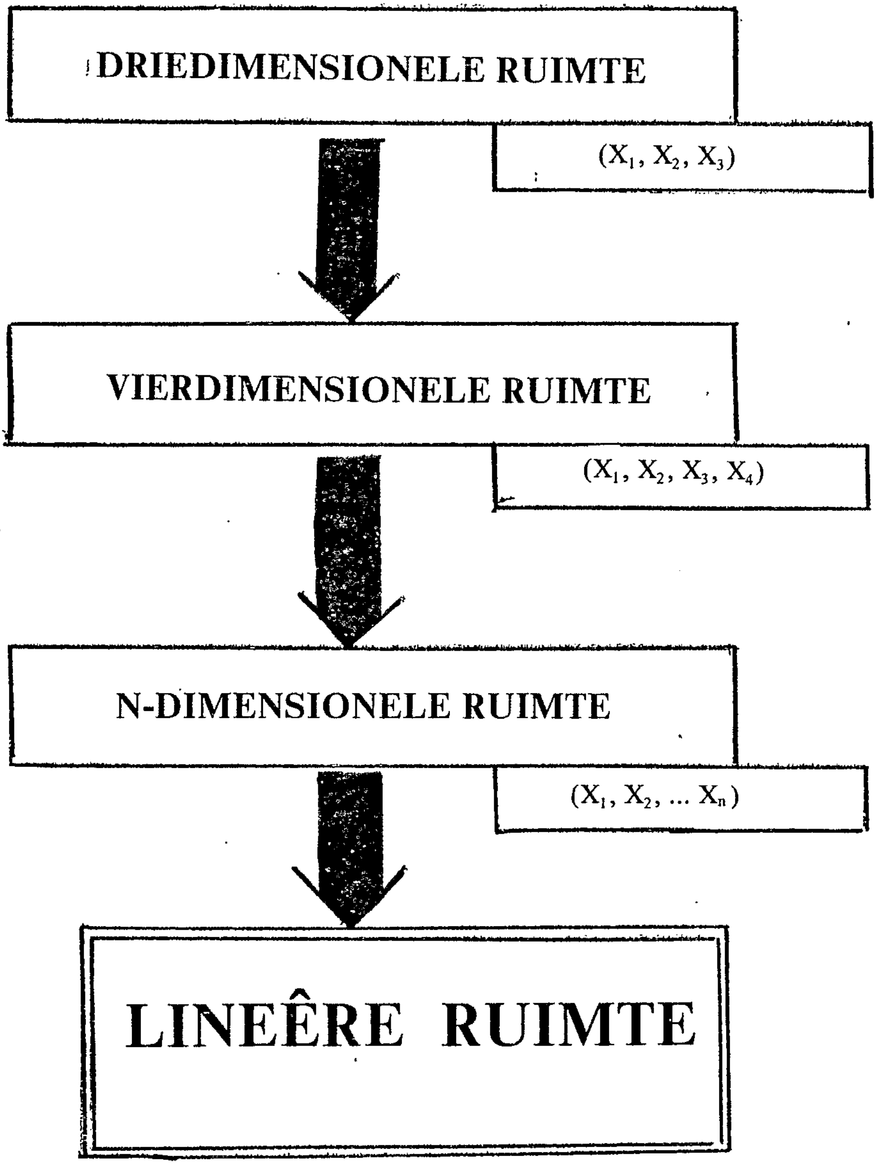


Baie van u sal sekerlik die ooreenkoms tussen hierdie optelling en die samestelling van vektore opmerk. Dit is verder ook moontlik om 'n sinvolle vermenigvuldiging in hierdie ruimte tussen sulke drietalle en gewone getalle te definieer. Dit is egter nie nodig om tegnies hierop in te gaan nie.

Niks verhoed ons egter om in plaas van drietalle, na die versameling van alle viertalle te kyk nie. Dis nie eintlik moeiliker om aan viertalle as aan drietalle te dink nie. Tussen sulke viertalle kan ons op dieselfde wyse as hierbo 'n optelling en 'n vermenigvuldiging invoer wat ook dieselfde eienskappe openbaar. Op dié wyse verkry ons 'n vierdimensionele ruimte. Dit raak egter wel 'n probleem om so 'n vierdimensionele ruimte as 'n meetkundige voorwerp te sien!

Met die veralgemening van bostaande aard kan ons voortgaan en 'n *n-dimensionele ruimte* konstrueer waarby n nou een of ander natuurlike getal is. En die interessante van dit alles is die feit dat dit nie juis moeiliker is om in so 'n algemene opset te werk as wat dit in die driedimensionele geval is nie (Stein, 1969, p. 407). Ons kan selfs nog verder gaan! Deur die kenmerkende eienskappe van die optelling en vermenigvuldiging uit te lig bring dit ons by die definisie van 'n algemene *lineêre ruimte* (wat oneindig-dimensionaal kan wees) waarby die elemente ongedefinieer is.

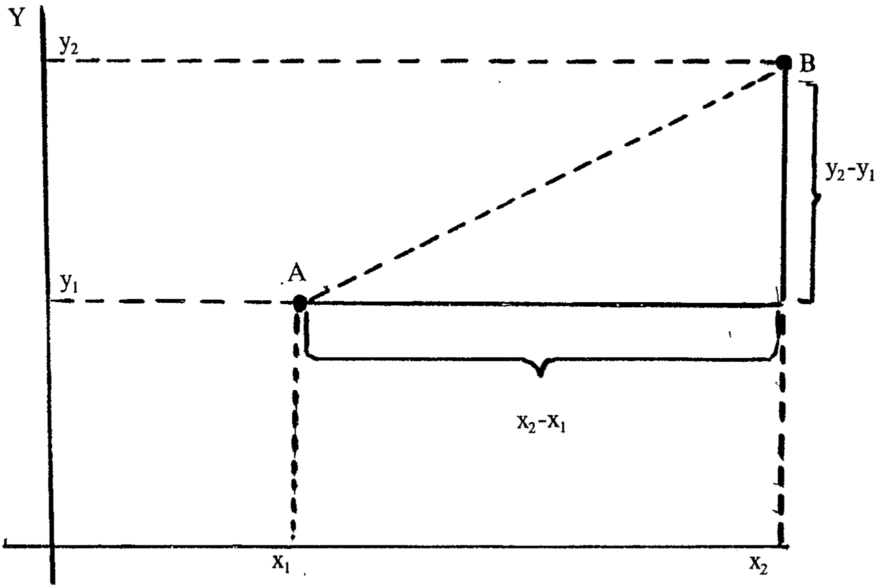
Figuur 1



Die begrip van 'n n-dimensionele ruimte dateer terug na werkstukke van Cayley (1843) en Riemann (1854) in die eerste helfte van die negentiende eeu. Die algemene definisie van 'n lineêre ruimte het eers vyftig jaar later (in 1894) in die werk van die Italiaanse wiskundiges Peano en Volterra verskyn (Monna, 1973, p. 87).

