Die Skoenlusmetode: 'n Kritiese oorsig

The bootstrap methodology: a critical review

JWH Swanepoel
Skool vir Rekenaar-, Statistiese en Wiskundige Wetenskappe,
Vakgroep Statistiek, Noordwes–Universiteit,
Potchefstroomkampus, Potchefstroom
Jan.Swanepoel@nwu.ac.za

(Hierdie artikel word opgedra aan Prof. J.H. Venter, 'n kollega en vriend oor meer as vier dekades, ter huldiging van sy 70-ste verjaarsdag)

Jan Swanepoel

Jan Swanepoel is professor in Statistiek aan die Noordwes-Universiteit, Potchefstroomkampus waar hy sedert 1970 werksaam is. Sy deskundigheidsveld is Verdelingsvrye Statistiek. Hy is die outeur of mede-outeur van meer as 100 vakwetenskaplike publikasies in nasionale en internasionale tydskrifte en het 57 lesings aangebied by internasionale konferensies en werkswinkels in die buiteland, waarvan 30 uitnodigingslesings was. Hy het twee keer A-graderings verwerf van die SNO (tans die NNS). Die M.T. Steyn medalje word gedurende 2001 aan hom toegeken deur die S.A. Akademie vir Wetenskap en Kuns, vir "leierskap op die hoogste vlak in die veld van die natuurwetenskappe en tegnologie". Gedurende 2000, 2002 en 2003 het hy die Herbert Sichel Medalje ontvang van die Suid-Afrikaanse Statistiese Vereniging "vir die beste publikasie in toegepaste Statistiek wat gepubliseer is die vorige jaar in 'n internasionale tydskrif deur 'n Suid-Afrikaanse statistikus". Hy het verskeie kursusse onderrig in die skoenlusmetode en verdelingsvrye krommeberaming by internasionale universiteite en het navorsingsverbintenisse gesluit met talle erkende internasionale statistici van formaat, waarvan die Vlaams/Suid-Afrikaanse Bilaterale Wetenskaplike en Tegnologiese Samewerkingsooreenkoms 'n voorbeeld is.

Jan Swanepoel is professor in Statistics at the North-West University, Potchefstroom Campus where he has been employed since 1970. His field of expertise is Nonparametric Statistics. He is the author or co-author of more than 100 scientific publications in national and international journals and presented 57 talks at international conferences and workshops abroad, 30 of these as an invited speaker. He received A-ratings on two separate occasions from the FRD (now the NRF). He was awarded the M.T. Steyn medal by the S.A. Academy for Science and Art during 2001 for "leadership at the highest level in the fields of the natural sciences and technology". During 2000, 2002 and 2003 he received the Herbert Sichel Medal from the South African Statistical Association "for the best applied statistical paper published the previous year in an international journal by a South African statistician". He taught several courses at international universities in the bootstrap methodology and nonparametric curve estimation and established research partnerships with many researchers abroad, of which the Flemish/South African Bilateral Scientific and Technological Cooperation is an example.

ABSTRACT

The bootstrap methodology: a critical review

Ever since its introduction, the bootstrap has provided both a powerful set of solutions for practical statisticians, and a rich source of theoretical and methodological solutions for problems in statistics. In this paper, a survey of some recent developments in the non-parametric bootstrap methodology is given, concentrating on basic ideas and applications rather than theoretical considerations. Topics include statistical error, confidence intervals, double bootstrapping, bootstrap calibration, bootstrap partial likelihood, bootstrapping complicated data sets, wild bootstrap and the modified bootstrap. The above topics will be discussed under the assumption of independent data. A major development of bootstrap methods recently has been their application to dependent data. Topics that will be discussed under this heading include the moving block bootstrap and the autoregressive sieve bootstrap.

KEYWORDS: Bootstrap, calibration, likelihood, statistical error, confidence interval, independent and dependent data.

TREFWOORDE: Skoenlus, kalibrering, aanneemlikheid, statistiese fout, vertrouensinterval, onafhanklike en afhanklike data.

OPSOMMING

Sedert die ontstaan van die skoenlusmetodologie, het dit beide 'n kragtige versameling oplossings gebied vir die praktiese gebruiker van statistiek, sowel as 'n ryk bron van teoretiese en metodologiese oplossings vir probleme in statistiek. In hierdie artikel word 'n oorsig gegee van onlangse ontwikkelings in die nie-parametriese skoenlusmetodologie, waar gekonsentreer word op basiese idees en toepassings instede van teoretiese oorweginge. Onderwerpe van belang sluit in statistiese fout, vertrouensintervalle, die dubbel-skoenlus, skoenluskalibrering, skoenlus parsiële aanneemlikheid, toepassing van die skoenlusmetode op gekompliseerde datastelle, die wilde skoenlus en die aangepaste skoenlusmetode. Die genoemde onderwerpe word bespreek onder onafhanklikheidsaannames van die data. 'n Onlangse belangrike ontwikkeling in die skoenlusmetodologie behels die toepassing van die skoenlus op afhanklike data. Onderwerpe wat onder hierdie aanname bespreek word, sluit die bewegende blokskoenlusmetode in sowel as die outoregressiewe sif-skoenlus.

1. INLEIDING

Die basiese doel van statistiese analise is om alle informasie uit die data te onttrek ten einde eienskappe van die populasie wat die data genereer, af te lei. Statistiese analise word gewoonlik gebaseer op statistieke wat funksies is van die data, en wat deur een of ander beginsel gekies word, byvoorbeeld beginsels gekoppel aan aanneemlikheid, voldoendheid of robuustheid.

Voordat data ingewin word, is 'n statistiek 'n stogastiese grootheid met 'n waarskynlikheidsverdeling, wat bekend staan as die "steekproefverdeling" van die statistiek. Statistiese prosedures vereis kennis van die steekproefverdeling van die statistiek wat gebruik word vir die analise. In 'n beramingsprobleem byvoorbeeld, is dit belangrik om 'n aanduiding te hê van die beramer se akkuraatheid. Kennis van akkuraatheidsmaatstawwe soos die variansie, sydigheid en gemiddelde–kwadraatfout van die beramer is dus 'n vereiste. Hierdie akkuraatheidsmaatstawwe is karakteristieke van die beramer se steekproefverdeling.

