

HOOFSTUK 2

ONDERRIG EN LEER VAN WISKUNDE

2.1 Inleiding

Gedurende die afgelope paar jaar het hervormingsdokumente soos die *Principles and Standards* (NCTM, 2000) asook die Hersiene Nasionale Kurrikulumverklaring (2003), 'n meer leerdergesentreerde benadering tot wiskunde-onderwys bepleit. Hervorming in wiskunde-onderwys beweeg weg van die tradisionele siening waar kennis as diskreet, opeenvolgend en hiërargies gesien word, en waar die klem op memorisering van geïsoleerde vaardighede en feite val, na 'n leeromgewing waar kennis gesien word as individuele konstruksies wat die gevolg is van die leerder se interaksie met sy omgewing (Draper, 2002:521) (kyk 2.3), terwyl probleemoplossing en kommunikasie beklemtoon word. As deel van die hervormingsbeweging in wiskunde-onderwys is daar ook 'n groeiende belangstelling in onderrig-leer-benaderings wat die konseptuele begrip van wiskunde steun (Manouchehri & Goodman, 1998:27) (kyk 2.4).

Die sukses van wiskunde-onderwys hang grootliks af van die onderwyser se konseptuele kennis van skoolwiskunde (Bryan, 1999:1). In die afwesigheid van konseptuele begrip van inhoud is effektiewe onderrig hoogs onwaarskynlik (Manouchehri, 1997:200). Gedurende die afgelope twee dekades het die konseptuele wiskundekennis van wiskunde-onderwysers egter 'n groot bron van kommer geword (Hill, Schilling & Ball, 2004:11; Bryan, 1999:9). Navorsing toon dat onderwysers nie oor genoegsame konseptuele vakkennis beskik nie, en as gevolg daarvan nie in staat is om hierdie kennis vir leerders toeganklik te maak nie (Taylor & Vinjevold, 1999:230; Goulding, Rowland & Barber, 2002: 689). 'n Onlangse studie deur Hill, Rowan en Ball (2005:371) het ook getoon dat daar 'n betekenisvolle (positiewe) verwantskap tussen onderwysers se wiskundekennis vir onderrig en leerderprestasie is.

Die onvoldoende en gefragmenteerde aard van voornemende onderwysers en praktiserende onderwysers in Suid-Afrika se kennis van skoolwiskunde is deur Van der Sandt bevestig (2003:113). Aangesien onderwysers as die fasiliteerders van leer en as sleutelrolspelers in die transformasie van skoolwiskunde-onderrig en -leer beskou word (Battista, 1995:1; Mapolelo 1999:715), het hierdie situasie ernstige implikasies vir die opleiding van

voornemende wiskunde-onderwysers. Engelbrecht *et al.* (2005:1) beweer ook dat wiskunde-onderrig in Suid-Afrikaanse skole neig om taamlik prosedureel van aard te wees, en daarom is leerders wat hulle tersiêre loopbaan betree, beter toegerus om prosedurele probleme te hanteer. Hervormingsinisiatiewe gemik op die verbetering van die kwaliteit van wiskunde-onderwyseropleiding en klaskamerpraktyke moet dus 'n komplekse probleem aanpak: die substansiële en betekenisvolle opgradering en verfyning van die konseptuele kennis en vaardighede van voornemende wiskunde-onderwysers.

In hierdie hoofstuk gaan eerstens 'n uiteensetting van en motivering gegee word vir die filosofiese raamwerk waarbinne hierdie studie gedoen is. Tweedens word ondersoek ingestel na die betekenisvolle leer van wiskunde. Derdens word 'n uiteensetting van die kognitiewe en affektiewe faktore gegee wat 'n rol in die leer van wiskunde speel.

2.2 Teoretiese perspektiewe

Die oorsprong van huidige leerteorieë kan gevind word in die soek na antwoorde op die vrae oor waar kennis vandaan kom en hoe mense leer (Driscoll, 2005:10; Ertmer & Newby, 1993:54). Twee opponerende teorieë ten opsigte van die oorsprong van kennis, naamlik empirisisme en rasionalisme, bestaan vir eeue reeds en is steeds onderliggend aan leerteorieë vandag. Empirisisme is die siening dat ervaring die primêre bron van kennis is, en rasionalisme stel dat die mens se rede die oorsprong van kennis is, sonder die hulp van sintuie (Ertmer & Newby, 1993: 54).

In hierdie studie word 'n onderskeid tussen die drie belangrikste epistemologiese paradigmas getref waaruit die onderrig en leer van wiskunde benader kan word, naamlik die *positivisme/objektivisme*, die *pragmatisme* en die *interpretivisme*. 'n Paradigma kan beskou word as 'n lens waardeur ons die wêreld sien. Verskillende lense behels verskillende aannames omtrent die aard van die wêreld rondom ons en die manier waarop ons die wêreld probeer verstaan (Lynch, 2005:1). Objektivisme en interpretivisme word dikwels as teenoorgesteldes beskou, met pragmatisme êrens tussenin op dieselfde kontinuum (Driscoll, 2005:13). Objektivisme stel dat die realiteit ekstern is en dat kennis opgedoen word deur ervaring (Siemens, 2004:2; kyk 2.2.1). Pragmatisme stel dat die realiteit geïnterpreteer en kennis onderhandel word deur ervaring en denke (kyk 4.3.1). Die interpretivisme stel dat die realiteit intern is en kennis gekonstrueer word.

2.2.1 Positivisme

Positivisme stel dat daar 'n eksterne wêreld onafhanklik van die waarnemer is en dat die waarnemer in staat is om sin te maak van hierdie wêreld en dit te verstaan (Begg, 1999:71). So 'n eksakte begrip van die wêreld impliseer dat 'n gemeenskaplike begrip moontlik is, en dat die doel van onderrig juis is dat leerders tot hierdie gemeenskaplike begrip kom. Aangesien die onderliggende epistemologiese aanname binne hierdie paradigma is dat kennis daarbuite is, onafhanklik van die leerder (Pasztor, 2004:2), word ook na die tradisionele, positivistiese benadering tot onderrig verwys as "the age of the sage on the stage" (Davis & Maher, 1997:93). Volgens die tradisionele beskouing is die doel van onderrig om die wiskundekennis wat daar buite is oor te dra van die onderwyser na die leerder (Biggs, 1996:347; Von Glasersfeld, 1987:3), sodat leerders wiskunde as 'n vaste liggaam van basiese kennis sal internaliseer (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992:589; Ellis & Berry, 2005:11).

Vir die grootste gedeelte van die 20ste eeu is groot waarde geheg aan kennis van feite en prosedures. Die feit dat in die meeste wiskundeklaskamers 'n taamlik rigiede roetine gevolg is van die onderwyser wat probleme op die bord doen, nuwe werk verduidelik, en dan vir leerders die geleentheid gee om solank aan huiswerkprobleme te werk, is volgens Romberg en Carpenter (1986:851) 'n illustrasie daarvan dat wiskunde gesien word as 'n statiese, begrensde dissipline. Wiskundekennis word gesien as gedekontekstualiseer, onafhanklik van spesifieke kontekste sodat dit geleer, getoets en toegepas kan word, (Brown, Collins & Duguid, 1989:32). Die gevolge van hierdie tradisionele siening van wiskunde is dat wiskundekennis geskei word van die werklikheid en in geïsoleerde konsepte, feite, vaardighede en prosedures gefragmenteer word, wat dan weer gerangskik word in onderwerpe en lesse. Kennis van geïsoleerde feite en konsepte het 'n plaasvervanger geword van kennis ten opsigte van *hoe* om wiskunde te doen (Williams, 1997:346).

Tradisionele wiskunde-onderrig bestaan grootliks uit onderwysers wat leerders rig om feite te memoriseer en om formules, algoritmes en prosedures toe te pas sonder om leerders se aandag te vestig op die betekenis daarvan (Freudenthal, 1991:3; Ellis & Berry, 2005:11). Hierdie siening het die onderliggende teorie van wiskunde-onderrig vir baie jare gevorm (Biggs, 1996:348), en as mens na huidige onderrigpraktyke kyk, is dit steeds die geval (Ball *et al.*, 2001: 435). Leer word gesien as die ontvangs, berging en toepaslike gebruik van hierdie kennis (Biggs, 1996:347) wat gefragmenteer, bestudeer, voorspel en beheer kan

word (Trochim, 2006a:1; Hale-Haniff & Pasztor, 1999:5). Ten einde hierdie soort onderrig te fasiliteer, moet onderwysers klein hanteerbare stukkie inhoud aan leerders demonstreer en verduidelik. Leer en assessering word gestruktureer rondom die gedagte dat daar 'n unieke korrekte manier is om 'n wiskunde-probleem op te los (Ellis & Berry, 2005:11).

2.2.2 Pragmatisme

Volgens die pragmatisme word absolute kennis gesien as 'n verdienstelike, maar heel moontlik onbereikbare doelwit (Driscoll, 2005:13). Die oortuiging word gehuldig dat die realiteit bestaan, maar nie direk geken kan word nie. Kennis is voorwaardelik, word deur bepaalde onsekerhede en subjektiwiteit gekenmerk, (Lesh & Doerr, 2003:523) en sekere waarnemingsfoute is onvermydelik. Dit is waarom pragmatiste aanvoer dat kennis nie 'n individu se spieëlbeeld van die realiteit kan wees nie, en derhalwe word die realiteit geïnterpreteer deur die individu. Kennis word gevolglik deur ervaring of rede verkry (Driscoll, 2005:14). Pragmatiese teorieë kan beskou word as hipoteses wat aanvaar en gebruik word solank as wat daar getuienis bestaan om dit te ondersteun (Driscoll, 2005:13)

2.2.3 Interpretivisme

Die wesenskenmerke van die interpretivistiese paradigma is dat die kenner (leerder) en die kenobjek (realiteit) nie van mekaar geskei kan word nie, en dat kennis van die leefwêreld rondom ons gevorm (gekonstrueer) word deur 'n persoon se deurleefde ervaring (Siemens, 2005:1; Weber, 2004:iv, vi). Die leerder probeer sin maak uit die wêreld. Kennis is ingebed in die konteks waarin dit gebruik word (Dabbagh, 2007:1) en word opgebou deur middel van sosiale konstruksie van die wêreld. Hierdie betekenisgewende aktiwiteite gebeur binne die leerder se verwysingsraamwerk en die spesifieke doelwitte wat hy/ sy gestel het (Weber, 2004:vi). Vanuit die interpretivistiese paradigma word ook geglo dat die wêreld rondom ons vanuit veelvuldige perspektiewe gestruktureer kan word. Aangesien die wesenskenmerke van die konstruktivisme ooreenstem met interpretivisme, kan tereg gesê word dat die *konstruktivisme* vanuit die *interpretivisme* ontwikkel het.

Konstruktivisme is fundamenteel nie-positivisties, en staan in direkte kontras daarmee (Fosnot, 1996:10). Konstruktivisme kan beskou word as 'n aantal leerteorieë met die gemeenskaplike eienskap dat leerders betekenisvol leer deur hulle eie kennis aktief te selekteer en kumulatief te konstrueer deur individuele en sosiale aktiwiteit (Von Glasersfeld,

1989:162; Handal, 2005:4; Biggs, 1996:348). Die siening dat wiskunde 'n sosiale konstruk is, wat impliseer dat leerders se kennis beter gekonstrueer word wanneer dit ingebed is in 'n sosiale proses, het tot die sosiale konstruktivisme aanleiding gegee (Ernest, 1991:42; kyk 2.3.3).

2.3 Onderrig-leer-benaderings in wiskunde

Woolfolk (2007:206) en Mayer (2003:5) definieer leer as 'n relatief permanente verandering in die individu se kennis of gedrag wat op sy ervaring gebaseer is. Drie eienskappe van leer kom hieruit na vore: leer is lang termyn eerder as kort termyn; leer behels kognitiewe verandering wat waarneembaar is in gedragsverandering, en leer is afhanklik van die ervaring van die leerder (Mayer, 2003:5). Onderrig word deur Driscoll (2005:23) gedefinieer as die doelbewuste ordening van gebeure ten einde 'n leerder se bereiking van 'n doelwit te fasiliteer, terwyl Mayer (2002b:6) onderrig vir leer definieer as die voorsiening van leerervarings wat die leerder bemagtig om probleme op te los deurdat hy effektief gebruik kan maak van dit wat hy geleer het.

'n Filosofiese beskouing ten opsigte van wiskunde-onderrig bepaal die manier waarop ons wiskunde leer en onderrig. As wiskunde byvoorbeeld gesien word as 'n entiteit wat wag om ontdek te word, dan sal dit voldoende wees as wiskunde as 'n blote versameling van feite, definisies en algoritmes aangebied word. In dieselfde mate sal die onderrig van wiskunde geskied as die oordrag van 'n onveranderlike liggaam van kennis wat leerders sonder enige redenering moet aanvaar. As wiskunde, daarenteen, aangebied word as 'n kreatiewe, ondersoekende menslike aktiwiteit, dan is leerders in die posisie om hulle eie kennis te konstrueer (Handal, 2005:2). In die lig van die feit dat daar hoofsaaklik drie onderrig-leer-teorieë uit die literatuur na vore kom wat kenmerkend is van onderrig-leer-omgewings voortspruitend uit bogenoemde epistemologiese beskouings, en al drie in 'n mindere of meerdere mate gestalte vind in die manier waarop wiskunde in die praktyk geleer en onderrig word, word daar in hierdie studie die volgende onderrig-leer-teorieë bespreek:

- die behavioristiese leerteorie (vanuit die objektivisme),
- die kognitiewe leerteorie (vanuit die pragmatisme) en
- die konstruktivistiese leerteorie (vanuit die interpretivisme). (Ertmer & Newby, 1993:50, Siemens, 2004:2; Driscoll, 2005:15)

Omdat daar in die empiriese deel van die studie onder andere ook gefokus word op die lewenswerklike kontekste van die funksiekonsep, word realistiese wiskunde-onderrig addisioneel tot bogenoemde benaderings ook bespreek. Die realistiese benadering tot die onderrig van wiskunde het tot stand gekom uit Freudenthal se siening van wiskunde as 'n menslike aktiwiteit (kyk 2.3.4).