'n Tweede aspek wat nou hiermee saamhang, is die veralgemening van die bekende afstandsbegrip. Vir 'n eenvoudige uiteensetting ontleed ons die situasie in 'n plat vlak.

Beskou twee punte A (x_1, y_1) en B (x_2, y_2) op hierdie vlak.



Die gewone afstand tussen A en B word dan gegee deur

$$d_1 (A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

en ons noem d_1 ook die *natuurlike afstandsfunksie.*

Hierdie afstandsfunksie openbaar 'n aantal kenmerkende eienskappe:

(1) $d_1 (A, B) = O$ as en slegs as $A = B$;

(2) $d_1 (A, B) = d_1 (B, A)$;

(3) $d_1 (A, B) \leq d_1 (A, C) + d_1 (C, B)$ (die driehoeksongelykheid).

Hierdie drie eienskappe, wat so vanselfsprekend lyk, is egter so fundamenteel en kenmerkend van 'n afstandsfunksie dat verskeie ander eienskappe hieruit afgelei kan word.

Dit is ook moontlik om ander soorte „afstande" tussen punte A en B op só 'n wyse in te voer dat eienskappe (1) tot (3) geldig bly.

So kan ons die volgende nuwe afstand invoer:

$$d_2\,(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

in woorde gestel: die d_2-afstand tussen punte A en B is die totaal van die horisontale en vertikale verskuiwings.

Hierdie nuwe afstandsfunksie bevredig ook eienskappe (1) tot (3) en is in die algemeen verskillend van die d_1-afstand. Interessantheidshalwe beskou ons 'n derde afstandsfunksie gegee deur

$$d_3\,(A, B) = \text{maks.}\,(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$$

in woorde gestel: Die d_3-afstand tussen A en B is die grootste waarde van die horisontale of vertikale verskuiwing.

Weer eens word aan (1) tot (3) voldoen. Trouens, dit is moontlik om op verskeie maniere afstandsfunksies te definieer wat almal aan (1) tot (3) voldoen. Oor die algemeen is hierdie afstandsfunksies almal verskillend.

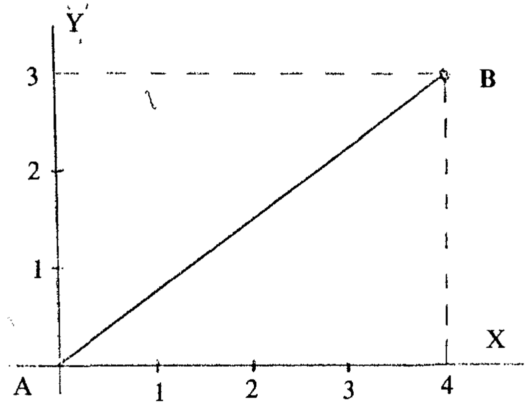
Voorbeeld:

As A(O,O) en B(4,3) dan is

$d_1\,(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

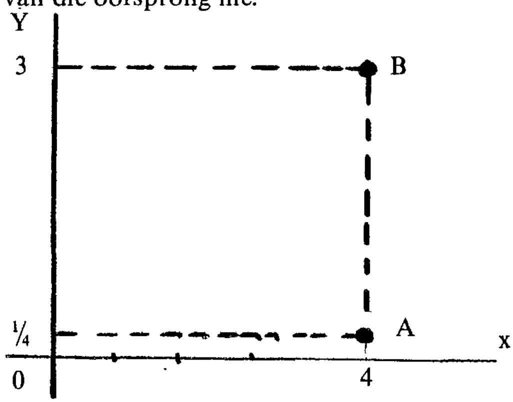
$d_2\,(A, B) = 3 + 4 = 7$

$d_3\,(A, B) = \text{maks.}\,(4, 3) = 4$



Indien ons natuurlik nie duidelik spesifiseer met watter afstandsfunksie ons werk nie, kan interessante situasies ontstaan. Ons noem twee sulke voorbeelde:

1. Twee punte is terselfdertyd ewe ver van die oorsprong en ook tog nie ewe ver van die oorsprong nie:

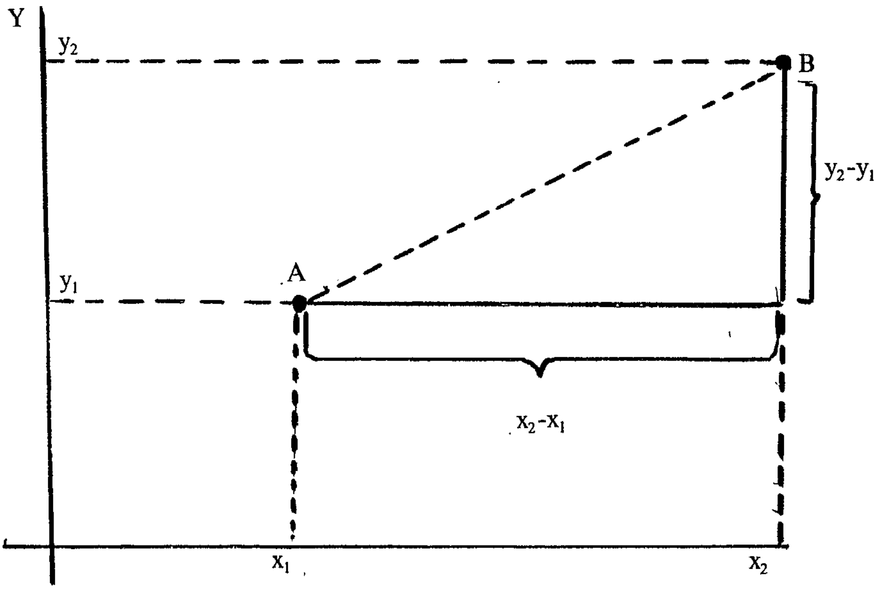


$d_1\,(O, A) \neq d_1\,(O, B)$ terwyl $d_3\,(O, A) = d_3\,(O, B) = 4$

Die begrip van 'n n-dimensionele ruimte dateer terug na werkstukke van Cayley (1843) en Riemann (1854) in die eerste helfte van die negentiende eeu. Die algemene definisie van 'n lineêre ruimte het eers vyftig jaar later (in 1894) in die werk van die Italiaanse wiskundiges Peano en Volterra verskyn (Monna, 1973, p. 87).

'n Tweede aspek wat nou hiermee saamhang, is die veralgemening van die bekende afstandsbegrip. Vir 'n eenvoudige uiteensetting ontleed ons die situasie in 'n plat vlak.