Die steekproefverdeling van 'n statistiek en sy eienskappe hang gewoonlik af van die onderliggende populasie wat onbekend is. Hierdie onbekende groothede moet dus beraam of benader word deur gebruik te maak van die beskikbare data. Efron[1] het 'n algemene hersteekproefskema voorgestel, naamlik die sogenaamde "skoenlusmetode", om die steekproefverdeling van die statistiek te beraam. Die skoenlusmetode systap die afleiding van ingewikkelde formules en teorieë deurdat daar gebruik gemaak word van kragtige rekenaars. Die skoenlusmetode besit aantreklike eienskappe vir die statistiese gebruiker: dit vereis min aannames, min of geen modellering of analise, en dit kan toegepas word op 'n outomatiese manier in 'n wye verskeidenheid van situasies, ongeag die teoretiese kompleksiteit daarvan. Die skoenlus kan dus antwoorde verskaf op vrae wat te gekompliseerd is vir tradisionele statistiese analises.

2. SKOENLUSBERAMER VAN 'N STANDAARDFOUT

Gestel ons beskik oor 'n ewekansige steekproef $\mathcal{X}_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ uit 'n onbekende distribusiefunksie (d.f.) F . Skoenlusmetodes berus op die gebruik van 'n skoenlussteekproef: Laat F_n die empiriese distribusiefunksie (e.d.f.) van $\mathcal{X}_n$ aandui, wat waarskynlikheid $1/n$ op elke X_i, $i = 1, \ldots, n$, plaas. 'n Skoenlussteekproef word gedefinieer as 'n ewekansige steekproef van grootte n geneem uit F_n, aangedui met

$$\mathcal{X}_n^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\}.$$

Die sternotasie dui aan dat $\mathcal{X}_n^*$ nie die werklike datastel $\mathcal{X}_n$ is nie, maar eerder 'n hersteekproefweergawe van $\mathcal{X}_n$ is. Met ander woorde, $\mathcal{X}_n^*$ is 'n ewekansige steekproef van grootte n wat met terugplasing geneem word uit die populasie van n voorwerpe $(X_1, \ldots, X_n)$. Ons kan dus kry dat $X_1^* = X_7$, $X_2^* = X_3$, ..., $X_n^* = X_7$, byvoorbeeld.
Meer formeel gestel, skryf ons vir $j = 1, \ldots, n$,

$$P^*(X_j^* = X_i) = 1/n, \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n,$$

waar P^* die voorwaardelike waarskynlikheidsverdeling van $\mathcal{X}_n^*$ gegee $\mathcal{X}_n$ aandui.
Gestel dat $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 'n sekere beramer van 'n parameter θ is.
Die standaardfout van $\hat{\theta}$ is

$$\sigma(F) = \{Var_F(\hat{\theta})\}^{1/2},$$

en die skoenlusberamer van $\sigma(F)$ is slegs

$$\hat{\sigma}_s \equiv \sigma(F_n) = \{Var_*(\hat{\theta}^*)\}^{1/2}, \quad \text{waar}$$

$\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ en Var_* die variansie onder P^* aandui.

Opmerkings:

- Die skoenlusberamer $\hat{\sigma}_s$ (wat in die literatuur bekend staan as die "ideale" skoenlusberamer) kan dikwels nie eksplisiet bereken word nie, veral in gevalle waar die beramer $\hat{\theta}$ 'n ingewikkelde statistiek is. Een rede vir die sukses van die skoenlusmetode is dat 'n eenvoudige en akkurate Monte Carlo benadering vir $\hat{\sigma}_s$ gegee kan word:

1. Vir $b = 1, 2, \ldots, B$ (groot), genereer onafhanklike skoenlussteekproewe uit F_n:
$$\mathcal{X}_n^*(b) = \{X_1^*(b), X_2^*(b), \ldots, X_n^*(b)\}.$$
2. Bereken $\hat{\theta}^*(1), \hat{\theta}^*(2), \ldots, \hat{\theta}^*(B)$ (die sogenaamde skoenlusherhalings).
3. Benader $\hat{\sigma}_s$ deur
$$\hat{\sigma}_{s,B} = \left\{ \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^{B} (\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot))^2 \right\}^{1/2}, \qquad \text{waar}$$
$\hat{\theta}^*(\cdot) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}^*(b)$.

• Die sterk wet van groot getalle impliseer dat $\hat{\sigma}_{s,B} \to \hat{\sigma}_s$ byna seker (b.s.) as $B \to \infty$.
• Skoenlusberamers of ander maatstawwe van statistiese akkuraatheid, soos sydigheid of voorspellingsfoute, kan op 'n soortgelyke wyse verkry word.
• Die skoenlus wat hierbo bespreek is, word dikwels die "nie-parametriese skoenlusmetode" genoem.
• As $F(\cdot) = G(\cdot, \theta)$, met G 'n bekende d.f. en θ 'n vektor van onbekende parameters, dan beraam ons θ deur $\hat{\theta}$, en genereer ons skoenlussteekproewe $\mathcal{X}_n^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*\}$ uit $G(\cdot, \hat{\theta})$. Berekenings word dan soos voorheen gedoen. Hierdie metode staan bekend as die "parametriese skoenlus".

3. DIE DUBBEL-SKOENLUS

Die vraag ontstaan: Hoe akkuraat is $\hat{\sigma}_s$ (die skoenlusberamer van die standaardfout van $\hat{\theta}$, wat gedefinieer is in Afdeling 2)? Wat is byvoorbeeld die standaardfout daarvan?
Die skoenlus kan weer eens aangewend word om 'n beramer te vind vir
$$\tau(F) = \{Var_F(\hat{\sigma})\}^{1/2}.$$
Die skoenlusberamer is bloot
$$\hat{\tau}_s \equiv \tau(F_n) = \{Var_*(\hat{\sigma}_s^*)\}^{1/2},$$
waar $\hat{\sigma}_s^* = \hat{\sigma}_s(X_1^*, \ldots, X_n^*)$.