2.3.1 Behavioristiese teorie

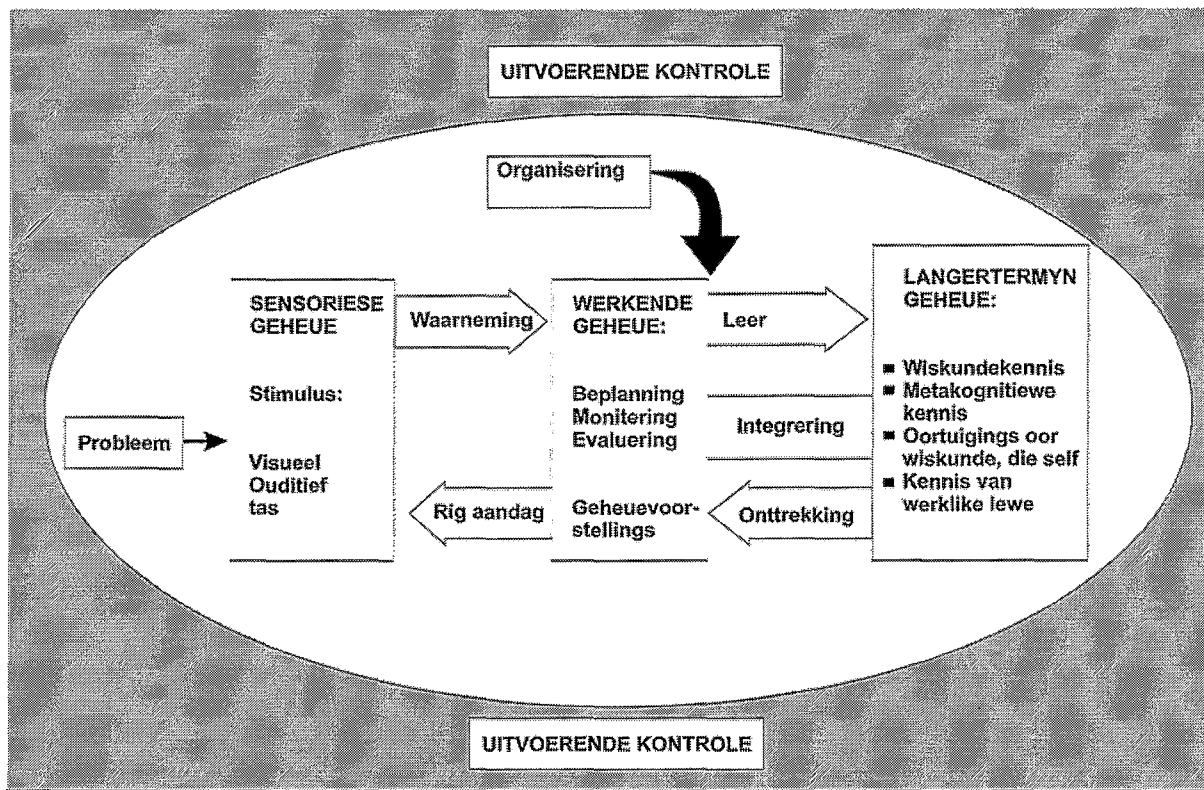
Volgens die behavioristiese benadering word leer gesien as 'n verandering in die vorm of frekwensie van gedrag, wat hoofsaaklik as 'n funksie van omgewingsfaktore voorkom (Schunk, 2000:11). Die fokus is op eksterne gebeure as die oorsaak van verandering in waarneembare gedrag (Woolfolk, 2007:233). Onderrig vereis die ordening van stimuli in die omgewing sodat die leerder die gewenste respons kan lewer en versterk kan word (Schunk, 2000:23). Vooruitgang kom in klein stappe voor deur die versterking van response. Die doel van behavioristiese onderrig is dat leerders die korrekte respons op 'n stimulus sal lewer (Ertmer & Newby, 1993:56). Onderrig vereis die daarstel van leidrade waarop leerders sal reageer, terwyl leermateriaal in kleiner dele verdeel word sodat dit opeenvolgend bemeester kan word (Schunk, 2000:24). Onderrig geskied deur middel van transmissie. Die leerder is 'n passiewe ontvanger van inligting en 'n aktiewe luisteraar wat instruksies volg (Woolfolk, 2007:365). Behavioristiese beginsels van onderrig het 'n noue verwantskap met leer, want die doel van onderrig is juis om gedragsverandering teweeg te bring. Leer word gesien as die aanleer van feite, vaardighede en konsepte en word deur inoefening verkry. Thorndike (1922:52) het in hierdie verband aangevoer dat wiskunde die beste geleer word deur "dril" en inoefening; hy het wiskunde gesien as 'n "hiërargie van verstandsgewoontes en verwantskappe" wat met omsigtigheid georden, duidelik onderrig en met baie herhaling ingeoefen moet word sodat leer kan voorkom. Die behavioristiese siening van die onderrig en leer van wiskunde neem nie die ervaring wat leerders na die klaskamer bring of die betekenis wat leerders gee aan dit wat hulle leer, in ag nie (Ellis & Berry, 2005:8).

2.3.2 Kognitiewe benadering

Kognitiewe teorieë beklemtoon die gedagte dat kennis betekenisvol moet wees en dat leerders gehelp moet word om nuwe inligting te organiseer en met bestaande kennis in die geheue in verband te bring (Ertmer & Newby, 1993:57). Daar word minder klem geplaas op

dit wat leerders doen (behaviorisme) en meer op *wat* hulle weet en *hoe* hulle dit weet. Die denkprosesse wat tot die gedrag aanleiding gee, word beklemtoon eerder as die gedrag self (Schunk, 2000: 24). Leer word as 'n aktiewe proses gesien waarin leerders nie maar net kennis ontvang nie, maar op soek is na nuwe inligting om probleme op te los en dit wat hulle alreeds weet, te reorganiseer om tot nuwe insigte te kom. Die leerder word as 'n aktiewe deelnemer in die leerproses gesien (Woolfolk, 2007: 249). Sowel die behavioristiese as die kognitiewe benadering beklemtoon die belangrikheid van versterking in leer, maar om verskillende redes. Volgens die eng behavioristiese benadering het versterking ten doel om response te versterk; die kognitiewe benadering, daarenteen, sien versterking as 'n bron van terugvoer in terme van dit wat moontlik kan gebeur as gedrag herhaal of verander word. Onderrigprosedures beïnvloed die wyse waarop 'n leerder relevante inligting selekteer, dit in 'n samehangende kognitiewe struktuur organiseer en met bestaande kennis integreer volgens die inligtingverwerkingsmodel (Mayer, 2003:7). Dit is dan ook volgens Mayer (2002b:7) die basis van betekenisvolle leer (kyk 2.4).

Die basiese aannames van inligtingverwerking is die volgende: Die mens is 'n prosesseerder van inligting; die geheue is 'n inligtingverwerkingstelsel; kennis is 'n reeks geheueprosesse, en leer is die verkryging van geheuevoorstellings (Mayer, 1996:154). Hierdie hele stelsel word deur kontroleprosesse gerig wat bepaal hoe en wanneer inligting deur die stelsel vloei (Woolfolk, 2007:251; kyk Fig 2.1). Implisiete geheuebeelde word sonder enige bewustelike insette gevorm. Die inligtingverwerkingstelsel bestaan uit drie komponente, naamlik die sensoriese geheue, die korttermyn- of werkende geheue en die langtermyngeheue. Drie kognitiewe leerprosesse is ook betrokke, naamlik selektering, organisering en integrering (Mayer, 1994:5829). Inligting word in die sensoriese geheue geënkodeer, waar waarneming en aandag bepaal watter inligting vir gebruik in die werkende geheue geselekteer word (Mayer, 1994:5829). In die werkende geheue word nuwe inligting aan bestaande kennis uit die langtermyngeheue verbind. Inligting wat deeglik verwerk en goed verbind is, word deel van die langtermyngeheue en kan geaktiveer word om terug te keer na die werkende geheue (Woolfolk, 2007:251). Die proses waardeur nuwe inligting met bestaande kennis vergelyk word, word integrering genoem (Mayer, 1994:5830). Inligtingverwerking moet nie beskou word as 'n reeks diskrete algoritmes wat in 'n bepaalde volgorde uitgevoer word nie, maar eerder 'n gekoördineerde versameling prosesse wat daarop gemik is om sin uit inkomende ervarings te maak (Mayer, 1996:156).



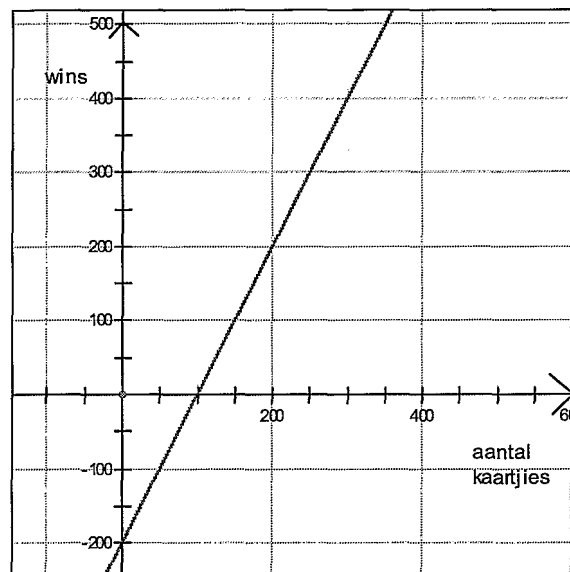
FIGUUR 2.1 'n Model van inligtingverwerking (Woolfolk, 2007:251 ; Schoenfeld, 1992: 351, Mayer, 2002b:7)

Die wyse waarop leerders inligting in wiskunde verwerk, bepaal in 'n betekenisvolle mate hulle prestasie in dié vak (Maree *et al.*, 1997:9). Die inligtingverwerkingsmodel stel verskillende moontlike leeruitkomste voor wat ook met studiegewoontes verband hou (kyk 4.4.1.3.1) (Mayer, 2002a:227; Mayer, 1994:5830):

- Indien die leerder nie daarin slaag om relevante inligting te selekteer nie, sal geen leer plaasvind nie. Gevolglik sal die leerder swak presteer in beide take wat gewoontelear vereis, wat slegs die leermateriaal dek wat aangebied is, en toepassingstake, wat vereis dat die leerder bestaande kennis in nuwe situasies sal toepas;
- Indien die leerder wel aandag gee aan die nuwe inligting, maar dit nie organiseer nie, sal betekenisvolle leer nie plaasvind nie (kyk 2.4), maar wel gewoontelear of papegaaileer. In hierdie geval sou die leerder dalk goed kon presteer in take wat gewoontelear vereis, maar swak vaar ten opsigte van toepassingstake;

- Wanneer al drie leerprosesse betrokke is, sal betekenisvolle leer plaasvind wat goeie prestasie met betrekking tot beide gewoonteleer- en toepassingstake tot gevolg kan hê. 'n Leerder sal belangrike terme en feite kan onthou, maar sal ook die kennis kan gebruik om probleme op te los en nuwe konsepte te verstaan.

Voorbeeld:



Die grafiek toon die wins van 'n Valentynsbal as 'n lineêre funksie van die aantal kaartjies wat verkoop is. Beantwoord die volgende vrae aan die hand van die grafiek:

- Bepaal die helling van die grafiek
- Wat word deur die helling van die grafiek voorgestel?

Geen leer sal plaasvind indien die leerder nie die relevante inligting kan selekteer ten einde die helling van die grafieke te bepaal nie. Indien die leerder wel die inligting kan selekteer om die helling te bepaal, kan ons aanvaar dat gewoonteleer plaasgevind het. Indien die leerder egter die helling in verband kan bring met die koste van 'n kaartjie, dan kon hy sy kennis waaroor hy reeds beskik, gebruik om dit in 'n nuwe konteks toe te pas.

2.3.3 Konstruktivisme

Volgens die *Curriculum and Evaluation Standards* (NCTM, 1989:7) laat die tradisionele benadering tot die onderrig en leer van wiskunde nie reg geskied aan wiskunde, of die

verstaan van wiskunde nie. Ons leef in 'n snel veranderende samelewing wat nuwe kennis, hulpmiddels en maniere waarop wiskunde gedoen en gekommunikeer word, na vore laat kom (NCTM, 2000:4). Sedert die tagtigerjare is daar wêreldwyd 'n paradigmaskuif besig om plaas te vind in wiskunde-onderwys (Prawat, 1992:354; Ellis & Berry, 2005:11). Barr en Tagg (1995:1) verwys na hierdie paradigmaskuif as 'n verandering van onderwysinstellings wat onderrig "verskaf" tot plekke wat leer "fasiliteer". Korthagen en Kessels (1999:6) beklemtoon ook die tekortkominge van die tradisionele benadering tot die leer van wiskunde. Die uitdaging is nie meer om wiskunde "in leerders (se koppe) te kry nie", maar om leerders in wiskunde betrokke te kry (Philipp, 2001, aangehaal deur Ellis & Berry, 2005:12). Hierdie paradigmaskuif is gemaak van 'n tradisionele benadering tot onderrig en leer (kyk 2.2.1) na 'n konstruktivistiese benadering met 'n klemverskuiwing na die herstrukturering van kennis en verandering in begrip eerder as verandering in gedrag (Shuell & Moran, 1994:3340). Slavin (2003:257) verwys na hierdie paradigmaskuif as 'n "revolusie".

Konstruktivisme het ongetwyfeld 'n groot invloed op die hervormingsbeweging in wiskunde-onderrig en -leer, soos gesien kan word in verskeie hervormingsdokumente soos die *Standards*-dokumente (NCTM, 1989:7-10; 1991:2), *Everybody Counts* (National Research Council (NRC), 1989: 58-59) en die HNKV (DoE, 2003:9-10). Die hervorming in wiskunde-onderrig, asook die filosofie onderliggend aan Kurrikulum 2005, is op sosiale konstruktivisme gebaseer (Olivier, 1999:1) waarvolgens leer as 'n onvoltooide, veranderende produk van die mens se strewe na kennis beskou word (Ernest, 1991:42). Konstruktivisme het die volgende kenmerke: Die leerder word nie gesien as 'n passiewe ontvanger van kennis of 'n "leë houer" waarin kennis gestort moet word nie (Shuard, 1986:179; kyk 2.3.1), maar as 'n aktiewe deelnemer wat sy eie kennis konstrueer en sin maak uit dit wat hy doen, op grond van sy persoonlike ervaring en interaksie met die leeromgewing (Driscoll, 2005:387; Shuard, 1986:179). Vanweë die klem op aktiewe leerders staan die konstruktivistiese benadering ook bekend as leerder-gesentreerde onderrig (Slavin, 2003:258). Volgens Steyn en Du Plessis (2007:882) behels aktiewe leer juis dat leerders betrokke sal wees in aktiwiteite in plaas daarvan om net waar te neem. Leerders behoort bewus gemaak te word van hulle eie leerhandelinge en dat hulle doelbewus hierdie leerhandelinge behoort te beplan, te implementeer en te monitor.