Beskou twee punte A (x_1, y_1) en B (x_2, y_2) op hierdie vlak.



Die gewone afstand tussen A en B word dan gegee deur

$$d_1(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

en ons noem d_1 ook die *natuurlike afstandsfunksie.*

Hierdie afstandsfunksie openbaar 'n aantal kenmerkende eienskappe:

(1) $d_1(A, B) = 0$ as en slegs as $A = B$;

(2) $d_1(A, B) = d_1(B, A)$;

(3) $d_1(A, B) \leq d_1(A, C) + d_1(C, B)$ (die driehoeksongelykheid).

Hierdie drie eienskappe, wat so vanselfsprekend lyk, is egter so fundamenteel en kenmerkend van 'n afstandsfunksie dat verskeie ander eienskappe hieruit afgelei kan word.

Dit is ook moontlik om ander soorte „afstande" tussen punte A en B op só 'n wyse in te voer dat eienskappe (1) tot (3) geldig bly.

So kan ons die volgende nuwe afstand invoer:

$$d_2(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

in woorde gestel: die d_2-afstand tussen punte A en B is die totaal van die horisontale en vertikale verskuiwings.

Hierdie nuwe afstandsfunksie bevredig ook eienskappe (1) tot (3) en is in die algemeen verskillend van die d_1-afstand. Interessantheidshalwe beskou ons 'n derde afstandsfunksie gegee deur

$$d_3(A, B) = \text{maks.}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$$

in woorde gestel: Die d_3-afstand tussen A en B is die grootste waarde van die horisontale of vertikale verskuiwing.

Weer eens word aan (1) tot (3) voldoen. Trouens, dit is moontlik om op verskeie maniere afstandsfunksies te definieer wat almal aan (1) tot (3) voldoen. Oor die algemeen is hierdie afstandsfunksies almal verskillend.

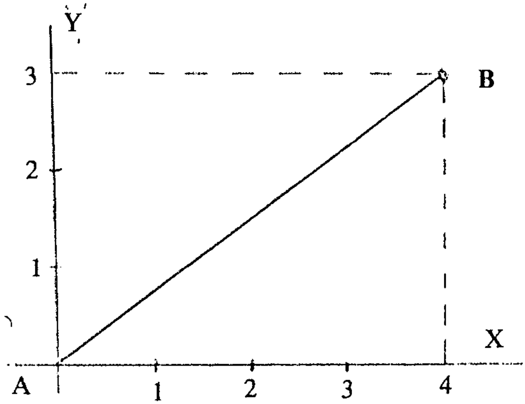
Voorbeeld:

As A(O,O) en B(4,3) dan is

$d_1(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

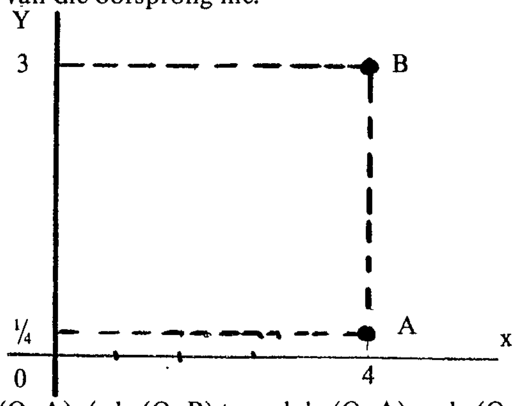
$d_2(A, B) = 3 + 4 = 7$

$d_3(A, B) = \text{maks.}(4, 3) = 4$



Indien ons natuurlik nie duidelik spesifiseer met watter afstandsfunksie ons werk nie, kan interessante situasies ontstaan. Ons noem twee sulke voorbeelde:

1. Twee punte is terselfdertyd ewe ver van die oorsprong en ook tog nie ewe ver van die oorsprong nie:

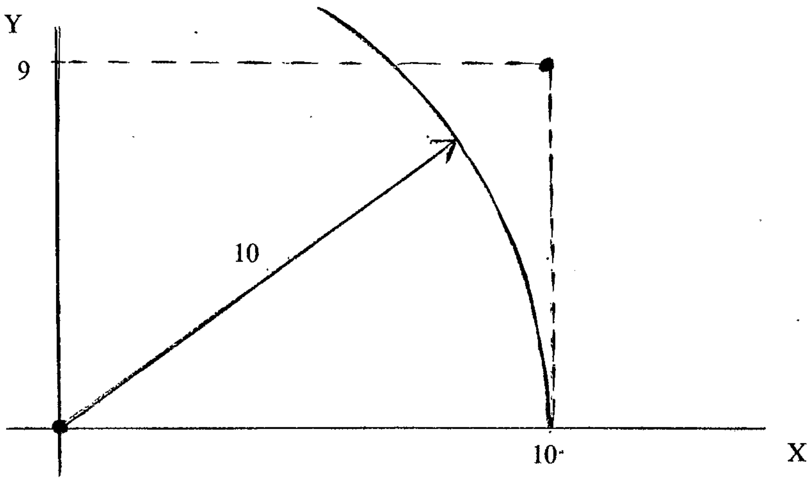


$d_1(O, A) \neq d_1(O, B)$ terwyl $d_3(O, A) = d_3(O, B) = 4$

2. 'n Interessanter tipe bewering is: U is vanaand hier en terselfdertyd ook nie hier nie! (Dit is nou letterlik gesproke.) Dit is weer eens 'n gevolg van die tipe afstandsfunksie wat ons in gedagte het.

Sulke uitsprake laat my altyd dink aan wat Bertrand Russel gesê het (Bergamini, 1970, p. 9) „Mathematics is the subject in which we never know what we are talking about nor whether what we are saying is true".

As u sê dat die afstand tussen u en my 10 meter is, het u miskien die d_3-afstand in gedagte gehad, en u werklike posisie is soos op die skets.



Ek dink egter daaraan met die d_1-afstand en soek u op 'n straal van 10 meter, maar ek kry u nie. U is dus ook nie hier nie!