Monte Carlo benadering

(1) Genereer 'n skoenlussteekproef $X_1^*, \ldots, X_n^*$ uit F_n:
(a) Genereer 'n skoenlussteekproef $X_1^{**}, \ldots, X_n^{**}$ uit F_n^*, die empiriese d.f. van $X_1^*, \ldots, X_n^*$, en bereken $\hat{\theta}^{**} = \hat{\theta}(X_1^{**}, \ldots, X_n^{**}) \equiv \hat{\theta}^{**}(1)$.
(b) Herhaal stap (a) C kere op 'n onafhanklike wyse om die volgende skoenlusherhalings te verkry
$$\hat{\theta}^{**}(1), \ldots, \hat{\theta}^{**}(C).$$
(c) Bereken
$$\hat{\sigma}_{s,C}^*(1) = \left\{ \frac{1}{C-1} \sum_{c=1}^{C} \left(\hat{\theta}^{**}(c) - \frac{1}{C} \sum_{c=1}^{C} \hat{\theta}^{**}(c) \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

(2) Herhaal stap (1) B kere op onafhanklike wyse om $\hat{\sigma}^*_{s,C}(1), \ldots, \hat{\sigma}^*_{s,C}(B)$ te verkry.
(3) Bereken

$$\hat{\tau}_{s,B,C} = \left\{ \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^{B} \left(\hat{\sigma}^*_{s,C}(b) - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \hat{\sigma}^*_{s,C}(b) \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Let daarop dat die sterk wet van groot getalle impliseer dat

$$\hat{\tau}_{s,B,C} \to \hat{\tau}_s \quad \text{b.s.} \quad \text{as} \quad B, C \to \infty.$$

Opmerkings:

(a) Die dubbel-skoenlus is reeds toegepas op 'n verskeidenheid statistiese probleme in die literatuur (sien bv. Davison en Hinkley).[2]
(b) Belangrike toepassings sluit onder andere die "skoenluskalibrering van vertrouensintervalle" in, wat later bespreek sal word, sowel as die konstruksie van "skoenlus parsiële aanneemlikheidsfunksies".

4. PARSIËLE AANNEEMLIKHEIDSBENADERING

Die skoenlus parsiële aanneemlikheidsbenadering beraam die digtheidsfunksie van $\hat{\theta}$, 'n beramer vir θ, deur van die dubbel-skoenlus prosedure gebruik te maak. Die metode is soos volg:
• Genereer skoenlussteekproewe $\mathcal{X}_1^*, \mathcal{X}_2^*, \ldots, \mathcal{X}_B^*$ wat die volgende skoenlusherhalings $\hat{\theta}_1^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$ oplewer.
• Uit elk van $\mathcal{X}_b^*, b = 1, \ldots, B$, genereer C tweede-fase skoenlussteekproewe, wat die volgende tweede-fase skoenlusherhalings oplewer: $\hat{\theta}_1^{**}(b), \ldots, \hat{\theta}_C^{**}(b)$.
• Bereken bv. die kerndigtheidsfunksieberamer

$$\hat{f}(t|\hat{\theta}_b^*) = \frac{1}{Ch} \sum_{c=1}^{C} k\left(\frac{t - \hat{\theta}_c^{**}(b)}{h} \right),$$

vir $b = 1, \ldots, B$. Hier is k 'n bekende simmetriese digtheidsfunksie (bv. die standaard normaal digtheidsfunksie) en h die strookwydte.
• Evalueer $\hat{f}(t|\hat{\theta}_b^*)$ vir $t = \hat{\theta}$, $b = 1, \ldots, B$.
• $\hat{f}(\hat{\theta}|\hat{\theta}_b^*)$ stel 'n beramer voor vir die aanneemlikheid van θ vir parameterwaarde $\theta = \hat{\theta}_b^*$.
• 'n Gladde beramer vir die aanneemlikheid van θ word verkry deur gladstryking van die spreidiagram van die pare

$$\left(\hat{\theta}_b^*, \hat{f}(\hat{\theta}|\hat{\theta}_b^*) \right), \quad b = 1, \ldots, B.$$

• Hierdie konstruksie staan bekend as die "skoenlus parsiële aanneemlikheidsmetode", want dit beraam die aanneemlikheid van θ gebaseer op $\hat{\theta}$, instede daarvan om die volledige stel data $\mathcal{X}_n$ te gebruik.
• Verdere besonderhede rakende die implementering van die metode kan gevind word in Davison et al.[3]

5. BERAMING VAN STEEKPROEFVERDELINGS

Beskou die probleem om die steekproefverdeling te beraam van 'n stogastiese grootheid $R_n(\mathcal{X}_n; F)$:

$$H_F(x) = P_F(R_n(\mathcal{X}_n; F) \leq x), \quad x \in \Re.$$

Die skoenlusberamer van $H_F(x)$ is bloot

$$\hat{H}(x) = H_{F_n}(x) = P^*(R_n(\mathcal{X}_n^*; F_n) \leq x).$$

Let byvoorbeeld daarop dat as $R_n(\mathcal{X}_n; F) = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/S_n$, met $\bar{X}_n$ en S_n die steekproefgemiddeld en steekproefstandaardafwyking respektiewelik, dan word die skoenlusstatistiek bloot

$$R_n(\mathcal{X}_n^*; F_n) = \sqrt{n}(\bar{X}_n^* - \bar{X}_n)/S_n^*.$$

Die Monte Carlo benadering van $\hat{H}(x)$ is:

$$\hat{H}_B(x) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(R_n\left(\mathcal{X}_n^*(b); F_n\right) \leq x\right),$$

waar $\mathcal{X}_n^*(1), \ldots, \mathcal{X}_n^*(B)$ onafhanklike skoenlussteekproewe is van grootte n getrek uit F_n.