Leer vanuit die konstruktivistiese perspektief vereis selfregulering en die bou van konseptuele strukture deur refleksie en abstraksie (Von Glasersfeld, 1995:14). Fosnot (1996:10) sluit hierby aan met die gedagte dat konseptonwikkeling en 'n diep begrip die

fokus is. Die leerder konstrueer sy eie interne voorstellings van kennis, en hierdie kennis is op konseptuele begrip gebaseer (Tatum, s.a.:7). Konstruktivisme behels verder dat die leerder bestaande kennisstrukture moet herorganiseer en herstruktureer (Hiebert *et al*, 1996:15; Fry, Ketteridge & Marshall, 2003:9). Die leerder kom na die leersituasie met sy eie bepaalde kennis; en nuwe idees en inligting word in die lig van die leerder se bestaande kennis geïnterpreteer. Leerders gebruik nuwe inligting om bestaande kennis aan te pas (Slavin, 2003:258). Inherent aan die konstruktivisme is die aanname dat nuwe kennis (veral hoër-orde-konsepte) bepaalde ankerpunte in die leerder se kennisstrukture moet vind ten einde kognitiewe kontinuïteit en relevansie te behou (Herscovics, 1996:351).

Volgens die konstruktivistiese perspektief is leer ook 'n sosiale proses (Ernest, 1991:42). Leerders leer by mekaar (en die onderwyser) deur bespreking, deur kommunikasie waar hulle gedagtes met mekaar deel en vergelyk, deur op hulle denke te reflekteer, en probeer mekaar se denkwyse te verstaan deur onderhandelinge en gedeelde betekenis. Die *Professional Standards* (NCTM, 1992:25) beklemtoon die keuse van wiskundetake en die strukturering van wiskundige gespreke rondom daardie take as 'n belangrike deel van die onderrigpraktyk. Die HNKV (DoE, 2003:10) stel ook dat wiskunde leerders in staat stel om in groepverband saam te werk om sodoende wiskundebegrip te verbeter, asook om wiskundig te kan redeneer, inligting in te samel en te kan evalueer. Hierdie klem op kennisverkryging deur middel van gespreke is nou verweef met die sosiaal-konstruktivistiese sienings van hoe wiskundekennis gevorm word.

Vanuit 'n onderrigperspektief behels konstruktivisme die samehangende organisasie van kennis wat deur die leerder verkry moet word (Herscovics, 1996:351), asook die skep van geleenthede vir leerders om die sosiaal-onderhandelde aard van wiskunde te ervaar, te ontdek, te bespreek en te rekonstrueer (Betts, 2005:1). In die konstruktivistiese onderrig-leer-omgewing word die tradisionele oordrag-luister-verwantskap tussen onderwyser en leerder vervang met 'n meer komplekse en interaktiewe verwantskap wat groter eise aan die onderwyser (en leerder) stel (Prawat, 1992:357). Onderrig word gesien as 'n proses waardeur die konstruksie van kennis ondersteun word, eerder as die kommunikasie of oordrag van kennis. Dabbagh (2007:3) lig verder die volgende doelwitte van onderrig vanuit 'n konstruktivistiese perspektief uit:

- Die rol van die onderwyser is eerder mentor of fasiliteerder as verteller;

- In 'n konstruktivistiese leeromgewing word reflektiewe denke en hoër-orde-denkvaardighede aangemoedig;
- Leerders moet aangemoedig word om die lewensvatbaarheid van hulle idees te toets en alternatiewe oplossings te soek.

2.3.4 Realistiese Wiskunde

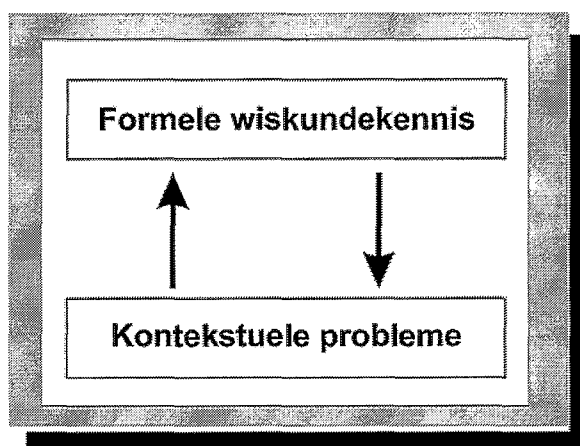
Die realistiese benadering tot wiskunde-onderrig, kortweg genoem realistiese wiskunde, is gebaseer op Freudenthal se siening van wiskunde, naamlik dat wiskunde 'n menslike aktiwiteit is (Freudenthal, 1991:14-15) en dat wiskunde vanuit die realiteit moet ontstaan (Freudenthal, 1991:16-18). Die gedagte is verder dat wiskunde gekoppel moet wees aan die werklikheid, binne leerders se verwysingsraamwerk moet wees en relevant vir die gemeenskap moet wees (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003:9). Alhoewel die realistiese benadering tot wiskunde-onderrig ooreenkomste met die (sosiaal)-konstruktivisme toon, het dit onafhanklik daarvan ontwikkel (De Lange, 1996: 59). Die versoenbaarheid tussen hierdie twee leerteorieë is grotendeels gebaseer op ooreenstemmende kenmerke van wiskunde en wiskundeleer. Beide teorieë stel dit dat wiskunde 'n kreatiewe menslike aktiwiteit is; wiskundeleer kom voor wanneer leerders effektiewe maniere ontwikkel om probleme op te los (Streefland, 1991, aangehaal deur Zulkardi, 2003:9) en beide is gerig op wiskunde-handelinge wat in wiskunde-objekte getransformeer word (Freudenthal, 1991:84).

Realistiese wiskunde het ook ten doel dat leerders hulle eie wiskundekennis konstrueer deur aan probleme in 'n lewenswerklike konteks betekenis te gee (Freudenthal, 1978:311). Die woord "realistiese" verwys egter nie net na die koppeling van wiskunde met die werklike lewe nie, maar ook na die probleemsituasie wat in die gedagte van die leerder werklikheid word (Zulkardi, 2003:3). Met betrekking tot probleme waarmee leerders gekonfronteer word, beteken dit dat probleme lewenswerklik kan wees, maar ook probleme wat in hulle gedagtes werklikheid word deurdat hulle hul verbeelding kan gebruik (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003:10).

Wiskundekonsepte word nie aan die leerder voorgehou sodat dit met realiteit gevul kan word nie - dit kom uit die realiteit na vore, en brei voortdurend uit (Freudenthal, 1987:280). Wiskunde moet deel wees van die leerders se verwysingsraamwerk deur gebruik te maak van die lewenswerklike konteks as 'n bron van konsepontwikkeling (Zulkardi, 2003:12). Wiskunde bied ook die geleentheid aan die leerder om die wêreld rondom hom deur middel

van wiskunde te organiseer deur 'n proses van matematisering (Freudenthal, 1978:44). Freudenthal beweer dat wiskunde die beste geleer word deur dit te doen, dat matematisering die sleutelproses in wiskunde-onderwys en ook die doel daarvan is (Hermann, 2004:3)

Treffers (1987, aangehaal deur Freudenthal, 1991:41) onderskei horisontale en vertikale matematisering. Horisontale matematisering behels die oplos van 'n lewenswerklike probleem met behulp van wiskundetegnieke en -kennis (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003:12; Hermann, 2004:3). Die probleem word aanvanklik in wiskundeterme as 'n wiskunde-probleem geformuleer (kyk Fig 2.2). Dan word die probleem met behulp van beskikbare wiskundekennis opgelos. Laastens word die probleem in die oorspronklike konteks terug vertaal (Gravemeijer, 1994:92). Die omskakeling van 'n lewenswerklike probleem na 'n wiskunde-probleem is 'n voorbeeld van horisontale matematisering (Zulkardi, 2003: 3).

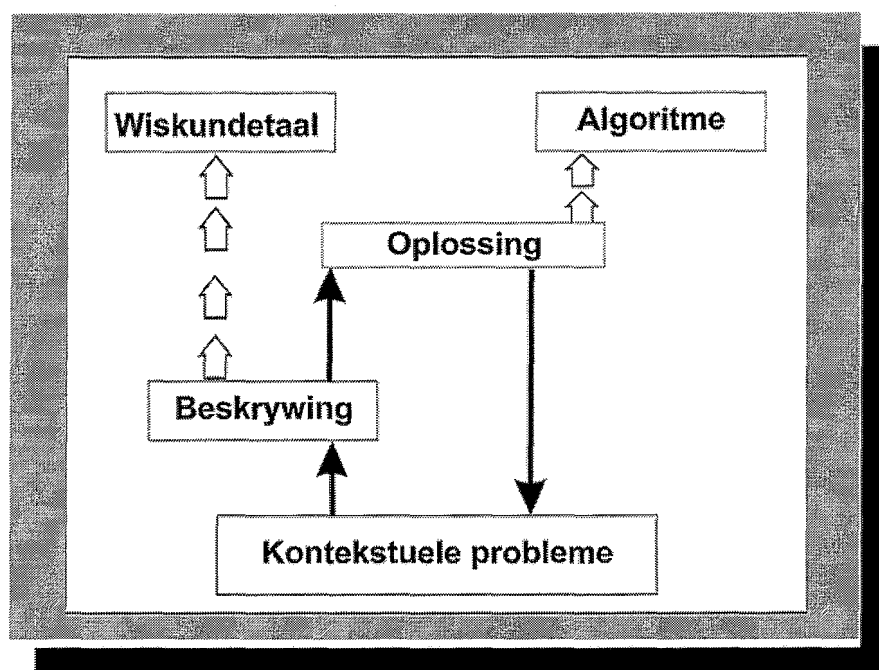


FIGUUR 2.2 Horisontale matematisering

Vertikale matematisering (kyk Fig 2.3) is die proses van reorganisasie binne die wiskundige stelsel self. Voorbeelde hiervan sluit in: die voorstelling van 'n verwantskap in 'n formule, die bewys van reëlmatighede, die verfyning en aanpassing van modelle, die gebruik van verskillende modelle, die kombinerings en integrering van modelle, die formulering van 'n wiskundige model en veralgemening (Zulkardi, 2003:4). Eerder as dat die leerder die probleem in 'n bestaande raamwerk probeer inpas, probeer hy die probleem beskryf in 'n taal wat hom toelaat om te verstaan waaroor dit gaan. Die beskrywing beantwoord nie die vraag

outomaties nie, maar vereenvoudig die probleem deurdat verwantskappe beskryf en onderskeid tussen relevante en minder relevante inligting getref word (Gravemeijer, 1994:93). Die oplos van die probleem in hierdie geval verskil van die toepassing van 'n standaardprosedure. Dit is ook 'n geval van probleemoplossing. Die omskakeling- en interpretasie van die oplossing is in die geval makliker, aangesien die simbole vir die leerders betekenis dra - dit is immers die leerder wat die betekenis daaraan toegeken het. Leerders leer om kontekstuele probleme te matematiseer. Die opeenvolgende oplossing van soortgelyke probleme induseer 'n ander proses. Probleembeskrywings ontwikkel in 'n informele taal, wat uiteindelik deur 'n proses van vereenvoudiging en formalisering in 'n meer formele, gestandaardiseerde taal ontwikkel. Dit is ook 'n proses van matematisering - alhoewel oor 'n langer tydperk. Iets soortgelyk gebeur met die oplossingsprosedure. Op die lang duur word die oplos van sommige probleme roetineprosedure, met ander woorde die prosedure word met verloop van tyd gekondenseer en geformaliseer. Algoritmes neem dus vorm aan.

Beide horisontale en vertikale matematisering vind plaas om basiese wiskundekonsepte of formele wiskundetaal te ontwikkel (Zulkardi, 2003:4). Freudenthal (1991:41-42) som dit op deur te sê dat horisontale matematisering beteken om van die werklike lewe na die wêreld van simbole te beweeg, terwyl vertikale matematisering beteken om binne die wêreld van simbole te beweeg. Vertikale matematisering kan beskou word as die matematisering van wiskunde-inhoud, terwyl horisontale matematisering die matematisering van kontekstuele probleme is (Gravemeijer, 1994:94).



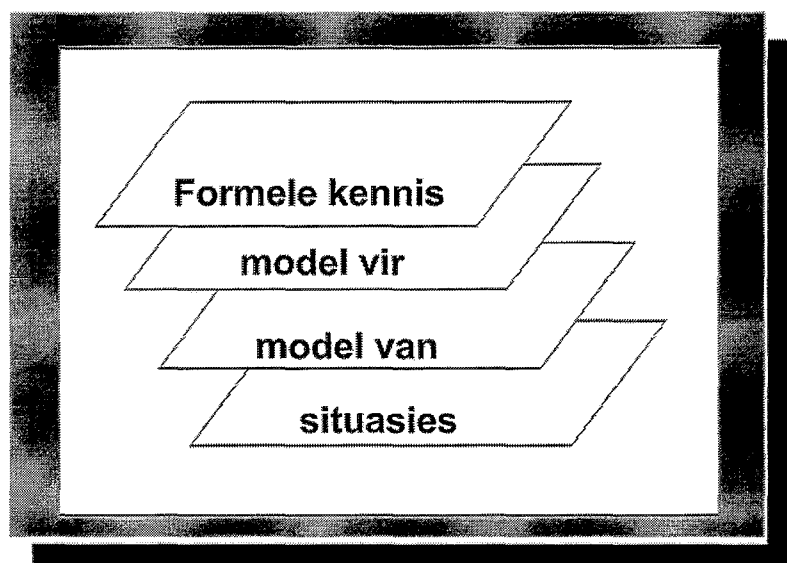
FIGUUR 2.3 Vertikale matematisering

Realistiese wiskunde het drie sleutelbeginsels, naamlik begeleide herontdekking, didaktiese fenomenologie en selfontwikkelde modelle. Vanuit die realistiese benadering tot wiskunde word wiskunde-onderdig as 'n proses van begeleide herontdekking (*guided re-invention*) georganiseer, waar ontdekking die stappe in die leerproses is, terwyl "begeleide" op die onderrigomgewing van die leerproses dui (Freudenthal, 1991:46). Begeleide herontdekking stel leerders in staat om in 'n mate 'n soortgelyke proses te ervaar as die proses waardeur wiskunde ontdek is (Gravemeijer, 1994:83).

Die tweede beginsel van realistiese wiskunde hou verband met die gedagte van didaktiese fenomenologie (Freudenthal, 1983). Die verskynsel waardeur konsepte in die werklikheid verskyn, behoort die bron van konsepvorming te wees (De Lange, 1992:52; Freudenthal, 1983: 32). Die lewenswerklike situasie word intuïtief ondersoek met die doel om dit te matematiseer (De Lange, 1992:52) (fenomenologiese ondersoeking). As wiskunde uit die oplos van praktiese probleme ontwikkel het, is dit aanvaarbaar om die probleme wat aanleiding gegee het tot die ontstaan van wiskunde, in lewenswerklike situasies te wagte te wees (Gravemeijer, 1994:90). Die doel van fenomenologiese ondersoek is juis om problemsituasies te vind waarvoor situasie-spesifieke benaderings veralgemeen kan word

en om situasies te vind wat oplossingsprosedures kan ontlok wat as basis vir vertikale matematisering kan dien (Gravemeijer, 1994:91).