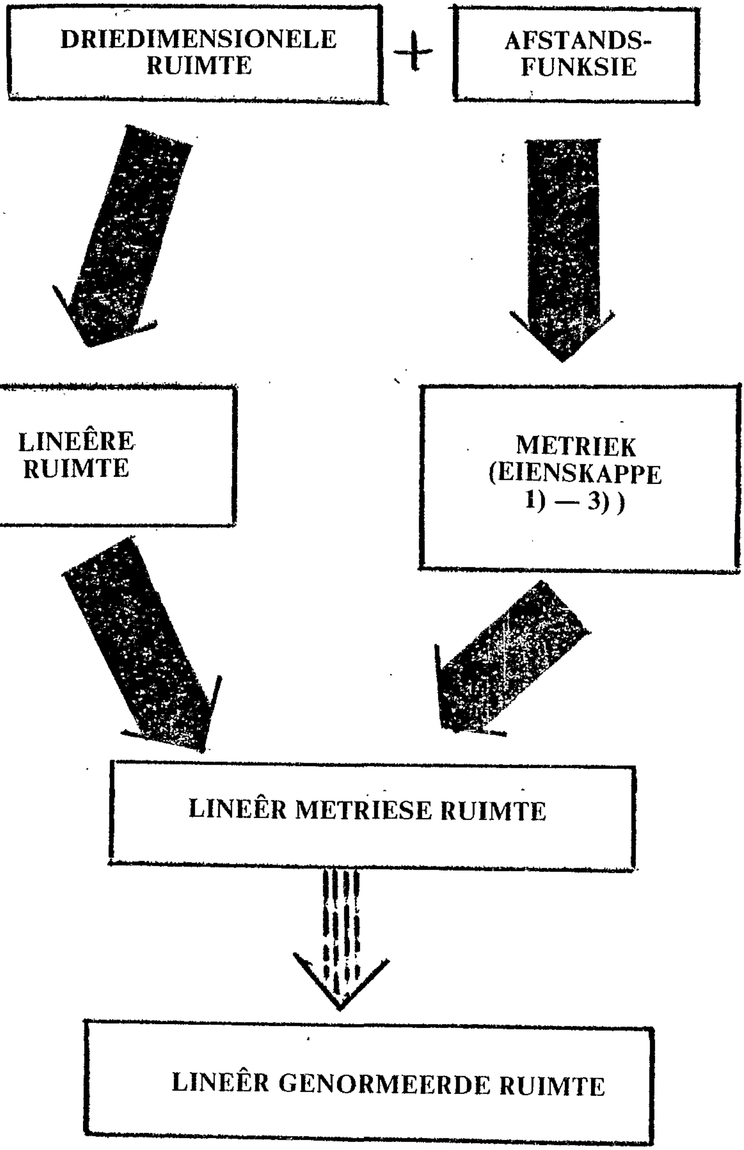
Om saam te vat: Ek het drie belangrike voorbeelde van afstandsfunksies genoem wat al drie dieselfde kenmerkende eienskappe openbaar. Hulle is nie gelyk aan mekaar nie maar besit nogtans 'n verborge koppeling. Hierdie koppeling beskryf ons in die Wiskunde deur te sê dat hulle *ekwivalent* aan mekaar is — 'n begrip waarmee ons te kenne wil gee dat hulle dieselfde eienskappe openbaar.

Wat ons hierbo gesê het, kan nou net so na 'n 3- of 4- of selfs 'n n-dimensionele ruimte oorgedra word.

Die vraag ontstaan natuurlik of dit dan nodig is om verskillende tipes afstandsfunksies te bestudeer. Die primêre rede hiervoor is dat dit in 'n bepaalde probleemsituasie geriefliker is om met een afstandsfunksie as 'n ander een te werk. Sulke situasies kom dikwels voor in benaderings- of approksimasieprobleme waar bewys moet word dat geskikte benaderings en foutafskattings bereik kan word.

Deur die kenmerkende eienskappe (1) tot (3) hierbo genoem te gebruik en nou wel toegepas op die afstande van punte na die oorsprong, kan ons in die algemeen 'n lengtefunksie, ook genoem 'n *norm*, op 'n lineêre ruimte definieer. Hierdie begrip van 'n *lineèr genormeerde ruimte* is dus 'n samevoeging van die bekende ruimte en afstandsbegrippe in 'n algemene raamwerk.

Figuur 2



Wiskundiges soos S. Banach, F. Riesz, D. Hilbert en Wiener kan tereg as die grondleggers hiervan beskou word. Banach het die eerste keer in sy proefskrif in 1920 'n lineêr genormeerde ruimte gedefinieer soos dit vandag aan ons bekend is. Begrippe soos Banachruimte en Hilbertruimte het hier hulle ontstaan gehad en is uit erkentlikheid na hierdie groot wiskundiges vernoem. Hulle werke was belangrike stappe in die ontwikkeling van moderne analise en in besonder Funksionaalanalise.

Hierdie algemene teorie van lineêr genormeerde ruimtes bied 'n basis waarin oneindig dimensionele ruimtes deeglik gestruktueer kan word en vandag as die boustene van verskeie vakterreine gebruik word. Groot gedeeltes van die approksimasieteorie asook ander afdelings in Numeriese Analise (Collatz, 1967), die relatiwiteitsteorie in Fisika asook die grondslae van die kwantummeganika is hierin gefundeer (Naylor en Sell, 1972, p. 439-76).

Ek volstaan voorlopig met hierdie gedagtes oor die ruimte- en afstandsbegrippe. Dit was die eerste aspek wat ek graag wou uitlig.

Dink 'n oomblik terug aan die definisie van Funksionaalanalise: Ons het gesê dat in Funksionaalanalise die eienskappe van ruimtes en van afbeeldings tussen ruimtes (en in besonder lineêr genormeerde ruimtes) bestudeer word. Ons skenk dus vervolgens aandag aan die tweede aspek, naamlik die begrip van 'n afbeelding.

Oor die algemeen verstaan ons onder die woord *afbeelding* 'n reël waarvolgens punte of getalle aan mekaar gekoppel word. Dink maar terug aan ons eerste voorbeeld. Aangesien dit in hierdie tydsbestek nie moontlik is om alle soorte afbeeldings toe te lig nie, beskou ons 'n paar belangrike tipes.

'n Baie interessante soort afbeelding tree na vore by 'n bespreking van die sogenaamde dekpuntbeginsel.