Opmerkings:

• Die benadering $H_{F_n}(x) \approx H_F(x)$ is asimptoties (as $n \to \infty$) geldig in 'n groot aantal situasies.
• Bogenoemde aanspraak word gewoonlik bevestig deur die volgende tipe stelling te bewys:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |H_{F_n}(x) - H_F(x)| = O(n^{-1/2})$$

b.s. (of in waarskynlikheid). Ons sê die skoenlusberamer is in hierdie geval "eerste-orde akkuraat". As $O(n^{-1/2})$ vervang word deur $o(n^{-1/2})$, dan sê ons die skoenlusberamer is "tweede-orde akkuraat". In hierdie geval is die skoenlusbenadering beter as die normaalbenadering, wat van orde $O(n^{-1/2})$ is.
• Eerste- en tweede-orde akkurate resultate bestaan in die literatuur vir 'n groot verskeidenheid van statistieke insluitende L-beramers, M-beramers, U-statistieke, nie-parametriese digtheidsfunksie- en regressieberamers, U-kwantiele, empiriese- en kwantielprosesse, algemene klasse van statistiese funksionale.

6. SKOENLUSVERTROUENSINTERVALLE

Gestel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is onafhanklik en identies verdeelde (o.i.v.) stogastiese veranderlikes met d.f. F, en $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is 'n beramer van 'n parameter θ. Laat $\hat{\sigma}$ die beraamde standaardfout van $\hat{\theta}$ wees (dikwels word die skoenlusberamer $\hat{\sigma}_s$, gedefinieer in Afdeling 2, gebruik).
'n $100(1-\alpha)$%-vertrouensinterval vir θ volgens die tradisionele standaard normaal metode is

$$I_{AT} = [\hat{\theta} - z(\alpha/2)\hat{\sigma}, \hat{\theta} + z(\alpha/2)\hat{\sigma}],$$

waar $z(\alpha/2)$ die $100(1-\alpha/2)\%$–persentielpunt van 'n standaard normaalverdeling is, byvoorbeeld, as $1-\alpha = 95\%$, dan is $z(0.025) = 1.96$.

Hierdie tradisionele standaard normaal intervalle vir θ kan dikwels onakkuraat wees, aangesien dit sterk leun op die sentrale limietstelling en die voorwaardes waaronder hierdie stelling geldig is. Vir klein tot matige steekproefgroottes kan

$$|P(\theta \in I_{AT}) - (1-\alpha)|$$

groot wees. Die skoenlus kan egter aangewend word om vertrouensintervalle te konstrueer wat dikwels beter presteer vir klein tot matige steekproefgroottes. Sedert die vroeë 1980's is 'n wye reeks metodes voorgestel om skoenlusvertrouensintervalle te konstrueer. In 'n interessante artikel deur Carpenter en Bithell[4] word die volgende vrae aangespreek:

- Wanneer moet skoenlusvertrouensintervalle aangewend word?
- Watter skoenlusmetode moet gebruik word?
- Hoe moet dit geïmplementeer word?

Gestel F is onbekend. Die bekendste nie-parametriese skoenlusvertrouensintervalle is die persentiel, sydigheids-gekorrigeerde persentiel (BC), versnelde sydigheids-gekorrigeerde persentiel (BC_a) en die skoenlus-t vertrouensintervalle.

Ons bied nou 'n kort opsomming van hierdie prosedures. 'n Meer breedvoerige bespreking van die metodes verskyn in die boek deur Shao en Tu.[5]

(A) **Persentiel Intervalle**.

Laat $\hat{G}$ die d.f. aandui van $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(X_1^*, \ldots, X_n^*)$, d.i.,

$$\hat{G}(t) = P^*(\hat{\theta}^* \leq t).$$

Die persentiel $100(1-\alpha)\%$–vertrouensinterval word gegee deur

$$I_{1-\alpha} = \left[\hat{G}^{-1}(\alpha/2), \hat{G}^{-1}(1-\alpha/2)\right],$$

wat benader kan word met die Monte Carlo metode soos volg:

- Trek B onafhanklike skoenlussteekproewe van grootte n en bereken skoenlusherhalings $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_B^*$.
- Bereken die ooreenstemmende orde-statistieke $\hat{\theta}_{(1)}^* \leq \hat{\theta}_{(2)}^* \leq \ldots \leq \hat{\theta}_{(B)}^*$.
- Benader $I_{1-\alpha}$ deur

$$\hat{I}_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_{(r)}^*, \hat{\theta}_{(s)}^*\right],$$

waar $r = [B\,\alpha/2]$ en $s = [B\,(1-\alpha/2)]$.

Opmerkings:

1. 'n Alternatiewe persentielinterval, in die literatuur bekend as die "basiese vertrouensinterval" (sien bv. bladsy 194 van Davison en Hinkley[2]), wat ook dikwels bereken word, is:

$$\hat{I}_{1-\alpha}^0 = \left[2\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(s)}^*, 2\hat{\theta} - \hat{\theta}_{(r)}^*\right].$$

2. Die BC vertrouensinterval is bloot 'n aanpassing van die persentielinterval, en dit poog om die sydigheidseffek te elimineer van die skoenlusverdeling van $\hat{\theta}^*$. Dit word presies bereken soos $\hat{I}_{1-\alpha}$, deur ander waardes van r en s te gebruik.

3. Die BC_a vertrouensinterval is 'n verbeterde weergawe van die BC vertrouensinterval. Dit betrek beide 'n sydigheids- en skeefheidskorreksie. Die BC_a persentielvertrouensinterval kan ook bereken word soos $\hat{I}_{1-\alpha}$, deur gebruik te maak van waardes van r en s wat ietwat meer kompleks is.

4. Tussen die persentielintervalle presteer die BC_a interval oor die algemeen die beste.

(B) **Skoenlus-t Intervalle**.

'n $100(1-\alpha)\%$ tweekantige simmetriese skoenlus-t vertrouensinterval word gegee deur

$$\left[\hat{\theta} - q(F_n)\hat{\sigma}, \hat{\theta} + q(F_n)\hat{\sigma}\right],$$

waar $q(F_n)$ gedefinieer word deur

$$P^*(|\hat{\theta}^* - \hat{\theta}|/\hat{\sigma}^* \leq q(F_n)) \doteq 1 - \alpha.$$

$q(F_n)$ kan benader word deur die volgende Monte Carlo algoritme:
Verkry B onafhanklike skoenlusherhalings

$$T_n^*(b) = |\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}|/\hat{\sigma}^*(b), \quad b = 1, \ldots, B,$$

en benader $q(F_n)$ deur die $[B(1-\alpha)]$-de kleinste waarde van $T_n^*(1), \ldots, T_n^*(B)$.