Die derde beginsel van realistiese wiskunde-onderrig is die rol wat selfontwikkelde modelle in die oorbrugging van die gaping tussen informele kennis en formele wiskunde speel (Gravemeijer, 1994:91). Die modelle wat leerders konstrueer, dien as 'n basis vir die ontwikkeling van formele wiskundekennis, en ontstaan uit die probleemoplossingsaktiwiteit (Gravemeijer, 1994:115). 'n Model word gevorm as 'n konteks-spesifieke model vir 'n situasie. Later word hierdie model veralgemeen na ander situasies. Die model word dus 'n entiteit op sy eie. In sy nuwe vorm word dit 'n model vir wiskundige redenering op 'n formele vlak (Gravemeijer, 1994:100). In realistiese wiskunde-onderrig word dus vier vlakke onderskei: situasies, 'n model *van*, 'n model *vir* en formele wiskunde (kyk Fig. 2.4):



FIGUUR 2.4 Model vir realistiese wiskunde-onderrig

In aansluiting hierby stel die Hersiene Nasionale Kurrikulumverklaring (DoE, 2003:10) dit dat 'n belangrike doelwit van wiskunde die daarstelling van verwantskappe tussen wiskunde as 'n dissipline en die toepassing van wiskunde in lewenswerklike kontekste is. Wiskundige modellering voorsien aan leerders maniere om hul wêreld te ontleed en wiskundig te beskryf en stel leerders sodoende in staat om hul begrip van wiskunde te verdiep, terwyl daar

terselfdertyd 'n toename in die hulpmiddele is waarmee hulle lewenswerklike probleme oplos.

2.3.5 Sintese van die onderrig-leer-benaderings

Beide die behavioristiese en kognitiewe teorieë is objektivisties in die sin dat hulle aanvaar dat die eksterne wêreld reël is en die doel van onderrig is dat leerders response en kennis sal verkry wat in die wêreld bestaan. Konstruktivisme stel subjektiwiteit voorop omdat leerders inligting kognitief verwerk om by hulle behoeftes, houdings, oortuigings en gevoelens aan te pas (Schunk, 2000:24). Die konstruktivistiese benadering sien onderrig as afhanklik van die leerder en die omgewing, maar beklemtoon veral die interaksie tussen hierdie invloede (Schunk, 2000:25). Konstruktivisme ontken nie die bestaan van die reële wêreld nie, maar wel dat dit wat ons van die wêreld weet, uit ons interpretasie van ons ervaring met die wêreld spruit (Ertmer & Newby, 1993:62). Die individu skep betekenis in plaas daarvan om dit te verkry. Leerders dra nie kennis oor van die eksterne wêreld na hulle geheue nie, maar bou persoonlike interpretasies van die wêreld rondom hulle gebaseer op individuele of sosiale ervarings en interaksies. Die interne voorstelling van kennis is dus oop vir verandering (Ertmer & Newby, 1993:63).

Die verskil tussen wiskunde-onderrig volgens 'n realistiese benadering teenoor die inligting-verwerkingsmodel blyk duidelik in die manier waarop toepassings hanteer word (Gravemeijer, 1994:91). Die inligtingverwerkingsmodel sien wiskunde as 'n reeds bestaande stelsel met algemene toepasbaarheid. Wiskunde-onderrig word gesien as die opbreek van formele wiskundekennis in leerprosedures en die toepassing daarvan. Binne die realistiese benadering is die klem op matematisering. Wiskunde word as 'n aktiwiteit, 'n manier van doen, gesien. Die leer van wiskunde beteken om wiskunde te doen, waarvan die oplos van lewenswerklike probleme 'n integrale deel is (Gravemeijer, 1994:91).

In aansluiting by Fenstermacher (1986:38) se ontleding van die eienskappe van onderrig, en Nieuwoudt (1998:51) se uitbreiding van die wesenstrekke van onderrig, word die bogenoemde onderrig-leer-benaderings vergelyk ten opsigte van die doel/ intensie van onderrig, die onderwyser, leerders, interaksie en die inhoud van dit wat geleer word, asook die konteks waarin onderrig plaasvind

Die wesenskenmerke van die vier benaderings word in die volgende tabel saamgevat (Woolfolk, 2007: 365; Nieuwoudt & Golightly, 2006:110-115; Ertmer & Newby, 1993:55-67):

TABEL 2.1 : Wesenstrekke van die vier benaderings

	BEHAVIORISME	KOGNITIVISME (INLIGTINGVERWERKINGS- MODEL)	KONSTRUKTIVISME	REALISTIESE WISKUNDE
Doel/ intensie van onderrig	Oordrag van kennis	Bevordering van inligtingverwerking	Konstruksie van eie begrip	Matematisering
Kennis (inhoud wat onderrig moet word)	Vaste liggaam van kennis wat verkry moet word; Word ekstern gestimuleer	Vaste liggaam van kennis wat verkry moet word; Word ekstern gestimuleer; Vorige kennis beïnvloed hoe nuwe inligting verwerk word	Kennis word individueel of sosiaal gekonstrueer; Bou voort op dit wat die leerder na die leersituasie bring	Lewenswerklike probleme wat as basis vir leerders se wiskundige voorstelling van 'n probleemsituasie dien
Leer	Aanleer van feite, vaardighede en konsepte; Leer kom voor deur inoefening, begeleiding	Aanleer van feite, vaardighede, konsepte en strategieë; Leer kom voor deur effektiewe toepassing van strategieë	Aktiewe konstruksie; rekonstruksie van vorige kennis; Leer kom voor tydens veelvuldige geleenthede en voorstellings van inhoud	Wiskunde word geleer deur wiskundekonsepte en -hulpmiddels in lewenswerklike situasies toe te pas wat vir hulle sin maak
Onderrig	Transmissie	Onderrig is gebaseer op leerders se bestaande kennisstrukture. Inligting moet op so 'n manier georganiseer word dat leerders nuwe inligting met bestaande kennis kan verbind	Leerders word aangemoedig om hulle eie begrip te konstrueer. Doel van onderrig is om leerders te wys hoe om kennis te konstrueer	Geskied deur middel van realistiese konteks wat deur die onderwyser gebied word

	BEHAVIORISME	KOGNITIVISME (INLIGTINGVERWERKINGS- MODEL)	KONSTRUKTIVISME	REALISTIESE WISKUNDE
Rol van die onderwyser	Bestuurder in beheer Korrigeer regte/ verkeerde antwoorde	Onderrig en modelleer effektiewe strategieë; Wankonsepte word gekorrigeer	Fasiliteerder; mede- konstrueerder van kennis; luister na leerders se denke, beskouings, monitor en evalueer leerders se konstruksie van kennis	Om die wiskundekonsep in die gedagte van die leerder werklik te maak
Rol van die leerder	Passiewe ontvanger van inligting; Aktiewe luisteraar; Volg instruksies	Aktiewe verwerker van inligting; organiseer en reorganiseer inligting	Aktiewe denker, interpreteerder en mede-konstrueerder van kennis; leerder verduidelik, stel vrae	Leerder is interaktief betrokke en neem doelgerig en betekenisvol deel aan besluitnemingsprosesse en die leerinhoud Aanvaar mede-verantwoordelikheid vir die onderrig-leergebeure
Interaksie	Wiskunde word as 'n individuele aktiwiteit gesien	Die verkryging van kennis word as 'n verstandelike aktiwiteit beskryf wat interne kodering en strukturering behels Leerder word as 'n aktiewe deelnemer in die leerproses gesien deur sy interaksie met die leerinhoud		
Konteks	Onderrig word gestruktureer rondom die aanbod van 'n stimulus en die voorsiening van geleenthede vir die leerder om die regte respons te lewer	Inligting moet op so 'n manier georganiseer word dat leerders in staat is om nuwe inligting met bestaande kennis te verbind	Kennis is nie abstrak nie, maar gekoppel aan die konteks waarin geleer word en aan die ervaring wat die deelnemers na die konteks bring; leer moet geanker wees in betekenisvolle kontekste	Realistiese probleemoplossing-situasies

Die leer van wiskunde behels die organisasie en reorganisasie van inligting, die konkretisering daarvan in 'n skema of kognitiewe eenheid, en die vorming van nuwe kennis en begrip vanuit hierdie nuut-gekonstrueerde boublokke. Uit bostaande behoort dit nou duidelik te wees dat die konstruktivisme die beste benadering tot die konseptuele leer van wiskunde bied.

2.4 Betekenisvolle leer van wiskunde

Mayer (2002b:3) en Shuell en Moran (1994:3341) gebruik die term *betekenisvolle leer* (in teenstelling met die begrip *gewoonte*leer of "rote learning"). Betekenisvolle leer is leer wat lei tot oordrag, waar oordrag gedefinieer word as die effek van vorige leer op nuwe leer (Mayer, 2002b:5). Oordrag vind suksesvol plaas wanneer 'n leerder kennis van vorige ervarings gebruik om iets nuut aan te leer (Schunk, 2000:206; Mayer, 2002b:4-5). Betekenisvolle leer (leer met begrip) is:

- 'n *Aktiewe proses*. Ten einde te verseker dat die kennis op 'n betekenisvolle wyse aangeleer word, moet die leerder verskeie kognitiewe bewerkings daarop uitvoer;
- 'n *Konstruktiewe proses*. Kennis is nie 'n entiteit wat onveranderd van die een persoon (onderwyser) na die ander (leerder) oorgedra word nie. Nuwe inligting word deur elke leerder op 'n unieke manier waargeneem en geïnterpreteer;
- 'n *Kumulatiewe proses*. Nuwe leer bou op die leerder se voorkennis en geheuemodelle, alhoewel vorige leer nuwe leer kan inhibeer of fasiliteer;
- 'n *Selfgereguleerde proses*. Namate leer vorder, moet die leerder besluite neem oor wat om volgende te doen. Effektiewe leerders monitor die leerproses deur te verifieer hoe goed nuwe materiaal verstaan word. Dit sluit ook metakognisie en selfdoeltreffendheid in (kyk 2.5.7);
- 'n *doelwit-georiënteerde proses*. Leer is meer geneig om suksesvol te wees as die leerder 'n doel het wat hy nastreef en sekere verwagtinge rondom prestasie koester as wanneer dit nie die geval is nie (Shuell & Moran, 1994:3341).

Leer behels nie alleen die verkryging van kennis nie, maar ook die vermoë om hierdie kennis in 'n verskeidenheid van nuwe situasies toe te pas (Mayer, 2002a:226). Hiebert *et al.* (1997:4) beweer dat 'n leerder iets verstaan (begryp) as hy verwantskappe kan vorm tussen nuwe kennis en vorige kennis (Mayer, 2002a:228). Carpenter en Lehrer (1999:20-23) beskryf vyf vorms van denkaktiwiteite waaruit wiskundebegrippe ontwikkel of na vore kom, naamlik:

- (1) *Die bou van verwantskappe:* Wiskundekonsepte kry betekenis uit die manier waarop dit met ander konsepte verband hou. So bou leerders betekenis vir 'n nuwe gedagte of konsep deur dit met ander idees te verbind wat hulle reeds verstaan. 'n Wiskunde-idee/ -prosedure/ -feit word verstaan as dit deel is van 'n interne netwerk. Leerders se wiskundekennis kan beskou word as interne netwerke van voorstellings. Die graad van begrip word bepaal deur die hoeveelheid en die sterkte van die verbindings (Hiebert & Carpenter, 1992:67). Begrip kom voor as voorstellings gekoppel raak aan toenemend gestruktureerde en samehangende netwerke. Die verbindings wat netwerke vorm, vorm verskillende soorte verwantskappe, insluitende ooreenkomste en verskille (Hiebert & Carpenter, 1992:69). Leerders moet aangemoedig en die geleentheid gebied word om die verwantskappe tussen verskillende onderwerpe in wiskunde raak te sien sodat hulle ekwivalente voorstellings van dieselfde konsep kan identifiseer (Berry & Nyman, 2003:483). So byvoorbeeld moet leerders die vermoë ontwikkel om die nodige verwantskappe tussen die numeriese-, algebraïese en grafiese voorstelling van 'n algebraïese funksie raak te sien;
- (2) *Uitbreiding en toepassing van wiskundekennis:* Dit is egter nie voldoende om die ontwikkeling van begrip te beskou as die toevoeg van nuwe konsepte of prosesse aan bestaande kennis nie. Dit behels ook die skep van ryk, geïntegreerde kennisstrukture. Hierdie strukturering van kennis ondersteun weer die groei van verdere wiskundekennis (Hiebert & Carpenter, 1992:77). Wanneer kennis hoogs gestruktureer is, kan nuwe kennis in verband gebring word met en geïnkorporeer word in bestaande kennisnetwerke. Wanneer leerders verwantskappe tussen konsepte en prosesse raak sien, is hulle meer geneig om raak te sien hoe bestaande kennis met nuwe situasies verband hou. Gestruktureerde kennis is minder vatbaar vir vergeet (Hiebert & Carpenter, 1992:74), aangesien 'n hele netwerk van kennis nie so maklik verbreek as losstaande stukkies inligting nie; inligting word makliker herwin as dit aan 'n netwerk gekoppel is. Konseptuele begrip groei namate verwantskappe ryker

en meer uitgebreid raak (Hiebert & Grouws, 2007:380). Volgens Carpenter en Lehrer (1999:19-20) is een van die belangrikste eienskappe van leer met begrip die feit dat dit nuwe leer genereer. Wanneer leerders nuwe kennis met begrip verkry, kan hulle daardie kennis op ander situasies toepas en nuwe, onbekende probleme oplos. Leer met begrip maak ook daaropvolgende leer makliker (NCTM, 2000:20);

- (3) *Reflekteer oor ervaringe:* Refleksie behels die bewustelike ondersoek van jou eie dade en denke. Dit beteken letterlik om die gedagtes om te keer, om uit verskillende oogpunte na dinge te kyk, terug te staan en weer daarna te kyk, bewustelik te dink oor wat jy doen en hoekom jy dit doen (Hiebert *et al.*, 1997: 5). Roetinetake vereis min refleksie. Refleksie speel egter 'n belangrike rol in die oplos van onbekende probleme (kyk 2.5.7). Om te reflekteer in die leerproses beteken dat leerders bewustelik die kennis wat hulle verkry, en spesifiek die manier waarop dit verband hou met wat hulle alreeds weet, moet ondersoek. Leer kom egter nie net voor met die toevoeg van nuwe konsepte of vaardighede nie; dit gebeur ook met die reorganisasie van wat leerders alreeds weet. Deur te reflekteer oor wat jy weet en hoe jy dit weet kan reorganisasie van bestaande kennis plaasvind;
- (4) *Artikuleer wat jy weet:* Die vermoë om jou eie idees uit te druk of te kommunikeer is 'n belangrike doelwit van wiskunde-onderrig, en ook 'n kenmerk van begrip. Artikulasie behels die kommunikasie van jou eie kennis, hetsy verbaal, skriftelik, of deur middel van prente, modelle of diagramme. Artikulasie vereis refleksie in die sin dat dit die belangrikste aspekte van 'n onderwerp uitlig sodat die essensie daarvan gekommunikeer kan word. Hiebert *et al.* (1997:5-6) beklemtoon ook dat leerders meer kan bereik deur kommunikasie as wat hulle individueel kan doen. Kommunikasie en refleksie werk hand aan hand om nuwe verwantskappe en verbindings te vorm;
- (5) *Maak wiskundekennis jou eie:* Begrip behels die konstruksie van kennis deur leerders deur hulle eie aktiwiteite sodat hulle 'n persoonlike belegging in die vorming van kennis kan ontwikkel. Leerders moenie slegs kennis waarneem as iets wat iemand anders aan hulle verduidelik het nie, of soos Schoenfeld (1988:160) dit stel: "passiewe verbruikers van iemand anders se wiskunde" wees nie; iets wat hulle maar net kan assimileer deur te luister, te kyk, en te oefen nie. Hulle moet beseft dat kennis geleidelik ontwikkel en voorlopig is. Leerders moet dit wat hulle hoor, vir hulle eie

doelindes aanpas. Begrip is ook nie uitsluitlik 'n privaat aangeleentheid nie. Die ontwikkeling van leerders se persoonlike betrokkenheid in leer met begrip is nou verweef met klaskameraktiwiteite waarin kommunikasie en die onderhandeling van betekenis belangrike aspekte is. Leerders word dus die outeurs van hulle eie leer. 'n Oorkoepelende doel van onderrig is dat leerders daarna sal strewe om begrip te ontwikkel omdat begrip vir hulle belangrik word. Dit beteken dat leerders oor die aktiwiteite waarin hulle betrokke raak terwyl hulle leer of probleme oplos, sal reflekteer. Hulle sien uiteindelik leer as probleemoplossing met die uiteindelijke doel om hulle kennis uit te brei (Carpenter & Romberg, 2004:33).