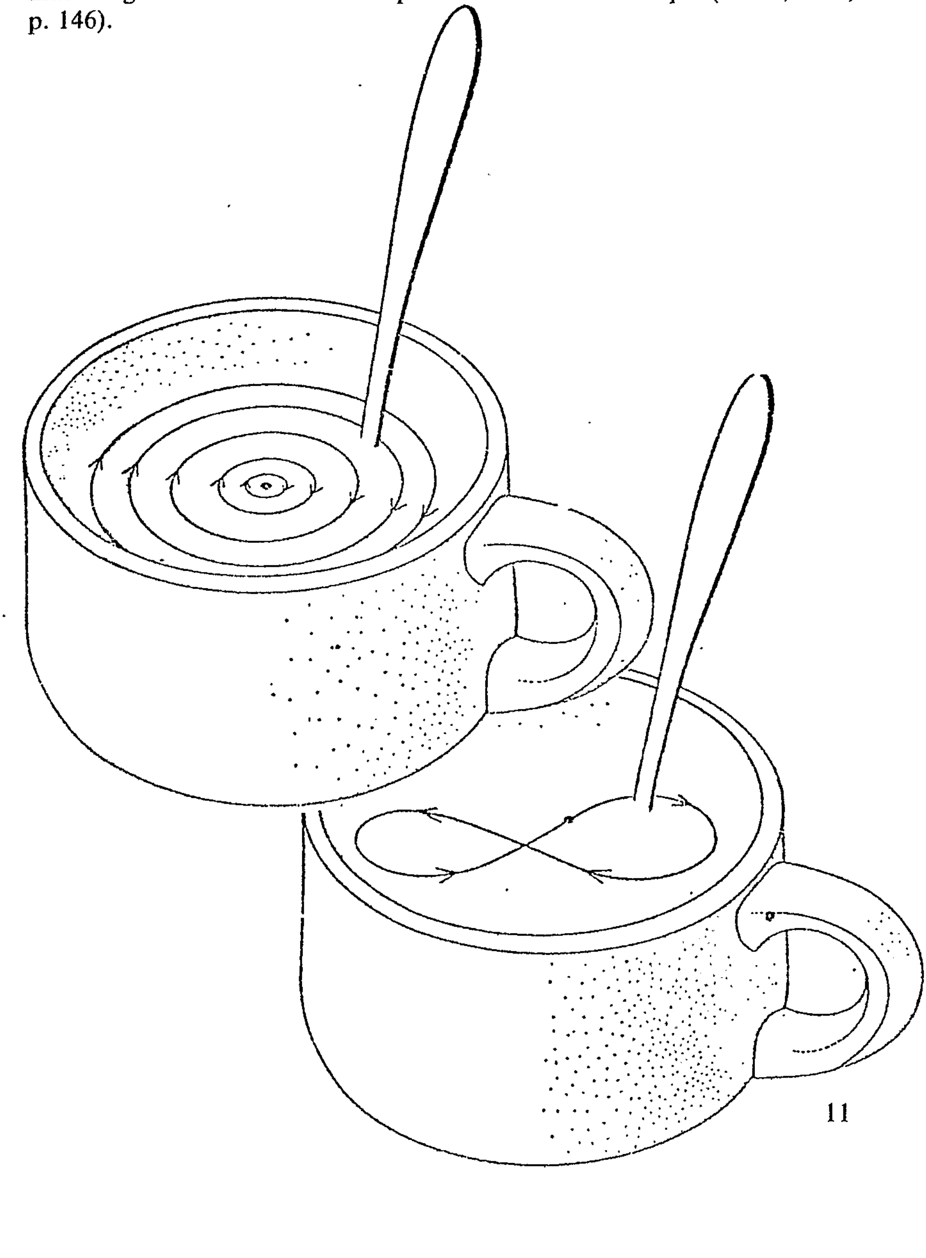
3. Die dekpuntbeginsel

Die dekpuntbeginsel, ook genoem die vastepuntbeginsel, handel oor punte wat presies in hulle oorspronklike posisie bly terwyl die terrein waarin hulle lê, vervorm word òf as 'n afbeelding daarop toegepas word Hierdie beginsel vind sy oorsprong in 'n aantal eenvoudige situasies.

3.1 Voorbeeld

Roer 'n koppie koffie op enige wyse en vir enige tydsduur solank die oppervlak nie versteur word nie (met ander woorde roer en nie klits nie). Een van die elementêrste dekpuntresultate beweer dat nadat ons opgehou het om te roer en die beweging van die vloeistof tot stilstand gekom het, daar minstens een punt op die oppervlak is wat in sy aanvanklike posisie is! Glo u dit?

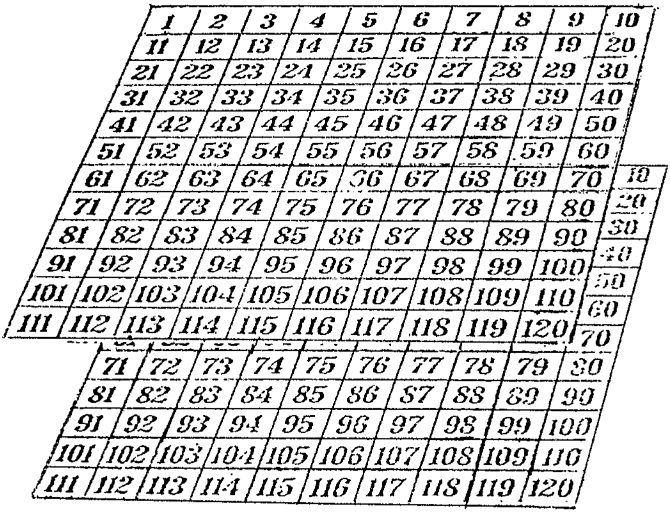
Die eenvoudigste geval is wanneer die vloeistof egalig in 'n sirkelvormige beweging geroer word. 'n Deeltjie by die middelpunt is dan so 'n dekpunt (vaste punt). Gewoonlik is die beweging van geroerde koffie meer gekompliseerd, en derhalwe vergroot die moontlikheid dat 'n willekeurige deeltjie na enige plek op die oppervlak kan verskuif. Die betrokke vastepuntstelling, aanvanklik deur die Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer bewys (in 1921), spesifiseer nie watter punt sy posisie behou nie maar slegs dat daar minstens een punt met hierdie eienskap is (Kline, 1968, p. 146).

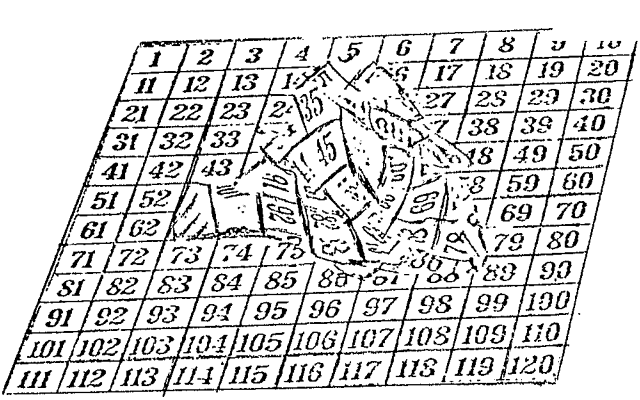


3.2 Voorbeeld

'n Tweede voorbeeld wat deur Brouwer se stelling gedek word, is die volgende: As 'n bladsy uit 'n boek geskeur word, opgefrommel maar nie geskeur word nie, en op enige wyse gevou word en daarna op so 'n wyse op die boek teruggeplaas word dat geen gedeelte verby sy oorspronklike posisie uitsteek nie, dan sal minstens een punt op die opgefrommelde bladsy reg bokant sy oorspronklike posisie lê.