Opmerkings:

(a) Tweekantige gelykstertige sowel as eenkantige skoenlus-t vertrouensintervalle kan soortgelyk afgelei word.
(b) Beide die BC_a persentielinterval en die skoenlus-t interval is tweede-orde akkuraat, dit wil sê hulle oordekkingswaarskynlikhede verskil van die voorgeskrewe $1-\alpha$ vlak met slegs $O(n^{-1})$ instede van $O(n^{-1/2})$, wat gewoonlik bereik word deur die standaard vertrouensintervalle gebaseer op kwantiele van die standaard normaalverdeling (Hall).[6]
(c) Maar, hierdie prosedures het ook nadele. Die BC_a prosedure is afhanklik van 'n verstellingsparameter a wat bevredigend beraam moet word. Die prestasie van die skoenlus-t prosedure is baie afhanklik van die kwaliteit van die beramer $\hat{\sigma}$. Vir nie-lineêre statistieke kan die afleiding van 'n goeie beramer $\hat{\sigma}$ problematies wees.
(d) In die lig van (c) hierbo en as gevolg van persoonlike ondervinding kan die gebruik van 'n eenvoudige persentielmetode aanbeveel word vir klein tot matige steekproefgroottes, mits hierdie intervalle gekalibreer word.

7. SKOENLUSKALIBRERING

Skoenlus-gekalibreerde vertrouensintervalle is aanvanklik voorgestel deur Beran[7] en Loh[8] en die metode is tans baie populêr. Die basiese idee rondom kalibrering is om die aanvanklike vertrouensinterval $I_{1-\alpha}$ te verbeter deur aanpassing van die nominale vlak $1-\alpha$ deur die dubbel-skoenlus:
Onthou dat $\hat{G}(t) = P^*(\hat{\theta}^* \leq t)$. Gevolglik is

$$\begin{aligned} P_F(\theta \in I_{1-\alpha}) &= P_F\left(|2\hat{G}(\theta) - 1| \leq 1 - \alpha\right) \\ &=: \Pi_F(1-\alpha). \end{aligned}$$

Gestel

$$\Pi_F(1-\alpha) \neq 1-\alpha.$$

Kies dan 'n $\lambda, 0 < 1-\alpha+\lambda < 1$, sodat

$$\Pi_F(1-\alpha+\lambda) = 1-\alpha.$$

$I_{1-\alpha+\lambda}$ besit 'n oordekkingswaarskynlikheid wat presies gelyk is aan $1-\alpha$. Let op dat λ onbekend is omdat

$$\lambda = \Pi_F^{-1}(1-\alpha) - (1-\alpha).$$

Die skoenlusberamer van λ is bloot

$$\hat{\lambda} = \Pi_{F_n}^{-1}(1-\alpha) - (1-\alpha),$$

en die aangepaste interval is dus

$$I_{1-\alpha+\hat{\lambda}} = \left[\hat{G}^{-1}\left(\frac{\alpha-\hat{\lambda}}{2}\right), \hat{G}^{-1}\left(1-\frac{\alpha-\hat{\lambda}}{2}\right)\right].$$

Booth en Hall[9] het die Monte Carlo benadering van $I_{1-\alpha+\hat{\lambda}}$ bespreek.

'n Waarskuwingswoord uit Hall en Martin[10] dui daarop dat skoenluskalibrering van die persentielintervalle geen rol speel in kwantielprobleme nie, en dit nie gebruik kan word om oordekkingswaarskynlikheid te verbeter nie.

8. GEKOMPLISEERDE DATASTELLE

Die skoenlus kan in baie meer gekompliseerde situasies toegepas word. 'n Regressiemodel is 'n bekende voorbeeld van 'n gekompliseerde datastruktuur. Beskou bv. die volgende model:

$$Y_i = g(\boldsymbol{\beta}; \mathbf{x}_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Hier is $\boldsymbol{\beta}$ 'n vektor van onbekende parameters, $\mathbf{x}_i$ is 'n waargenome vektor van kovariate en g is 'n bekende funksie. Die ε_i's is o.i.v. stogastiese foute met onbekende d.f. F sodat $E(\varepsilon_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$

Gestel dat $\boldsymbol{\beta}$ word beraam deur $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (bv. die kleinste-kwadrate beramer). Die skoenlus kan aangewend word om die steekproefverdeling van

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}\left((Y_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (Y_n, \mathbf{x}_n)\right)$$

te benader soos volg:

(1) Laat F_n die e.d.f. van die gesentreerde residue wees, gedefinieer vir $i = 1, \ldots, n$, soos volg

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - g(\hat{\boldsymbol{\beta}}; \mathbf{x}_i) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\{Y_j - g(\hat{\boldsymbol{\beta}}; \mathbf{x}_j)\}.$$

(2) Genereer o.i.v. skoenlusresidue $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots, \varepsilon_n^*$ uit F_n.

(3) Bereken skoenluswaarnemings

$$Y_i^* = g(\hat{\boldsymbol{\beta}}; \mathbf{x}_i) + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(4) Benader die steekproefverdeling van $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ met die skoenlusverdeling van

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}\left((Y_1^*, \mathbf{x}_1), \ldots, (Y_n^*, \mathbf{x}_n)\right).$$

Opmerkings:

• Die bostaande skoenlusskema word "hersteekproefneming van residue" genoem in die literatuur.
• As die kovariate $\mathbf{x}_i$ stogasties is, word die sogenaamde "hersteekproefneming van pare" toegepas, wat minder afhanklik is van die onderliggende modelaannames as die skoenlusmetode wat op residue gebaseer is:
Skoenlusdata $\{(Y_1^*, \mathbf{x}_1^*), \ldots, (Y_n^*, \mathbf{x}_n^*)\}$ word gegenereer deur eenvoudige steekproefneming met terugplasing uit $\{(Y_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (Y_n, \mathbf{x}_n)\}$ en die steekproefverdeling van $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ word benader deur die skoenlusverdeling van