Begrip ontwikkel voortdurend en is nie 'n statiese eienskap van 'n individu se kennis nie. Begrip transformeer feitekennis in bruikbare kennis (Bransford, Brown & Cocking, 1999:16). Die verskil tussen minder suksesvolle en meer suksesvolle leerders is dat meer suksesvolle leerders se beheer oor konsepte hulle begrip van nuwe inligting vorm: dit laat hulle toe om patrone en verwantskappe raak te sien wat nie vir die minder suksesvolle leerder voor die hand liggend is nie. Suksesvolle leerders het nie noodwendig 'n beter geheue nie, maar hulle konseptuele begrip stel hulle in staat om relevante inligting te selekteer, te onttrek en te onthou (Bransford *et al.*, 1999:17).

'n Belangrike aspek van begrip is dat dit oortuigings beïnvloed (kyk 2.5.1) (Hiebert & Carpenter, 1992:77), en omgekeerd beïnvloed leerders se oortuigings aangaande wiskunde die groei van begrip op 'n subtiele wyse (Schoenfeld, 1985:13). Schoenfeld beweer dat sommige leerders "oorleef" deur goed-aangeleerde meganiese prosedures te implementeer in areas waar hulle eintlik niks verstaan nie. In sommige gevalle word die wiskundekennis wat leerders tot hulle beskikking het, en wat hulle veronderstel is om te kan gebruik, nie gebruik in probleemoplossing nie. Dit is nie omdat hulle dit vergeet het, of te min tyd het nie, maar omdat hulle nie die wiskundekennis as nuttig en bruikbaar sien nie. Dit is duidelik dat leerders se probleemoplossingsvaardighede nie slegs die produk is van wat hulle weet nie, maar ook 'n funksie is van hulle persepsies van daardie kennis, wat voortspruit uit hulle ervaringe met wiskunde. Dit beteken hulle oortuigings aangaande wiskunde bepaal bewustelik of onbewustelik die psigologiese konteks waarbinne hulle wiskunde doen.

2.5 Interafhanklike faktore wat 'n rol speel in die leer van wiskunde

Dit is nie 'n vreemde verskynsel dat leerders met oënskynlik hoë algemene verstandelike vermoëns of aanleg vir wiskunde soms onderpresteer in die vak nie (Maree *et al.*, 1997:1-2). Daarenteen gebeur dit dikwels dat leerders met 'n laer algemene verstandelike vermoë of aanleg vir wiskunde goed presteer in die vak. Van Aardt en Van Wyk (1993:233) en Monteith (1994:92) wys in hierdie verband daarop dat die kennis en gebruik van effektiewe leerstrategieë en motivering 'n belangrike faktor in die bepaling van doeltreffende leer op universiteitsvlak is. Die kern van die problematiek rondom wiskunde-onderrig en -leer setel veral buite die kognitiewe terrein. Gevolglik kan die belangrikheid van 'n stewige affektiewe onderbou as noodsaaklike ondersteunende struktuur vir toereikende kognitiewe prestasie in wiskunde nie onderskat word nie. Leerders se emosies, hulle houdings en oortuigings ten opsigte van wiskunde (kyk 2.5.1 en 2.5.2), die manier waarop hulle wiskunde-inligting verwerk (kyk 2.3.2), hulle probleemoplossingsgedrag (kyk 2.5.6) en sosiale faktore (kyk 2.5.8) speel 'n betekenisvolle rol in hulle uiteindelijke prestasie in wiskunde (Maree *et al.*, 1997:1-2). Ten einde wiskundeprestasie te verbeter, stel Howie *et al.* (2000:75) voor dat aandag gegee moet word aan die verbetering van leerders se motivering (kyk 2.5.1) en houding (kyk 2.5.2) teenoor wiskunde.

Ball (1990: 461, 462) beweer dat daar 'n onderlinge verwantskap is tussen leerders se konseptuele kennis van wiskunde (kyk 2.5.5) en hulle houdings (kyk 2.5.2) en oortuigings (kyk 2.5.1) ten opsigte van hulself en wiskunde. Die wyse waarop hulle probleme aanpak, word medebepaal deur hulle selfvertroue, hulle repertoire van probleemoplossingstrategieë (kyk 2.5.6), dit wat hulle onthou van verwante konsepte en hulle motivering om 'n probleem op te los. Hierdie faktore vorm die basis van die manier waarop hulle deelneem aan wiskunde en wiskunde beleef en is nie 'n aparte affektiewe dimensie, genoem "houding" nie. Schoenfeld (1989:349) beweer ook dat leerders se vorige ervarings die kwaliteit van hulle benadering tot leer, asook hulle houding teenoor, en uitkomst in die leer van wiskunde beïnvloed.

Uit die voorafgaande behoort dit duidelik te wees dat verskillende faktore, waaronder begripsvorming en onderrig- en leerbenaderings 'n invloed op die betekenisvolle leer van wiskunde uitoefen. Vir die doel van hierdie studie is die volgende interafhanklike faktore van wesenlike belang in die leer van wiskunde: leerders se wiskundekennis, probleemoplossing,

leeromgewing en -milieu, houdings teenoor en oortuigings ten opsigte van wiskunde, leerders se wiskundige ingesteldheid, wiskunde-angs en die onderrig wat leerders ontvang.

2.5.1 Leerders se oortuigings

Oortuigings word gedefinieer as die individu se begrip en gevoelens wat die wyse bepaal waarop hy konseptualiseer en betrokke raak in wiskundegedrag (Schoenfeld, 1992:358). Onderskeid word getref tussen beskouings wat leerders het aangaande *wiskunde*, aangaande *hulleself* as wiskundeleerders en aangaande die *sosiale konteks* van die wiskundeklas (kyk 2.5.2)(Op't Eynde, De Corte & Verschaffel, 2002:27).

Oortuigings aangaande wiskunde-onderwys:

Leerders se oortuigings ten opsigte van wiskunde word in 'n groot mate gevorm deur hulle ervarings in die klaskamer (Grootenboer, 2003:7) en hierdie oortuigings vorm weer hulle gedrag met kragtige en dikwels negatiewe gevolge (Schoenfeld, 1992:359). Leerders se oortuigings vind ook neerslag in die wyse waarop hulle wiskundetake en -probleme benader (Op't Eynde *et al.*, 2002:29). 'n Leerder se oortuiging van wiskunde en wiskundekennis is ook nou verwant aan hoe hy wiskunde-leer aan die een kant, en wiskunde-onderrig aan die ander kant sien (Hofer & Pintrich, 1997:116). Hierdie bewering is ook bevestig in 'n studie deur Crawford *et al.* (1994:343) ten opsigte van leerders wat tersiêre onderwys betree, naamlik dat leerders se beskouings oor wiskunde gevorm word deur hulle benadering tot leer, en hulle beskouing oor wiskunde vorm weer hulle benadering tot leer. 'n Leerder se oortuiging aangaande wiskunde gaan bepaal hoe hy kies om 'n probleem te benader, watter tegnieke hy gaan gebruik en hoe lank en met hoeveel deursettingsvermoë hy die probleem gaan aanpak. Hierdie oortuigings bepaal in noue wisselwerking met mekaar en met leerders se voorkennis hulle leer van wiskunde en probleemoplossing in die klas (Pehkonen & Pietilä, 2003:1). Oortuigings is verwant aan leer (Garofalo, 1989:502; Schoenfeld, 1985:45; Underhill, 1988:58), en dit kan 'n betekenisvolle invloed hê op wat leerders in die klas doen (Nickson, 1992:110). Verder kan negatiewe oortuigings teenoor wiskunde ook in wiskunde-angs manifesteer (kyk 2.5.3)(Uusimaki & Nason, 2004:369).

Schoenfeld (1992: 359) lig 'n paar tipiese leerder-oortuigings uit wat in die literatuur voorkom:

- Wiskundeprobleme het net een regte antwoord;
- Daar is net een regte manier om die probleem op te los - gewoonlik die reël wat die onderwyser die mees onlangse aan die klas voorgehou het;
- Gewone leerders kan nie verwag om wiskunde te verstaan nie; hulle kan dit slegs wat hulle geleer het, memoriseer en meganies sonder enige begrip toepas;
- Wiskunde is 'n aktiwiteit wat in isolasie deur individue gedoen word;
- Leerders wat die wiskunde wat hulle geleer het, verstaan, sal enige probleem binne vyf minute of minder kan oplos;
- Die wiskunde wat op skool geleer word, het min of niks te doen met die wêreld daarbuite;
- Formele bewysvoering is irrelevant tot die prosesse van ontdekking en uitvinding;
- Wiskunde is reëlgebaseer en die leer van wiskunde behels memorisering.

Alhoewel leerders van die standpunt uitgaan dat wiskunde jou help om logies te dink, en dat wiskunde homself tot kreatiwiteit leen, glo hulle tog dat wiskunde die beste geleer word deur memorisering, in welke geval hulle doen soos hulle glo. Selfs al presteer leerders in wiskunde, het hulle bepaalde volgehoue wanvoorstellings van wiskunde, probleemoplossing en spesifieke inhoude (Underhill, 1988:58). Sulke oortuigings mag leerders daarvan weerhou om te verstaan dat daar alternatiewe strategieë en benaderings vir wiskundeprobleme, verskillende maniere om konsepte te definieer, en verskillende maniere van bewysvoering is. Die gevolg hiervan is dat hulle betekenisvolle aspekte van wiskunde-ervarings, soos die formulering van hulle eie vrae, die raaksien van verwantskappe en die toets van afleidings of reëls, mis (Ponte *et al.*, 1992:2). Die stap-vir-stap algoritmiese benadering wat ontwerp is vir die bemeestering van die vak, het die nadelige gevolg dat leerders hulleself as die passiewe verbruikers van iemand anders se wiskunde sien (Schoenfeld, 1989:341).

Leerders se oortuigings ten opsigte van wiskunde beïnvloed hulle vermoë om nie-roetine-probleme op te los (Silver, 1985:255; Schoenfeld, 1985: 43). Alhoewel leerders basiese kennis van algebraïese- en meetkundekonsepte het, is hulle nie in staat om hierdie kennis in probleemoplossingsituasies toe te pas nie, en verstaan hulle ook nie die strukture onderliggend aan hierdie wiskundekonsepte en -vaardighede nie (Brown *et al.*, 1988: 346-347).

Leerders se oortuigings ten opsigte van wiskunde en die leer daarvan kan 'n groot invloed op hulle belangstelling in wiskunde, hulle genieting daarvan, asook hulle motivering hê (Kloosterman, 2002:247). Hierdie oortuigings sluit die oortuigings in wat leerders het aangaande produktiewe en teenproduktiewe leerstrategieë in wiskunde. Leerders se beskouing oor wiskunde, asook hul motivering, lei tot beduidende verskille in oortuiging ten opsigte van die leer van wiskunde. Leerders wat wiskunde as iets daarbuite sien, neig om ingesteldhede te ontwikkel wat memorisering en algoritmiese leer koester, en lê klem op korrekte antwoorde wat in 'n kort tydjie verkry is. Daarteenoor neig leerders wat wiskunde as 'n produk van hulle eie ontdekking sien, om meer proses-georiënteer te wees - hulle put bevrediging uit die ontdekking van verwantskappe en benader die leer van wiskunde vanuit 'n konseptuele perspektief. Hierdie leerders sal 'n aansienlike tyd aan probleme spandeer as gevolg van die intrinsieke waarde wat hulle ervaar in die vind van verwantskappe en nuwe, persoonlike ontdekkings (Underhill, 1988: 61).

Oortuigings aangaande wiskunde-onderrig bestaan uit leerders se siening van wat effektiewe onderrigstrategieë is. Vanuit 'n tradisionele raamwerk glo leerders byvoorbeeld dat wiskunde oor bewerkings en algoritmes gaan (Cobb *et al.*, 1992:589; Underhill, 1988:61); dat die taak van die onderwyser is om wiskundekennis oor te dra en om seker te maak dat die leerders daardie kennis ontvang het. Die rol van die wiskundeleerder is weer om daardie wiskundekennis te ontvang en te demonstreer dat hy dit verstaan (Frank, 1988:33). Leerders se kennis en oortuigings is dikwels moeilik onderskeibaar. Wanneer wiskunde voorgestel word as 'n liggaam van kennis wat oorgedra moet word, ervaar leerders dit op daardie manier - deur die memorisering van feite en prosedures (Underhill, 1988:58). Hulle maak nie wiskunde hulle eie nie. Vanuit 'n konstruktivistiese raamwerk word die onderwyser eerder as 'n fasiliteerder van leer gesien. Die tyd wat so 'n onderwyser aan "lesings" spandeer, is beperk (Kloosterman, 1996:139). Dit sou egter in stryd wees met 'n leerder se tradisionele siening van wiskunde, waar die onderwyser beskou word as die bron van antwoorde wat net reg of verkeerd is (Kloosterman, 1996:140) en dit mag leerders aan die waarde van wiskunde of die integriteit van die onderwyser laat twyfel (Nickson, 1992:110).