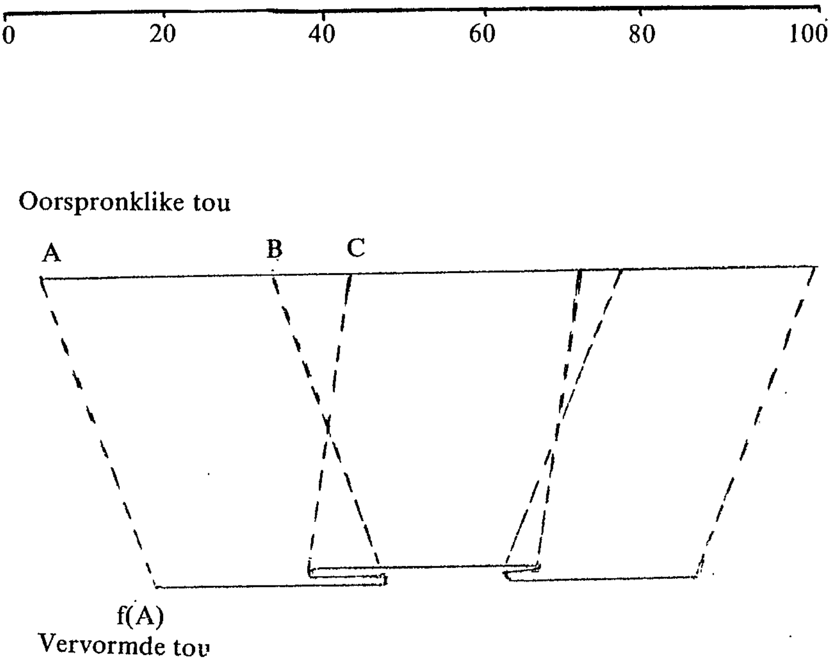
Dit is sekerlik 'n meer verrassende resultaat! Vir 'n wiskundige is hierdie voorbeeld egter makliker, want die opfrommeling van 'n bladsy is 'n eenvoudiger vervorming as die vervorming wat tydens die roer van koffie plaasvind! Hoekom? Papier kan nie gerek word nie, terwyl die afstand tussen punte op die oppervlak van die koffie makliker kan verander.





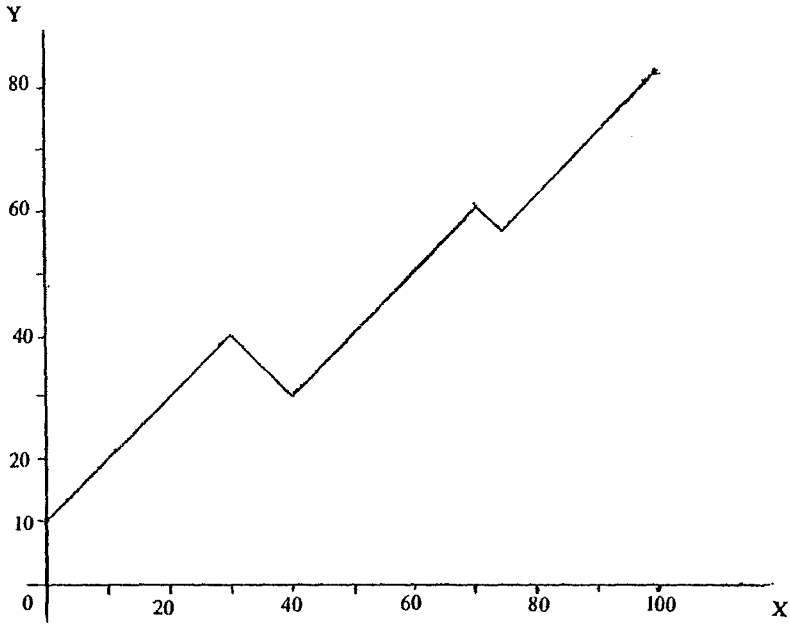
Ek wil u graag 'n kykie in die bewysredenering van so 'n resultaat gee. Hiervoor is dit geriefliker om na 'n eendimensionele situasie te kyk (in plaas van 'n tweedimensionele situasie soos die oppervlak van die koffie) aangesien dit die meetkundige voorstelling vergemaklik.

Neem 'n uitgestrekte toutjie en vou dit en beweeg dit rond binne die eindpunte van sy oorspronklike posisie. Dan kan ons bewys dat daar minstens een punt van die tou is wat in sy oorspronklike posisie lê, en dit is derhalwe 'n dekpunt.