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}\left((Y_1^*, \mathbf{x}_1^*), \ldots, (Y_n^*, \mathbf{x}_n^*)\right).$$

• As die ε_i's heteroskedastiese foute is, word die pare-skoenlusmetode toegepas. 'n Alternatiewe manier om met heteroskedastisiteit om te gaan, is om die sogenaamde "wilde skoenlusmetode" aan te wend (Wu[11], Helmers en Wegkamp[12]).
Om hierdie hersteekproefnemingskema toe te pas, word presies soos by die implementering van die skoenlusmetode gebaseer op residue voortgegaan, behalwe dat stap (2) nou vervang word met:
$(2')$ Genereer n onafhanklike stogastiese kopieë $Z_1, \ldots, Z_n$ van 'n stogastiese veranderlike Z wat die volgende vereistes bevredig:

$$E(Z) = 0; E(Z^2) = E(Z^3) = 1.$$

Bereken skoenlusresidue $\varepsilon_i^* = \hat{\varepsilon}_i Z_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Die mees populêre keuse in die literatuur vir die verdeling van Z (voorgestel deur Mammen[13]) is:

$$\begin{aligned} P^*\left(Z = (1-\sqrt{5})/2\right) &= \left(5+\sqrt{5}\right)/10 \\ P^*\left(Z = (1+\sqrt{5})/2\right) &= \left(5-\sqrt{5}\right)/10. \end{aligned}$$

'n Verdere populêre keuse is die eenvoudige twee-punt verdeling (Rademacher verdeling):

$$P^*(Z = -1) = P^*(Z = 1) = 1/2.$$

9. DIE GEWYSIGDE SKOENLUS

Bickel en Freedman[14] het teenvoorbeelde gegee om aan te toon dat die standaard (naïewe) skoenlus soms faal, d.w.s., die skoenlusberamers is nie eerste-orde akkuraat nie. Voorbeelde hiervan sluit in ontaarde U-statistieke, ekstreme orde-statistieke en spasiërings van waarnemings. Swanepoel[15] het aangetoon hoe hierdie teenvoorbeelde herstel kan word deur die "gewysigde skoenlus" (ook deesdae genoem die "m uit n skoenlus") voor te stel.

Vir enige stogastiese veranderlike $R_n(\mathcal{X}_n; F)$, $\mathcal{X}_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$, bestaan die gewysigde skoenlus daaruit dat die steekproefverdeling van $R_n(\mathcal{X}_n; F)$ onder F benader kan word met die skoenlusverdeling van $R_m(\mathcal{X}^*_m; F_n)$ onder F_n, d.w.s.

$$P^*\left(R_m(\mathcal{X}^*_m; F_n) \leq x\right) \approx P_F\left(R_n(\mathcal{X}_n; F) \leq x\right),$$

waar $\mathcal{X}^*_m = \{X^*_1, \ldots, X^*_m\}$, vir een of ander geskikte keuse van die skoenlussteekproefgrootte m.

Sedert 1986 is verskeie nuwe gevalle gerapporteer wat die tekortkominge van die naïewe skoenlus illustreer. Maar telkens kon die "m uit n skoenlus" die situasie beredder wat tot eerste-orde akkurate skoenlusberamers gelei het. Dit beklemtoon die voortgaande sukses van hierdie metodologie.

Sommige van die bogenoemde problematiese gevalle sluit in toepassing van die naïewe skoenlusmetode op:

• die gemiddelde in die geval van 'n oneindige variansie (Athreya).[16]
• die Cramèr-von Mises passingtoetsstatistiek met dubbelgesensoreerde data (Bickel en Ren).[17]
• onstabiele eerste-orde outoregressiewe prosesse (Heimann en Kreiss).[18]
• kritieke vertakkingsprosesse met immigrasie (Sriram).[19]
• die beraming van die verdeling van die gestudentifieerde gemiddelde (Hall en LePage).[20]
• 'n steekproefkwantiel as die digtheidsfunksie 'n sprong maak (Huang et al.).[21]
• skoenlusgebaseerde vertrouensintervalle vir eindpunte van 'n d.f. (Athreya en Fukuchi).[22]
• die maksimum van 'n stasionêre proses (Athreya et al.).[23]
• onstabiele eerste-orde outoregressiewe prosesse met foute wat behoort tot die aantrekkingsgebied van 'n stabiele verdeling met indeks $\alpha \in (0, 2]$
(Zarepour en Knight).[24]

Onlangse artikels oor die gewysigde skoenlus het 'n hernuwing veroorsaak van hierdie onderwerp:

• Chung en Lee[25] het die gewysigde skoenlus toegepas om die oordekkingsfout te korrigeer in die konstruksie van skoenlusvertrouensgrense. Hulle het aangetoon dat die oordekkingsfout van 'n standaard skoenlusvertrouensgrens, wat met die persentielmetode afgelei word en wat tipies van orde $O(n^{-1/2})$ is, verminder kan word tot $O(n^{-1})$ deur van 'n optimale skoenlussteekproefgrootte m gebruik te maak by die gewysigde skoenlus.
• Janssen et al.[26,27] het aangetoon dat, vergeleke met die standaard (naïewe) skoenlusmetode, die gewysigde skoenlus vinniger konvergensietempo's besit vir die skoenlusverdelings van U-kwantiele en Kaplan-Meier kwantiele.
Die resultate van Chung en Lee[25] en dié van Janssen et al.[26,27] illustreer dat:
die gewysigde skoenlus bruikbaar en nuttig is, nie alleen in die gevalle waar die standaard skoenlus faal nie, maar ook in gevalle waar dit geldig is.