Oortuigings aangaande die self

Leerders se oortuigings aangaande die self in verhouding tot wiskunde staan ook bekend as motiveringsoortuigings (Op't Eynde *et al.*, 2002:30; Pintrich, 2002:462). 'n Leerder se motivering word bepaal deur sy verwagtings rondom prestasie in wiskunde en sluit in sy

selfdoeltreffendheidsoortuigings, selfkonsep, verwagting rondom sukses en waargenome beheer in 'n situasie. Motivering word ook bepaal deur die waarde wat leerders aan prestasie heg, hulle oortuigings aangaande die belangrikheid van, belangstelling in en bruikbaarheid van 'n bepaalde taak (Pintrich, 1999:462; Mousoulides & Philippou, 2005:323), en die doel agter of die rede vir hulle prestasie (doelwit-georiënteerde oortuigings) (Op't Eynde *et al.*, 2002:30; Mousoulides & Philippou, 2005:321-322). Leerders sal nie gemotiveer wees om die onmoontlike aan te pak nie; dus sal hulle nie doelwitte nastreef wat onbereikbaar lyk nie. Selfs 'n positiewe uitkomsverwagting sal hulle nie tot aksie laat oorgaan as hulle nie waarde aan die taak heg nie (Schunk, 1991:211).

Bandura (1986:391) definieer *selfdoeltreffendheid* as leerders se oordeel van hulle eie vermoëns om bepaalde aksies te organiseer en uit te voer met die oog op die bereiking van 'n bepaalde prestasie. Selfdoeltreffendheid korreleer ook positief met wiskundeprestasie en houding teenoor wiskunde (Hackett & Betz, 1989:262) en is 'n beter voorspeller vir sukses in probleemoplossing as selfkonsep, waargenome bruikbaarheid van wiskunde en vorige ervaring met wiskunde (Pajares & Miller, 1994:193). Die voorspellingswaarde van wiskunde-selfdoeltreffendheid ten opsigte van toekomstige wiskundeprestasie is ook deur Pietsch, Walker en Chapman (2003:598) bevestig. Selfdoeltreffendheid korreleer ook positief met selfgereguleerde leer (kyk 2.5.7). Leerders wat glo dat hulle kan leer en vertrou het in hulle vaardighede, is meer geneig om selfregulerende strategieë te gebruik (Pintrich, 1999:467).

Selfkonsep word gedefinieer as die leerder se kollektiewe waarnemings oor homself wat (a) gevorm word deur ervaring met, en interpretasie van die omgewing en (b) grootliks beïnvloed word deur versterkings en evalueringe deur betekenisvolle ander persone (Bandura, 1986:409). Verskeie studies toon dat oortuigings oor die self 'n merkbare verwantskap met sukses in wiskunde toon (Hannula & Malmivuori, aangehaal deur Hannula *et al.*, 2004:18). Om egter 'n oorsaaklike verwantskap tussen selfkonsep en prestasie te bepaal is nie so maklik nie. Waar die verwantskap aanvanklik gedurende die vroeë skooljare vanaf prestasie na selfkonsep verskuif, verander dit later in 'n omgekeerde verwantskap. Chapman *et al.* (aangehaal deur Hannula *et al.*, 2004:18) beweer dat hierdie verwantskap in die later hoërskooljare in die rigting van die selfkonsep na prestasie is.

Schunk (1991: 211) en McLeod (1992:583) sien *selfvertroue* as 'n leerder se oortuigings dat hy oor die vermoë beskik om resultate te lewer, doelwitte te bereik en take met bekwaamheid uit te voer. Galbraith en Haines (1998: 278) beweer dat leerders met

wiskunde-selfvertroue glo dat hulle inspanning en harde werk nie verniet is nie; hulle gee nie om om moeilike probleme aan te pak nie; hulle verwag om goeie resultate te kry en voel in die algemeen goed oor wiskunde as 'n vak. Navorsing op die gebied van selfkonsep en –vertroue in die leer van wiskunde dui aan dat daar noemenswaardige verskille tussen seuns en meisies is. In die algemeen neig seuns om meer selfvertroue as meisies te hê, selfs al het meisies meer rede tot selfvertroue as gevolg van hulle prestasie (Fennema, 1989:211). Daar blyk 'n taamlike direkte invloed van selfvertroue op wiskundeprestasie te wees, veral wat betref nie-roetine probleemoplossing (McLeod, 1989:247). Dit lyk asof sukses in probleemoplossing die oortuiging aanwakker dat jy wel probleme kan oplos, en dit lei weer tot 'n toename in selfvertroue, wat positief korreleer met wiskundeprestasie (Fennema, 1989:206). Volgens Kloosterman (1988:350) sal leerders met 'n groter mate van selfvertroue meer geneig wees om sukses toe te skryf aan vermoë, en mislukking aan 'n gebrek aan insette.

Leerders verskil in die mate waarin hulle glo dat uitkomst (a) onafhanklik van hulle eie insette gebeur, en te wyte is aan geluk, toeval, noodlot (*eksterne beheer*) of (b) grootliks afhanklik is van hulle eie dade (*interne beheer*) (Schunk, 1991: 209; Maree & Schoeman, 1997: 129). 'n Verwante konstruk is dié van aangeleerde hulpeloosheid - 'n oortuiging dat sukses nie aan inspanning toegeskryf kan word nie, terwyl mislukking aan 'n gebrek aan vermoë toegeskryf word (Diener & Dweck, 1978:451). So 'n oortuiging is die gevolg van voortdurende mislukking (Dossel, 1993:5). Leerders sal gemotiveerd wees om te leer indien hulle hul sukses of mislukking aan inspanning, of die gebrek daaraan, toeskryf, eerder as aan faktore buite hulle beheer, soos vermoëns, geluk of ander persone (Wittrock, 1986:305).

2.5.2 Leerders se houdings

Verskeie studies het aangetoon dat 'n leerder se houding teenoor wiskunde 'n belangrike rol in die leer van wiskunde speel (Lester, Garofalo & Kroll, 1989:76; Ma, 2003: 459; Amato, 2004:2-31). Neale (1969:632) en Alkhateeb en Hammoudi (2006:116) definieer houdings teenoor die leer van wiskunde as 'n veelvlakkige konstruk wat 'n voorliefde vir of afkeer van wiskunde beskryf, 'n neiging om betrokke te raak in wiskunde-aktiwiteite of dit te vermy, 'n oortuiging dat jy goed of sleg is in wiskunde, en 'n oortuiging dat wiskunde nuttig of nutteloos is. Houdings kan as die response van leerders op hulle oortuigingsisteme beskou word, dit wil sê oortuigings manifesteer in houdings (Liljedahl, 2005:221). 'n Oortuiging dat wiskunde

slegs uit formules bestaan, kan in 'n houding van geringskatting van verduidelikings manifesteer in afwagting vir die uiteindelijke aanbieding van die formule deur die onderwyser.

Houdings word in die algemeen van oortuigings onderskei deurdat houdings na affektiewe response verwys wat positiewe of negatiewe gevoelens van matige duur, intensiteit en stabiliteit behels (McLeod, 1992:581). Houdings teenoor wiskunde blyk op twee verskillende maniere te ontwikkel as gevolg van die outomatisering van 'n herhaalde emosionele reaksie teenoor wiskunde. As 'n leerder byvoorbeeld herhaalde negatiewe ervarings met meetkunde-bewyse het, sal die emosionele impak met verloop van tyd in intensiteit afneem. Uiteindelik sal die emosionele reaksie teenoor meetkunde-bewyse meer outomaties en stabiel word. 'n Tweede bron van houdings is die toeken van 'n alreeds bestaande houding aan 'n nuwe, maar verwante taak. 'n Leerder wat byvoorbeeld 'n negatiewe houding teenoor meetkunde-bewyse het, sal dieselfde negatiewe houdings teenoor bewyse in algebra openbaar (McLeod, 1992:581). Navorsing toon ook dat prestasie en houding nie afhanklik is van mekaar nie, maar dat dit op komplekse en onvoorspelbare maniere met mekaar in interaksie is (McLeod, 1992:582).

Dit is nie 'n onbekende verskynsel dat leerders hulle skoolloopbaan normaalweg begin met positiewe houdings teenoor wiskunde, wat neig om minder positief te word namate hulle deur hulle skoolloopbaan vorder nie. Hierdie houdings word dikwels negatief op hoërskool (McLeod, 1992:576). Dit blyk dat die druk wat op leerders uitgeoefen word om dikwels bo hulle vermoë te presteer, saam met onkreatiewe onderrig en nie-positiewe onderwys-erhoudings, 'n destruktiewe impak op leerders se houding teenoor wiskunde het (Philippou & Christou, 1998:191). Tydens leerders se toetrede tot hulle hoërskooljare het onderwysers 'n gulde geleentheid én die verantwoordelikheid om 'n positiewe houding teenoor wiskunde by leerders, en daarmee saam hulle prestasie, te bevorder (Ma & Kishor, 1997:41). Nicolaidou en Philippou (2003:9) het in 'n studie gevind dat daar betekenisvolle korrelasies tussen die houding teenoor wiskunde, selfdoeltreffendheid en prestasie is, alhoewel die korrelasie sterker is tussen selfdoeltreffendheid en prestasie as tussen houding teenoor wiskunde en prestasie. Dit blyk dus dat leerders met 'n positiewe houding teenoor wiskunde hoë selfdoeltreffendheidsoortuigings het ten opsigte van 'n bepaalde veld, en ook beter presteer. Soortgelyk het houding teenoor wiskunde en selfdoeltreffendheid ook voorspellingswaarde vir prestasie. 'n Studie deur Alkhateeb en Hammoudi (2006:118) toon dat daar 'n positiewe korrelasie tussen positiewe houdings teenoor wiskunde en 'n diep benadering tot die leer van wiskunde is.

Volgens Pierce *et al.* (2007:286) speel oortuigings 'n belangrike rol in die leer van wiskunde: in die algemeen word positiewe houdings, oortuigings en intrinsieke motivering in toenemende ywer in leer en groter deursettingsvermoë van die leerder se kant gereflekteer. Aangesien veral houdings beïnvloed kan word deur onlangse ervarings, kan 'n reeks ervarings wat positiewe of negatiewe houdings bevorder, bydra tot meer blywende houdings en selfs oortuigings wat diep gesetel is en 'n groot invloed op toekomstige gedrag het (Pajares, 1992:307).

2.5.3 Leerders se wiskunde-angs

Wiskunde-angs word gewoonlik gedefinieer as 'n gevoel van spanning en angs (Southwell, White, Way, Perry, 2005:2) en 'n vrees vir mislukking, wat wiskundeprestasie beïnvloed (Uusimaki & Kidman, 2004a:7). Wiskunde-angs kan ook beskryf word as 'n aangeleerde emosionele respons (Le Moyne College, 1999:1) of as 'n algemene gebrek aan gemak wat manifesteer in paniek, hulpeloosheid, magteloosheid, verwarring en 'n verlies aan die vermoë om te konsentreer wanneer van 'n leerder vereis word om wiskundetake uit te voer (Trujillo & Hadfield, 1999:2; Wood, 1988:11). Bessant (1995:327) gebruik wiskunde-angs as 'n oorkoepelende term vir toetsangs, lae selfvertroue, vrees vir mislukking en negatiewe houdings teenoor die leer van wiskunde. Gevoelens van angs, vrees en skaamte is nie voorlopers van die probleme wat leerders in wiskunde ervaar nie, maar kom voor as gevolg van blootstelling aan wiskunde-onderrig. Bandalos, Yates en Thorndike-Christ (1995:620) beweer dat wiskunde-angs nie veroorsaak word deur die doen van wiskunde nie, maar dit blyk nou verwant te wees aan toetsangs. Wiskunde-angs kom gewoonlik voor wanneer die individu geëvalueer word, of ervaar dat hy geëvalueer word (Wood, 1988:10). Leerders rapporteer byvoorbeeld dat hulle wiskunde in die klas verstaan en wanneer hulle huiswerktake doen, maar wanneer hulle toets of eksamen skryf, oorval paniek hulle en kan hulle nie na hulle volle potensiaal presteer nie (Perry, 2004:1). Alhoewel Hembree (1990:44) bevind het dat wiskunde-angs 'n negatiewe uitwerking op prestasie het, het Ma (1999:536) 'n dinamiese, wisselende verwantskap tussen wiskunde-angs en wiskundeprestasie gevind: leerders se sosiale en akademiese agtergrond bepaal die uitwerking wat wiskunde-angs op hulle prestasie gaan hê. Wiskunde-angs kan prestasie óf fasiliteer, óf negatief beïnvloed óf geen verwantskap met wiskundeprestasie hê nie.

In 'n studie ten opsigte van wiskunde-oortuigings kom Frank (1990:10) tot die gevolgtrekking dat voornemende onderwysers baie van die oortuigings aangaande wiskunde met mense

deel wat aan ernstige wiskunde-angs ly. Wiskunde-angs het nie 'n enkele oorsaak nie, maar is die resultaat van verskillende faktore in wisselwerking met onaangename ervarings (Kogelman & Warren, 1978:20). Baie van die negatiewe gevoelens wat leerders ten opsigte van wiskunde het, is verwant aan sogenaamde wiskundemites (Kogelman & Warren, 1978:30-43)(kyk 2.5.1). Die oorsake van wiskunde-angs kan hoofsaaklik in drie areas verdeel word, naamlik omgewingsfaktore, intellektuele faktore en persoonlikheidsfaktore (Hadfield & McNeil, 1994:2). *Omgewingsfaktore* sluit in negatiewe ervarings in die klaskamer, druk van gesagsfigure en onsensitiewe onderwysers. Tydsdruk dra ook tot wiskunde-angs by vir die leerder wat swakker presteer, of stadiger dink. Die indruk dat 'n vinnige antwoord gegee moet word, lei tot 'n paniek-reaksie. Dit is deel van die mite dat wiskundiges probleme "vinnig" kan doen, of met behulp van hoofrekenre (kan) oplos (Kogelman & Warren, 1978:39). Baie onderwysers verval in 'n onderrig-siklus van die verduideliking van 'n probleem, en leerders moet die probleme vervolgens inoefen en algoritmes memoriseer. Hierdie onderrigbenadering van verduidelik-inoefen-memoriseer word deur Steele en Arth (1998: 2) as een van die hoofoorsake van wiskunde-angs beskou. Wiskunde wat aangebied word asof dit uit 'n stelsel outoritêre reëls bestaan wat die leerder nie verstaan nie dra by tot angs, aangesien dit 'n gebrek aan kontrole impliseer (Dossel, 1993:5). Wanneer leerders nie verwantskappe tussen verskillende wiskundekonsepte, of die verwantskap tussen wiskunde en 'n lewenswerklike konteks raaksien nie, val hulle terug op memorisering. Wanneer wiskunde dus sonder betekenis onderrig word, word leerders gedwing om onverwante brokkies inligting te memoriseer (kyk 2.4) (Cornell, 1999:4; Steele & Arth, 1998:2). Wanneer leerders wat reeds negatiewe houdings jeens wiskunde openbaar, verplig is om wiskunde te neem, is memorisering dikwels die enigste uitweg wat hulle sien. Met uiterste inspanning is dit moontlik om vir 'n kort rukkie bepaalde reëls en stellings te onthou, maar agterna vergeet leerders dit weer maklik. Leerders ervaar gevolglik chroniese frustrasie (Perry, 2004:2). "What is learned unrelatedly, does not last long" (Freudenthal, 1973:77). Met memorisering bly die detail en simbole vreemd, betekenisloos en boesem hulle vrees in. Dit lei tot verdere onsekerheid en angs, en uiteindelik gee leerders bes (Kogelman & Warren, 1978:28). In sulke gevalle ervaar leerders dikwels vernedering in die klaskamersituasie, en hierdie verleentheid dra verder tot onaangename wiskunde-ervarings by (Grootenboer, 2003:5).