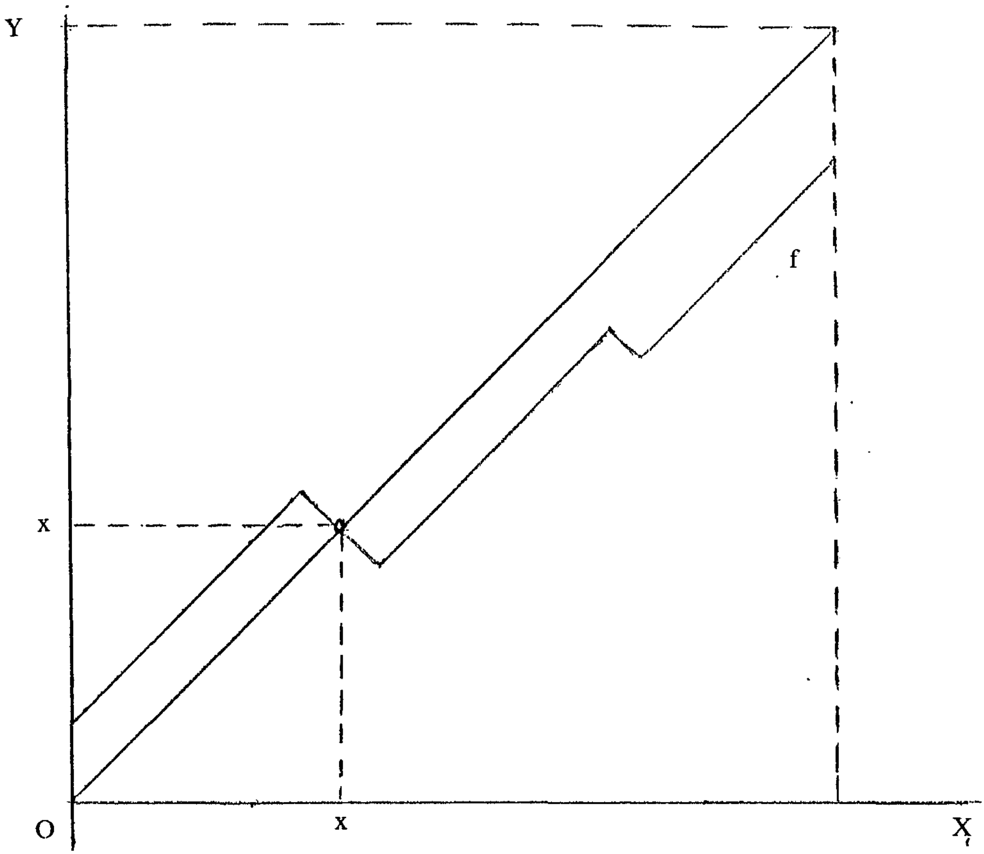


Dui die nuwe posisie van A aan met f(A), ensovoorts. Op hierdie wyse definieer ons 'n funksie of afbeelding f. Om te beweer dat hierdie tou 'n dekpunt het, beteken dus om te beweer dat daar 'n punt x bestaan waarvoor $f(x) = x$. Met ander woorde ons dekpuntstelling beweer dus dat die vergelyking $f(x) = x$ 'n oplossing het.

Ons stel hierdie funksie grafies voor:



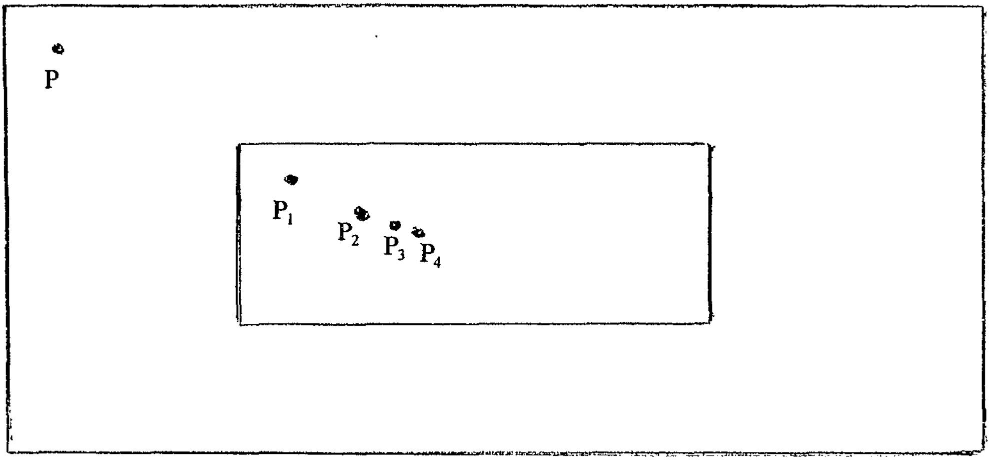
Teken hierop ook die funksie gegee deur $y = x$. (Dit is 'n voorstelling van die oorspronklike tou wat nie vervorm word nie.) Die snypunt van die grafieke lewer dan die verlangde dekpunt.



Die voorgaande voorbeelde word almal deur een tipe dekpuntstelling gedek. Daar bestaan egter 'n groot verskeidenheid van dekpuntstellings. In Funksionaalanalise is Banach se dekpuntbeginsel van groot belang. Hierdie beginsel word geformuleer in terme van 'n krimpende afbeelding f. Dit beteken dat die afstand tussen twee beeldpunte f(P) en f(Q) altyd kleiner as die afstand tussen die punte P en Q is.

3.3 Voorbeeld van 'n krimpende afbeelding

Beskou 'n uitgerekte vel rubber. In die skets stel die binneste reghoek die onuitgerekte vel voor. Beskou 'n punt P op die uitgerekte gedeelte. Na inkrimping is dit by 'n posisie wat ons met P_1 aandui. Die punt wat aanvanklik by P_1 was, is nou by 'n nuwe posisie, wat ons met P_2 aandui. Die punt aanvanklik by P_2 is nou by P_3, ensovoorts.



Die afstand tussen P_2 en P_3 is kleiner as die afstand tussen P_1 en P_2. Dit is dus 'n voorbeeld van 'n krimpende afbeelding. Die punte P_1, P_2, P_3... nader na 'n bepaalde punt. Hierdie punt is die dekpunt.

Die dekpuntstelling van Banach beweer dan ook dat elke so 'n krimpende afbeelding 'n dekpunt het. En daar is presies net een so 'n dekpunt. Banach se resultaat is in verskeie vorme en onder 'n verskeidenheid van aannames en ook in die algemene raamwerk van lineêre normeerde ruimtes bewys. Hierdeur het die toepassingsmoontlikhede geweldig toegeneem.

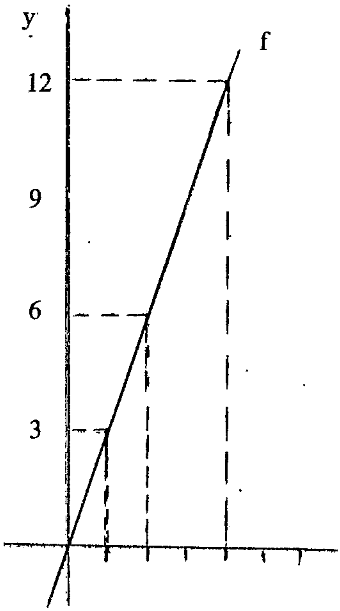
Selfs vandag nog publiseer wiskundiges nuwe resultate oor dekpuntstellings. In een enkele vaktydskrif, *The American Mathematical Monthly*, het daar in 1977 en 1978 nie minder as nege navorsingsartikels oor hierdie onderwerp verskyn nie. Terloops, daar is tans meer as vierhonderd verskillende wiskunde vaktydskrifte oor die wêreld. In die *Journal of Soviet Mathematics* van 1979 (Ivanov, 1979, p. 1-64), het daar 'n lywige navorsingsverslag van 64 bladsye oor hierdie onderwerp verskyn.

Die resultate oor die dekpuntbeginsel vind belangrike toepassings by die studie van differensiaalvergelykings. Hierdie resultate stel ons in staat om die bestaan en eenduidigheid van die oplossing van 'n differensiaalvergelyking aan te toon. Die belangrikheid van hierdie teorie vir moderne ontwikkelings en ingenieursprestasies kan nie oorbeklemtoon word nie.