10. DIE SKOENLUS TOEGEPAS OP AFHANKLIKE DATA

'n Belangrike ontwikkeling in skoenlusmetodes sedert ongeveer 1985 is die toepassing daarvan op afhanklike data. Twee bekende skoenlusmetodes wat gereeld in die praktyk aangewend word, word nou bespreek. Gestel dat $X_1, X_2, \ldots,$ vorm 'n streng stasionêre stogastiese proses. Dui die beskikbare data aan deur $\mathcal{X}_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

10.1 Die Bewegende Blok Skoenlus(BBS)

Die BBS–metode is deur Künsch[28] voorgestel:
• Definieer blokke $\mathcal{B}_j = (X_j, \ldots, X_{j+\ell-1})$, vir $j = 1, \ldots, N$, waar $N = n - \ell + 1$ en $1 \leq \ell \leq n$ die blokgrootte aandui.
• Laat $b = [n/\ell]$. Kies 'n ewekansige steekproef $\mathcal{B}_1^*, \ldots, \mathcal{B}_b^*$ uit $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N\}$.
• Rangskik die komponente van $\mathcal{B}_1^*, \ldots, \mathcal{B}_b^*$ in 'n ry.
• Dit lewer $n_1 \equiv b\ell$ skoenluswaarnemings $\mathcal{X}_{n_1}^* = \{X_1^*, X_2^*, \ldots, X_{n_1}^*\}$. Let op dat $n_1/n \to 1$ as $n \to \infty$.
• Gaan van hier af voort soos die metodes hierbo bespreek.

Opmerking:

Die korrekte keuse van die bloklengte ℓ is uiters belangrik en vereis noukeurige oorweging.

10.2 Die Outoregressiewe Sifskoenlus(OSS)

Die OSS–metode is aanvanklik deur Swanepoel en Van Wyk[29] voorgestel:
Laat $\{X_j, -\infty < j < \infty\}$ 'n stasionêre, omkeerbare lineêre tydreeks wees:

$$X_j = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon_{j-i} \ , \qquad (A)$$

vir konstantes μ, α_i en o.i.v. stogastiese veranderlikes $\{\varepsilon_i\}$ met $E(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Deur omkering van (A), word 'n $AR(\infty)$–proses verkry, nl.

$$X_j - \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (X_{j-i} - \mu) + \varepsilon_j, \qquad (B)$$

vir konstantes β_i.
Die basiese idee van die $AR(\infty)$- sifskoenlus is:
• Benader die $AR(\infty)$–model in (B) met'n eindige $AR(p)$–model:

$$X_j - \mu = \sum_{i=1}^{p} \beta_i (X_{j-i} - \mu) + \varepsilon_j.$$

• Kies 'n beramer $\hat{p}$ van p deur bv. gebruik te maak van die AIC modelseleksieprosedure (Shibata[30] het optimaliteit aangetoon van die AIC kriterium in die geval van voorspellings by $AR(\infty)$– modelle). Sommige navorsers beveel die gebruik van die $AICC$ kriterium aan, wat 'n sydigheids-gekorrigeerde weergawe is van AIC (Hurvich en Tsai).[31]
• Gaan voort soos voorheen deur klassieke "hersteekproefneming van residue" metodes toe te pas soos hierbo bespreek (sien ook bv. Swanepoel en Van Wyk).[29]
• Indien die $\{\varepsilon_i\}$ in die tydreeksmodel (B) hierbo afhanklike stogastiese foute is (hulle word bv. voortgebring deur een of ander AR(q) model), dan kan die skoenlusskema volgens die

"hersteekproefneming van residue" net soos hierbo bespreek, aangewend word.

10.3 Vergelyking tussen BBS en OSS

• Die skoenlusdata χ_n^* van die OSS is voorwaardelik (gegee χ_n) stasionêr, wat nie die geval is met die skoenlusdata van die BBS nie.
• Die skoenlusdata χ_n^* van die OSS besit nie die kunsmatige verskynsels wat tipies voorkom in die skoenlusdata van die BBS nie, wat ontstaan deurdat ewekansig gekose blokke data aanmekaar gevoeg word.
• Die OSS kan in 'n "dubbel-skoenlus" vorm aangewend word (aangedui met OSSS), wat sal lei tot hoër-orde akkuraatheid. Byvoorbeeld, die OSSS kan aangewend word om persentiel-vertrouensintervalle te kalibreer ten einde tweede–orde akkuraatheid (t.o.v. oordekkings-waarskynlikheid) te bereik, sonder dat dit nodig is om die variansie van die statistiek wat gebruik word te beraam (Choi en Hall).[32]
• Die "dubbel-skoenlus" toegepas op die BBS, blyk nie suksesvol te wees nie, aangesien die BBS in die eerste iterasie die afhanklikheid van die data vernietig waar die blokke wat gekies word aanmekaar geheg word (Buhlmann).[33]
• Die OSS pas by die graad van afhanklikheid aan: sy akkuraatheid verbeter indien die graad van afhanklikheid afneem. Dit is nie die geval met die BBS nie. (Buhlmann).[33]
• My empiriese ondervinding is dat die OSS in die algemeen minder sensitief is vir die keuse van 'n model in die sif (d.w.s. die beraming van p) as wat die BBS is vir die keuse van die bloklengte ℓ.
• Ten slotte, as die onderliggende proses $\{X_t\}$ 'n stasionêre lineêre tydreeks is, dan is die OSS oor die algemeen meer doeltreffend as die BBS, en bied dit ook 'n wyer toepasbaarheidsgebied.

11. Slotopmerkings

• Die redes waarom die skoenlusmetodologie so suksesvol is, kan hoofsaaklik toegeskryf word aan die volgende:

- die gemak waarmee dit deur die praktiese gebruiker toegepas kan word. Soos in Afdeling 2 verduidelik is, kan 'n akkurate en eenvoudige Monte Carlo benadering gevolg word. Die keuse van die aantal skoenlusherhalings B is egter belangrik. Vir die beraming van standaardfoute en die konstruksie van vertrouensintervalle word B gewoonlik tussen 200 en 800 gekies (sien bv. Booth en Sarkar).[34] Met vandag se kragtige rekenaars is B = 1000 'n veilige keuse vir meeste situasies.

- die skoenlusmetode besit aantreklike eienskappe vir die statistiese gebruiker: dit vereis min aannames, min of geen modellering of analise, en dit kan toegepas word op 'n outomatiese manier in 'n wye verskeidenheid van situasies, ongeag die teoretiese kompleksiteit daarvan. Die skoenlus kan dus antwoorde verskaf op vrae wat te gekompliseerd is vir tradisionele statistiese analises.