Intellektuele faktore wat 'n invloed op wiskunde-angs het, sluit in die leerder se houding, gebrek aan deursettingsvermoë, selftwyfel, die leerder se gebrek aan selfvertroue in

wiskunde en 'n gebrek aan die bruikbaarheid van wiskunde wat 'n leerder ervaar (Cornell, 1999:3; Trujillo & Hadfield, 1999:2; Miller & Mitchell, 1994:2). Botsende leerstyle is 'n verdere bydraende faktor tot wiskunde-angs. Quilter en Harper (1988:127) vind dat blootstelling aan instrumentele of prosedurele leer en 'n gebrek aan relevansie twee betekenisvolle faktore is wat wiskunde vir die leerder bemoeilik. Die waargenome rigiditeite van wiskunde is in konflik met die denkstyle van leerders wat wiskunde op 'n konseptuele manier leer. Wanneer wiskunde as 'n stel rigiede, onbuigsame reëls beleef word en die gevoel word deur 'n onderwyser versterk, kan dit tot verwerping en selfs vermyding van die vak lei (Kogelman & Warren, 1978:27).

Persoonlikheidsfaktore wat moontlik tot wiskunde-angs kan bydra, sluit in onwilligheid om vrae te vra as gevolg van skaamte, en 'n lae selfbeeld (Trujillo & Hadfield, 1999:2). Die moontlikheid dat leerders "dom" mag voorkom in die klas, versterk gevoelens van angs. Die leerder met minder selfvertroue ervaar dit as intimiderend. Kompeterende klaskamers beklemtoon net verder die verlies aan beheer vir die swakker presteerder, aangesien die gesagsfiguur, die onderwyser, in beheer is. Daarteenoor lyk dit asof die sterker leerders in beheer van hulle situasie is, aangesien hulle sukses behaal (Dossel, 1993:6).

Behalwe vir die feit dat dit belangrik is dat leerders hulle negatiewe houdings en angs ten opsigte van wiskunde ondersoek sodat hulle kan agterkom wat die oorsprong daarvan is (Perry, 2004:3; Steele & Arth, 1998:3), word daar in die literatuur verskeie maniere voorgestel waarop onderwysers wiskunde-angs kan voorkom en verminder. Brady en Bowd (2005:44) propageer beter onderrigpraktyke op skool en in die opleiding van voornemende onderwysers deur onder ander van probleemoplossingsaktiwiteite en die skep van lewenswerklike of realistiese kontekste gebruik te maak (kyk 2.3.4)(Cornell, 1999:4; Vinson, 2001:91) wat tot die betekenisvolle leer van wiskunde sal lei (kyk 2.4). Beter onderrigpraktyke behels onder andere 'n klemverskuiwing vanaf inhoud-gebaseerde transmissie-onderrig na onderrig met die fokus op konseptuele begrip van wiskunde (Fiere, 1999:3; Vinson, 2001:91). Sonder konseptuele begrip argumenteer Vinson (2001:89) dat bevoegdheid in wiskunde afneem en tot 'n toename in wiskunde-angs lei. In 'n studie bevind Vinson (2001:93) dat nie net skoolleerders nie, maar ook voornemende onderwysers wiskundekonsepte beter verstaan as dit op 'n konkrete en realistiese wyse aangebied word:

As an effect: what they understand, they are able to teach. What they are able to teach effectively will reduce the anxiety levels of their future students.

Ander voorstelle wat gemaak word om wiskunde-angs te verminder is die akkommodering van verskillende leerstyle (Fiore, 1999: 3), die gebruik van alternatiewe assesseringstegnieke (Miller & Mitchell, 1994:4; Steele & Arth, 1998:4; Woodard, 2004:2), die gebruik van tegnologie (kyk 2.5.8)(Iossi, 2007:32) en die skep van 'n aangename atmosfeer en positiewe leeromgewing waarin leerders aangemoedig word om vrae te vra en deel te neem in die klas (Fiore, 1999:3) en nie bedreig voel om antwoorde te gee of in die verleentheid gestel word nie (Woodard, 2004:2). Positiewe leeromgewings kan verder gekweek word deur onderwysers wat fokus op hoe en wat leerders dink, eerder as op die korrekte antwoord (Steele & Arth, 1998:2) en wat leerders aanmoedig om hul denkprosesse te deel en regverdiging vir hul antwoorde te bied (Furner & Berman, 2003:172).

Onderwysers behoort ook die belangrikheid van oorspronklike, kreatiewe denke te beklemtoon eerder as die manipulerings van formules en memorisering (Brady & Bowd, 2005:44; Steele & Arth, 1998:2). Wiskunde-onderrig moet meer op probleemoplossing as op die uitvoer van berekeningsprosedures en regte en verkeerde antwoorde fokus (Furner & Berman, 2003:172). Koöperatiewe leer laat leerders ook besef dat ander dieselfde probleme in wiskunde as hulle ervaar en dat die probleme deur hulp en deursettingsvermoë opgelos kan word (Woodard, 2004:2). Cornell (1999:4) beklemtoon ook die gedagte van groepwerk waardeur individuele motivering verhoog en geleenthede vir alternatiewe leer- en onderrigstyle soos portuurgroep-onderrig en -assessering gebied word.

Met inagneming val al bogenoemde voorstelle is dit van die uiterste belang dat onderwysers bedag sal wees op die houding teenoor wiskunde wat hulle na die leerders projekteer, aangesien onderwysers wat wiskunde-angs het, geneig is om hulle angs na hulle leerders oor te dra (Brady & Bowd, 2005: 44).

2.5.4 Leerders se wiskundige ingesteldheid

Navorsers poog om die interverwante invloed van die (meta)kognitiewe, konatiewe en affektiewe faktore op wiskundeleer en -probleemoplossing vas te vang, in lyn met die gedagte van 'n wiskundige ingesteldheid (Op't Eynde *et al.*, 2002:14). So 'n ingesteldheid

verwys na die bemeestering van die volgende aspekte (De Corte, Verschaffel & Op't Eynde, 2000: 689):

- 'n goed georganiseerde, buigsame en toeganklike kennisbasis wat insluit die feite, simbole, algoritmes, konsepte en reëls wat die boustene van wiskunde as vakgebied is;
- heuristiese metodes, dit is probleemoplossingstrategieë, wat die waarskynlikheid van 'n korrekte oplossing betekenisvol laat toeneem;
- meta-kennis, wat kennis aangaande jou eie kognitiewe funksionering (metakognitiewe kennis) en kennis aangaande jou motivering en emosies behels;
- wiskunde-verwante oortuigings, soos hierbo gedefinieer;
- selfreguleringsvaardighede (kyk 2.5.7), wat insluit selfregulering van kognitiewe prosesse (metakognitiewe vaardighede of kognitiewe selfregulering) aan die een kant, en van jou wilsprosesse (of selfregulering van die wil) aan die ander kant

Om bevoegde probleemoplossers te word wat toegerus is om wiskunde probleme in verskillende kontekste te herken en aan te pak is dit vir leerders nodig om so 'n wiskundige ingesteldheid te hê (Op't Eynde *et al.*, 2002:14).

Die relevansie van oortuigings en houdings as 'n komponent van 'n sogenaamde wiskundige ingesteldheid, en die impak daarvan op die leer van wiskunde vind weerklank in die *Curriculum and Evaluation Standards*: "These beliefs exert a powerful influence on students' evaluation of their own ability, on their willingness to engage in mathematical tasks, and on their ultimate mathematical disposition" (NCTM, 1989:233). So 'n ingesteldheid is meer as net 'n houding, maar 'n geneigdheid om op 'n bepaalde manier te dink en op te tree. 'n Leerder se ingesteldheid teenoor wiskunde manifesteer in die manier waarop hy take benader – hetsy met selfvertroue, 'n gewilligheid om alternatiewe te ondersoek, deursettingsvermoë en belangstelling, en in sy geneigdheid om op sy eie denke te reflekteer, of nie (NCTM, 1989:233).

2.5.5 Leerders se wiskundekennis

Wiskundekennis is saamgestel uit konseptuele, prosedurele en voorwaarde-kennis (Paris & Cunningham, 1996:134). *Konseptuele kennis* (ook bekend as verklarende kennis of "weet dat"-kennis) is kennis wat ryk is aan verwantskappe en as 'n gekonnekteerde web van kennis

kan beskou word, 'n netwerk waarin die verwantskappe net so prominent is as die losstaande stukkies inligting (kyk 2.4) (Ben-Hur, 2006:3; Hiebert & Lefevre, 1986:3-4). Haapasalo (1993, aangehaal deur Haapasalo & Kadjevich, 2000:141) sien konseptuele kennis as dinamies: dit word gevorm deur die gebruik van verskillende voorstellingsvorme van dieselfde konsep, byvoorbeeld die verbale, grafiese en simboliese voorstelling van 'n funksie (kyk 3.3) en die aktiewe dinamiese prosessering tussen hierdie konsep-eienskappe. Die ontwikkeling van konseptuele kennis word verkry deur die konstruksie van verwantskappe tussen hierdie losstaande stukkies inligting (Galbraith & Haines, 2000:652). Vanuit 'n konstruktivistiese raamwerk (kyk 2.3.3) word aanvaar dat konseptuele kennis verkry word deur nuwe verwantskappe tussen bestaande inligting te skep, of deur bestaande kennis aan nuwe inligting te koppel. Konseptuele kennis word as gekoppelde netwerke van eenhede geberg. Onvoldoende konseptuele kennis beteken dat inligting wat benodig word, nie onttrek sal kan word (geen respons) of dat onvolledige of onakkurate inligting na vore sal kom, omdat inligting verkeerd gekoppel is. Leerders sal byvoorbeeld die inverse van $f(x)$, naamlik $f^{-1}(x)$ verkeerdelik skryf as $\frac{1}{f(x)}$ (Galbraith & Haines, 2000:625).

Prosedurele kennis is om te weet *hoe* om 'n bepaalde prosedure uit te voer, soos die bepaling van 'n funksiewaarde in 'n gegewe punt (kyk 3.3). Prosedurele kennis staan ook bekend as "kennis in aksie" (Woolfolk, 2007:258) of instrumentele kennis (Skemp, 1978:9) en bestaan eerstens uit die formele taal en simbole om wiskundekonsepte voor te stel, asook die kennis van die sintaktiese reëls om hierdie simbole op 'n aanvaarbare wyse voor te stel (Ben-Hur, 2006:3; Hiebert & Lefevre, 1986:6). Alhoewel 'n leerder van die oppervlak-eienskappe van struktuur en vorm bewus is, is daar nie noodwendig sprake van betekenis wat die leerder daaraan heg nie (Hiebert & Lefevre, 1986:6). 'n Tweede deel van prosedurele kennis bestaan uit reëls, algoritmes of prosedures wat aan leerders die vaardigheid gee om wiskundetake of -probleme op te los (Ben-Hur, 2006:3; Hiebert & Lefevre, 1986:6). 'n Belangrike eienskap van prosedures is dat dit in 'n vooraf-bepaalde lineêre volgorde uitgevoer word (Hiebert & Carpenter, 1992: 78; Hiebert & Lefevre, 1986:6).

Voorwaarde-kennis is om te weet *wanneer* en *hoekom* prosedurele en konseptuele kennis toegepas word (Woolfolk, 2007:258). Skemp (1978:9) verwys na hierdie kennis as relasionele kennis. Voorwaarde-kennis help leerders om die toepaslike prosedurele en

konseptuele kennis in probleemsituasies te gebruik (Schunk, 2000:179). Voorwaarde-kennis is ook 'n integrale deel van selfgereguleerde leer (kyk 2.5.7).

Die *Principles and Standards* (NCTM, 2000:20) en Bransford *et al.* (1999:16) beklemtoon die belangrike rol van konseptuele kennis in wiskundig-bevoegde leerders, wat die vermoë behels om konseptuele en prosedurele kennis met gemak te gebruik en om kennis wat in een situasie geleer is, in nuwe situasies toe te pas. Kilpatrick, Swafford en Findell (2001:116) voeg ook *strategiese bekwaamheid* (die vermoë om wiskundeprobleme te formuleer, voor te stel en op te los) en *aanpasbare redenering* (die kapasiteit vir logiese denke, refleksie, verduideliking en regverdiging) by as eienskappe van wiskunde-bevoegdheid. Genoemde eienskappe is verweef en interafhanklik in die ontwikkeling van bevoegdheid in wiskunde. Strategiese bekwaamheid sonder konseptuele begrip en prosedurele kennis is byvoorbeeld nie wenslik, selfs nie eens moontlik nie; terwyl prosedurele kennis en konseptuele begrip sonder strategiese bekwaamheid leerders sonder noodsaaklike wiskundige bevoegdheid laat (Brodie, 2004:70).

Volgens Haapasalo (2003:17) is dit moeilik om te bepaal hoe en in watter volgorde leerders se wiskundekennis in elke situasie en met elke nuwe onderwerp ontwikkel. Selfs die mees abstrakte konsepte kan op leerders se spontane idees gebaseer wees. 'n Gepaste aanname sou wees dat om te *doen*, kognitief en psigologies betekenisvol vir die leerder moet wees. Belangriker nog as om te doen, is om te verstaan wat, hoekom en hoe jy dit doen: "*do I know that, do I know why, and do I know how I know?*"

Die bou van verwantskappe tussen konseptuele en prosedurele kennis gebeur nie altyd spontaan nie. Gefragmenteerde leer en die skynbare afwesigheid van kognitiewe strategieë om prosedurele en konseptuele kennis te koördineer het 'n kragtige negatiewe uitwerking op die leer van wiskunde (Galbraith & Haines, 2000:652). Selfs al word die verwantskappe eksplisiet gestel, word dit nie altyd herken of geïnternaliseer nie.