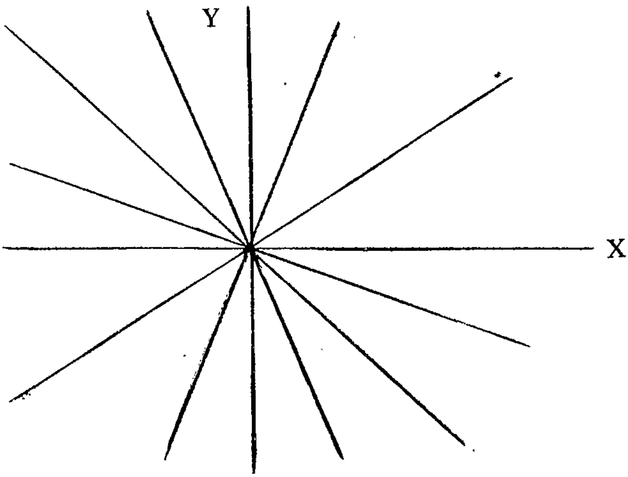
In Numeriese Analise is verskeie grondliggende aspekte, onder andere Newton se iteratiewe metode vir die oplos van vergelykings, gebaseer op Banach se dekpuntstelling.

Dis werklik verrassend om te besef dat só 'n eenvoudige beginsel van 'n dekpuntgedagte sulke geweldige groot toepassings in ons moderne ontwikkelings het.

Ek het hierdie dekpuntbeginsel bespreek om u daardeur 'n beter begrip van 'n afbeelding te gee. Hierdeur is egter slegs een tipe afbeelding geïllustreer. Ons volstaan deur 'n tweede belangrike tipe kortliks toe te lig, naamlik die van 'n lineêre afbeelding. In ons eerste voorbeeld met $f(x) = 3x$, is f 'n *lineêre afbeelding.* Dit beteken dat $f(x + y) = f(x) + f(y)$ en $f(tx) = tf(x)$.



Hierdie lineêre begrip openbaar ook 'n aantal interessante en selfs verrassende eienskappe. So byvoorbeeld word al sulke kontinue lineêre afbeeldings in die reële getalle presies gegee deur alle reguit lyne wat deur die oorsprong gaan.



Ek wil nie verder hierop ingaan nie. Ek moet egter daarop wys dat hierdie begrip van 'n lineêre afbeelding op soortgelyke wyse in die algemene raamwerk van 'n lineêr genormeerde ruimte ingevoer word en dat die bestudering van die eienskappe van sulke afbeeldings van die grootste belang is. In die boek *Linear operator theory in engineering and science* (Naylor and Sell, 1972), kom die belangrikheid hiervan vir die moderne wetenskaplike ook duidelik na vore. Die outeurs van hierdie boek is selfs van mening dat studente tydens hulle ingenieursopleiding terdeë met hierdie begrippe kennis moet maak.

4. Enkele samevattende gedagtes

Ek het probeer om u 'n kykie te gee in enkele aspekte van 'n jong vakterrein wat sy stempel wel deeglik op verskeie belangrike ontwikkelings geplaas het. Dit was geensins volledig nie, en my kollegas uit hierdie vakterrein moet my maar vergewe dat ek ander belangrike aspekte nie eens aangeraak het nie.

Nieteenstaande die feit dat Funksionaalanalise vandag reeds op so baie terreine intensief gebruik word, is ek daarvan oortuig dat dit in die jare wat voorlê, in 'n steeds toenemende mate gebruik gaan word. Dit is 'n regstreekse gevolg van die groter eise wat alle wetenskaplike en tegnologiese ontwikkelings gaan stel.

Dit is dus absoluut noodsaaklik dat persone wat in hierdie vakterrein wil werk, deur middel van opleiding, studie en navorsing, terdeë met die resultate vertroud sal raak. Dit geld in besonder ook vir 'n dosent wat 'n nagraadse kursus hierin met welslae wil aanbied. Dit bly vir my persoonlik een van die pragtigste en werklik besondere voorregte van 'n universiteitsdosent om 'n nagraadse gevorderde kursus oor sy vakterrein te mag aanbied. Hierdeur kan hy sy kennis aan jonger medewerkers oordra, en op dié wyse kan jong wetenskaplikes tot op die voorpunt van die nuutste ontwikkelings en resultate gebring word.

Ek is van mening dat die navorsingsgroep in Funksionaalanalise aan die Potchefstroomse Universiteit nog groot hoogtes gaan bereik. Ons is trots op dit wat in die verlede reeds vermag is, en baie dankbaar oor die welslae wat ons met navorsing behaal het. Die tyd is ryp vir die stigting van 'n volwaardige Navorsingsinstituut vir Funksionaalanalise. Hierdeur kan ons *die* toonaangewende inrigting in ons land op hierdie vakterrein word en terselfdertyd 'n wesenlike bydrae lewer by die uitbouing en ontwikkeling van 'n nagraadse skool vir die wiskundige wetenskappe aan die Potchefstroomse Universiteit.

Om al hierdie gedagtes te verwesenlik, moet dosente ook genoeg tyd vir navorsing en studie hê. U is terdeë bewus daarvan dat daar op alle vakterreine 'n werklike kennisontploffing plaasvind. So word daar beweer dat daar in die afgelope tien jaar meer nuwe Wiskunde gepubliseer is as in die vorige honderd jaar. Om spesifieker te wees: Gedurende die eerste vyf maande van 1979 het daar in *Mathematical Reviews* nie minder as 810 opsommings van nuwe navorsingsartikels in die vakterrein Funksionaalanalise verskyn nie.

Dit is dus my pleidooi vanaand dat ons Universiteit se navorsingsbeleid so uitgebou sal word dat dosente genoeg tyd sal hê om aan al die bogenoemde sake reg te laat geskied. Dit is hierdeur dat elkeen sy beskeie bydrae kan lewer in die uitdagings wat die ontwikkeling van ons land stel — hierdie pragtige land wat God aan ons gegee het.

VERWYSINGSLYS

BERGAMINI, D. 1970. Mathematics. Amsterdam, Time — Life International (Life science libary).

BOCHNER, S. 1966. The role of mathematics in the rise of science. Princeton, Princeton University Press.

COLLATZ, L. 1967. Functional analysis and numerical mathematics. New York, Academic Press.

FEHR, H.F. 1968. Mathematical education for a scientific, technological and industrial society. *Mathematics teacher,* 61:665-671.

IVANOV, A.A. 1979. Fixed points of mappings of metric spaces. *Journal of Soviet Mathematics,* 12(1):1-64.

KLINE, M. 1968. Mathematics in the modern world. San Francisco, Freeman.

KLINE, M. 1972. Mathematical thought from ancient to modern times. New York, Oxford University Press.

MONNA, F. 1973. Functional analysis in historical perspective. Utrecht, Oosthoek.

NAYLOR, A.W. and SELL, G.R. 1972. Linear operator theory in engineering and science. New York, Holt, Rinehart and Winston.

STEIN, S.I. 1969. Mathematics: the man-made universe; an introduction to the spirit of mathematics. San Francisco, Freeman.