- die skoenlus bied 'n ryk bron van teoretiese en metodologiese oplossings vir probleme in statistiek.

• Gedurende die afgelope jare het die skoenlusmetode 'n aktiewe en wye onderwerp geword vir navorsingsdoeleindes en toepassings. Navorsingsareas waar die skoenlusmetode op groot skaal toegepas is (wat nie in hierdie artikel bespreek is nie), sluit onder andere die volgende in: Bayes inferensie, diskriminant analise, gerigte data, kategoriese data, modelseleksie, nie-parametriese krommeberaming, nie-parametriese outoregressie, opnamesteekproefneming, sekwensiële analise en tydreeksanalise.
• 'n Groot uitdaging vir die toekoms is om die skoenlusmetode nog verder te ontwikkel en te verfyn om afhanklike data suksesvol te kan analiseer, sonder om streng strukturele aannames te maak. 'n Aanvang is reeds hiermee gemaak (sien bv. Lahiri).[35]

BIBLIOGRAFIE

1. Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics* 7: 1–26.
2. Davison, A. C. & Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap methods and their applications.* Cambridge University Press, Cambridge.
3. Davison, A. C., Hinkley, D. V. & Worton, B. J. (1992). Bootstrap likelihoods. *Biometrika* 79: 113–130.
4. Carpenter, J. & Bithell, J. (2000). Bootstrap confidence intervals: when, which, what? A practical guide for medical statisticians. *Statistics in Medicine* 19: 1141–1164.
5. Shao, J. & Tu, D. (1995). *The Jackknife and Bootstrap.* Springer, New York.
6. Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *Annals of Statistics* 50: 35–45.
7. Beran, R. (1987). Prepivoting to reduce level error of confidence sets. *Biometrika* 74: 457–468.
8. Loh, W. Y. (1987). Calibrating confidence coefficient. *Journal of the American Statistical Association* 82: 155–162.
9. Booth, J. G. & Hall, P. (1994). Monte Carlo approximations and the iterated bootstrap. *Biometrika* 81: 331–340.
10. Hall, P. & Martin, M. A. (1989). A note on the accuracy of bootstrap percentile method confidence intervals for a quantile. *Statistics and Probability letters* 8: 197–200.
11. Wu, C. F. J. (1986). Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *Annals of Statistics* 14: 1261–1295.
12. Helmers, R. & Wegkamp, M. (1998). Wild bootstrapping in finite populations with auxiliary information. *Scandinavian Journal of Statistics* 25: 383–399.
13. Mammen, E. (1993). Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models. *Annals of Statistics* 21: 255–285.
14. Bickel, P. J. & Freedman, D. A. (1981). Some asymptotic theory for the bootstrap. *Annals of Statistics* 9: 1196–1217.
15. Swanepoel, J. W. H. (1986). A note on proving that the (modified) bootstrap works. *Communications in Statistics – Theory and methods* 15: 3193–3203.
16. Athreya, K. B. (1987). Bootstrap of the mean in the infinite variance case. *Annals of Statistics* 15: 724–731.
17. Bickel, P. J. & Ren, J. J. (1995). The m out of n bootstrap and goodness of fit tests with double censored data. In Rieder, H., editor, *Robust Statistics, Data Analysis and Computer Intensive methods.* Springer, New York.
18. G Heimann & J P Kreiss (1996). Bootstrapping general first order autoregression *Statistics and Probability letters* 30: 87-98.
19. Sriram, T. N. (1994). Invalidity of bootstrap for critical branching processes with immigration. *Annals of Statistics* 22: 1013–1023.
20. Hall, P. & LePage, R. (1996). On bootstrap estimation of the distribution of the studentized mean. *Ann. Inst. Statist. Math.* 48: 403–421.

21. Huang, J. S., Sen, P. K. & Shao, J. (1996). Bootstrapping a sample quantile when the density has a jump. *Statistica Sinica* 6: 299–309.
22. Athreya, K. B. & Fukuchi, J. (1997). Confidence intervals for endpoints of a c.d.f. via bootstrap. *Journal of Statistical Planning and Inference* 58: 299–320.
23. Athreya, K. B., Fukuchi, J. & Lahiri, S. N. (1999). On the bootstrap and the moving block bootstrap for the maximum of a stationary process. *Journal of Statistical Planning and Inference* 76: 1–18.
24. Zarepour, M. & Knight, K. (1999). Bootstrapping unstable first order autoregressive process with errors in the domain of attraction of stable law. *Stochastic Models* 15: 11–27.
25. Chung, K. & Lee, S. M. (2001). Optimal Bootstrap Sample Size in Construction of Percentile Confidence Bounds. *Scandinavian Journal of Statistics* 28: 225–239.
26. Janssen, P., Swanepoel, J. W. H. & Veraverbeke, N. (2001). Modified bootstrap consistency rates for U–quantiles. *Statistics and Probability Letters* 54: 261-268.
27. Janssen, P., Swanepoel, J. W. H. & Veraverbeke, N. (2002). The modified bootstrap error process for Kaplan-Meier quantiles. *Statistics and Probability Letters* 58: 31-39.
28. Künsch, H. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics* 17: 1217–1241.
29. Swanepoel, J. W. H. & van Wyk, J. W. J. (1986). The bootstrap applied to power spectral density function estimation. *Biometrika* 73: 135–141.
30. Shibata, R. (1981). An Optimal Autoregressive Spectral Estimate. *Annals of Statistics* 9: 300–306.
31. Hurvich, C. M. & Tsai, C. (1989). Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika* 76: 297–307.
32. Choi, E. & Hall, P. (2000). Bootstrap confidence regions computed from autoregressions of arbitrary order. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 62: 461–477.
33. Buhlmann, P. (2002). Bootstraps for Time Series. *Statistical Science* 17: 52–72.
34. Booth, J.G. & Sarkar, S. (1998). Monte Carlo Approximation of Bootstrap Variances. *The American Statistician* 52: 354–357.
35. Lahiri, S.N. (2003). *Resampling methods for dependent data.* Springer, New York.