Vier verskillende moontlikhede (sienings) kom na vore ten opsigte van die verwantskap tussen prosedurele en konseptuele kennis, naamlik:

- *Gelyktydige aksie*: Konseptuele kennis groei uit prosedurele bevoegdheid (Ben-Hur, 2006:4; Baker, Czarnocha & Prabhu, 2004:1). Prosedurele kennis word gesien as 'n noodsaaklike en voldoende voorwaarde vir konseptuele kennis (Haapasalo & Kadijevich, 2000:145; Hiebert & Carpenter, 1992:78). Konseptuele kennis is ook noodsaaklik en

voldoende vir die korrekte gebruik van prosedures. As hoë vlakke van konseptualisering dus bestaan, sal prosedures korrek uitgevoer word. As 'n leerder oor onvoldoende konseptuele kennis beskik, sal prosedures verkeerd uitgevoer word (Byrnes & Wasik 1991:778). Volgens hierdie siening maak leerders 'n verskeidenheid van berekeningsfoute omdat wiskundesimbole vir hulle betekenisloos is (Byrnes & Wasik, 1991:784). Die nodige konseptuele kennis kan nie geaktiveer word nie, omdat dit ontbreek. Volgens Baker *et al.* (2004:1) moedig hierdie tradisionele benadering gewoonte leer (*rote learning*) van prosedurele kennis aan en lei dit tot 'n gebrekkige begrip van die verwantskap tussen konsepte en prosedures.

- Die *dinamiese interaksie*-siening: Leer is 'n geleidelike herkonseptualisering wat plaasvind wanneer prosedurele kennis op reeds bestaande idees toegepas word (Ben-Hur, 2006: 4). Konseptuele kennis is 'n noodsaaklike, maar nie voldoende voorwaarde vir prosedurele kennis nie (Haapasalo & Kadjevich, 2000:145). Konseptuele kennis vorm 'n basis waaruit nuwe prosedures aangeleer word. Konseptuele kennis word dikwels verryk wanneer leerders probeer om die resultaat van prosedures te verstaan. Alhoewel konseptuele kennis dus die konstruksie van nuwe kennis moontlik maak, lewer die toepassing van prosedures dikwels resultate wat verduidelik moet word. In 'n poging om die resultate te verduidelik word konseptuele kennis verryk (Byrnes & Wasik, 1991:778).
- *Genetiese siening*: Prosedurele kennis is 'n noodsaaklike, maar nie voldoende voorwaarde vir konseptuele kennis nie (Haapasalo & Kadjevich, 2000:146; Gray & Tall, 1993:7-8; Sfard, 1994:48). As gevolg van die onderskeid tussen prosedurele en konseptuele kennis kan goeie prosedurele kennis gedemonstreer word met afwesige of baie beperkte konseptuele kennis, wat 'n mate van getuigenis vir die genetiese siening lewer (Shimizu, 1996:233).
- *Onaktiewe siening*: Daar is nie 'n verwantskap tussen prosedurele en konseptuele kennis nie (Haapasalo & Kadjevich, 2000:145). Hierdie siening word deur Nesher (1986:6) onderskryf, wat beweer dat begrip nie noodwendig prosedurele kennis verbeter nie.

Tall en Razali (1993:12) toon aan dat suksesvolle leerders beter daarin slaag om aangeleerde prosedures in konseptuele kennis te kristalliseer. Hulle is dus in staat om hierdie konsepte met groter vloeiendheid te manipuleer as minder suksesvolle leerders wat op die prosedurele vlak beweeg. Suksesvolle leerders is ook meer geneig om verwantskappe raak te sien en tussen die gekristalliseerde konsepte verbindings te maak, aangesien

hierdie nuwe inligting hulle bestaande kennis versterk en vereenvoudig deur die nuwe kennis in 'n verbeterde kennisstruktuur te plaas (Tall & Razali, 1993:13). Hulle kennis is dus meer effektief "genetwerk" as die swakker leerders wat 'n groter geheue las ervaar omdat hulle verkies om met aparte stukkies inligting te werk (Galbraith & Haines, 2000:653). Deurdat die minder suksesvolle leerders op geroetineerde prosesse staatmaak, is hulle minder geneig om konsepte op 'n betekenisvolle wyse te verbind (Tall & Razali, 1993:13).

Haapasalo en Kadijevich (2000:148) en Haapasalo (2003:7) beklemtoon dat die teenwoordigheid van metakognisie (kyk 2.5.7) van kardinale belang is vir die ontwikkeling van konseptuele kennis, en om hierdie rede is die verkryging van prosedurele kennis in die algemeen meer toeganklik vir leerders as konseptuele kennis.

2.5.6 Probleemoplossing

Shuell (1990:102) definieer probleemoplossing as 'n doelgerigte aktiwiteit wat 'n aktiewe soeke na en ontginning van moontlike alternatiewe aksies verg, asook besluitneming oor watter handelwyse om te volg. Behalwe dat die probleemoplosser die lewensvatbaarheid van verskillende alternatiewe oorweeg en die effektiwiteit van die gekose alternatief verifieer deur dit te toets, beklemtoon Lesh en Zawojewski (2007:782) in hulle definisie van probleemoplossing die gedagte van 'n produktiewe denkwyse, wat beteken dat die probleemoplosser die situasie wiskundig moet interpreteer, oftewel modelleer. Dit behels verskeie herhalende siklusse van uitsortering, integrering, verandering, hersiening of verfyning van wiskundekonsepte. Wiskunde-probleemoplossing behels dus om situasie wiskundig te interpreteer, te beskryf en te verduidelik en nie slegs die uitvoer van reëls, prosedures en vaardighede nie. Hierdie definisie sluit die gedagte in dat wiskunde deur probleemoplossing geleer word en dat probleemoplossing geleer word deur wiskunde te skep (wiskundige modelle), wat aansluit by die *Principals and Standards* se tweeledige doelwit van probleemoplossing (NCTM, 2000:52). Wiskunde probleme bied die geleentheid vir die toepassing van beide konseptuele en prosedurele kennis, aangesien probleemoplossing die toepassing van beide soorte kennis vereis (Silver, 1986:191). Dit blyk veral waar te wees wanneer die leerder eers die probleemsituasie moet verstaan voordat hy dit kan oplos.

Polya (1957: 5-6) beskryf vier fases in die probleemoplossingsproses, wat ook as probleemoplossingstrategieë beskou kan word:

- i) *Verstaan die probleem*: die leerder moet die bekendes en die onbekendes in die probleem kan identifiseer en seker maak dat daar genoegsame inligting is;
- ii) *Formuleer 'n plan*: die leerder moet 'n verband tussen die inligting wat gegee word en die onbekende raaksien. Daar kan selfs subprobleme geformuleer word as daar nie dadelik 'n verband raakgesien kan word nie;
- iii) *Uitvoer van die plan*: die plan wat in die vorige fase geformuleer is, moet nou uitgevoer word, en elke stap moet noukeurig nagegaan word;
- iv) *Terugkyk*: Die leerder moet reflekteer oor die oplossing, asook die redelikheid daarvan.

Dit mag voorkom asof Polya se fases in 'n lineêre orde voorkom. 'n Meer dinamiese, sikliese interpretasie van Polya se fases word deur Wilson, Fernandez en Hadaway (1993:61-62) voorgestel. 'n Leerder kan met 'n probleem begin deur daaroor te dink. In die formulering van die plan mag die leerder 'n behoefte ontdek om die probleem beter te verstaan. Of, wanneer die plan gemaak is, mag die leerder dalk probeer om die plan uit te voer en nie daarin slaag nie. Die volgende aktiwiteit kan moontlik die maak van 'n nuwe plan wees, of om terug te gaan en tot 'n beter begrip van die probleem te kom. Die leerder kan selfs 'n nuwe, soortgelyke probleem formuleer en eerder die nuwe probleem oplos voordat hy na die oorspronklike probleem terugkeer.

Dossey *et al.* (2002:48-49) se model kan as 'n uitbreiding van Polya se model gesien word deurdat probleemoplossingsvaardighede as 'n samevoeging van konseptuele begrip en prosedurele kennis beskou word. Probleemoplossing vereis die volgende van leerders:

- om die situasie te herken en in wiskundeterme te formuleer (vergelyk met Polya se verstaan van die probleem);
- om vas te stel watter verwantskappe noodsaaklik en watter voldoende is (vergelyk met Polya se verstaan van die probleem);
- om relevante strategieë, data en modelle te kies (vergelyk met Polya se formulering van 'n plan);
- om redenering in nuwe situasies te gebruik (vergelyk met Polya se uitvoer van die plan);
- om die redelikheid en korrektheid van uitkomst te beoordeel (vergelyk met Polya se terugkyk-fase).

Kersh en McDonald (1991:39-41) het in aansluiting by Polya se probleemoplossingsmodel verskeie leeraktiwiteite of strategieë voorgestel waarvolgens elk van die fases in die

probleemoplossingsproses bevorder kan word. Voorbeelde hiervan is om 'n prentjie te teken, om die probleem te dramatiseer, om na 'n soortgelyke probleem te kyk en om die probleem in eenvoudiger dele op te breek. Dit blyk egter dat die onderrig van sodanige probleemoplossingstrategieë nie 'n verbetering van leerders se probleemoplossingsvermoë teweeg gebring het nie. 'n Moontlike verklaring wat daarvoor aangevoer word, is dat die gebruik van 'n bepaalde strategie nie beteken die leerder weet watter diagram om in watter omstandighede en vir watter soort probleem te teken nie. Lesh en Zawojewski (2007:769) beskou Polya se strategieë nie slegs as die kies en uitvoer van prosedures (die *doen* van wiskunde) nie, maar ook as 'n manier vir die ontwikkeling van stelsels waarvolgens probleemsituasies geïnterpreteer en beskryf kan word (om wiskundig te dink en te sien). Polya se heuristiese strategieë bied nie slegs 'n lys van voorstelle nie, maar eerder 'n taal om leerders te help om terug te dink oor hulle probleemoplossingservarings. Die strategieë is bedoel om leerders te help om te dink oor, te reflekteer oor en probleemsituasie te interpreteer, eerder as dat dit bedoel is om leerders te help om te besluit wat om te doen wanneer hulle nie verder kan gaan in 'n probleemoplossingsituasie nie (Lesh & Zawojewski, 2007:768). Deur hulle eie prosesse te beskryf kan hulle hul refleksies gebruik om aanpasbare voorbeelde van ervarings te ontwikkel waarna hulle in toekomstige probleemoplossing kan terugverwys (Lesh & Zawojewski, 2007:770). In hierdie verband beweer Leonard, Gerace en Dufresne (1999: 2) ook dat sukses in probleemoplossing die vermoë behels om situasies konseptueel te ontleed. Konseptuele ontleding en probleemoplossing werk dus hand aan hand om sukses te bereik.

Anders as in die tradisionele kurrikulum waar lewenswerklike toepassings as 'n toevallige nagedagte gedoen word ter inoefening van reeds aangeleerde prosedures en reëls, vind die leer van wiskunde vanuit 'n modelleringsperspektief plaas deur modellering. Leerders begin dus hulle leerervaring deur die ontwikkeling van konseptuele stelsels (modelle) ten einde sin te maak uit lewenswerklike situasies waar dit nodig is om 'n wiskundige denkwysie te skep, te hersien of aan te pas (Lesh & Zawojewski, 2007:783)

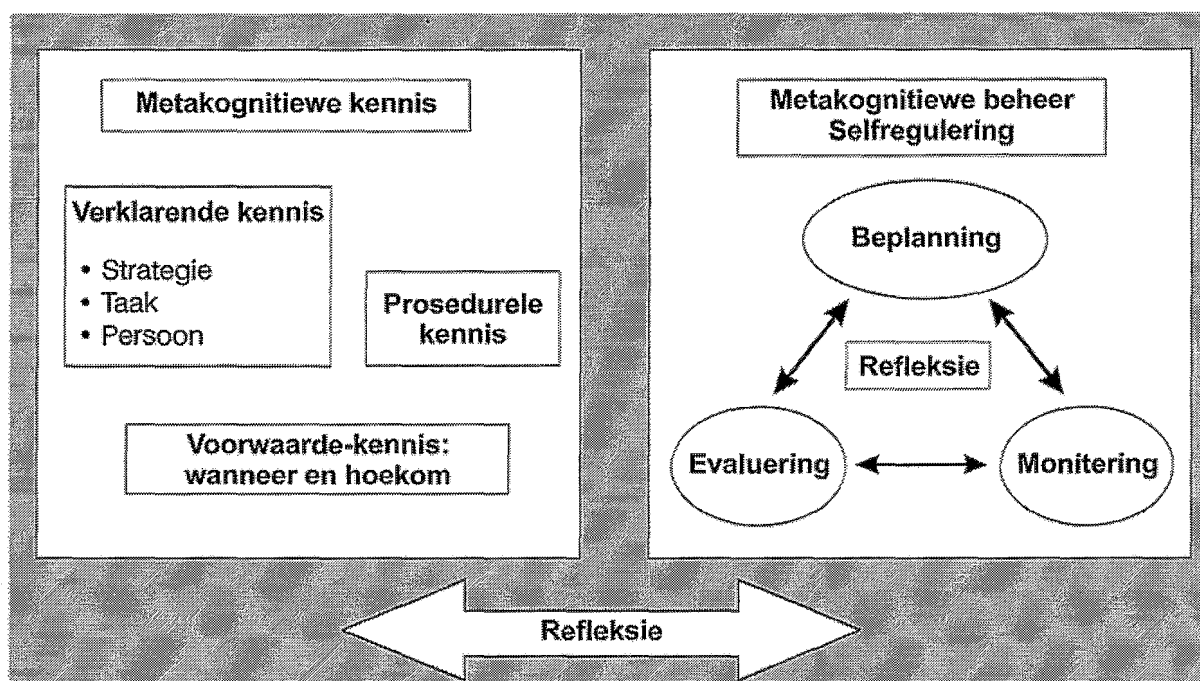
Volgens Lesh en Zawojewski (2007:784) bestaan die modelleringsproses uit die volgende vier stappe wat in interaksie met mekaar is en nie noodwendig in 'n vasgestelde volgorde voorkom nie:

- Beskrywing is die skep van 'n model wat 'n afbeelding van die werklikheid na die gemodelleerde wêreld behels. Hierdie proses kan ook met Freudenthal se proses van horisontale matematisering vergelyk word (kyk 2.3.4);
- Manipulering van die wiskundige model geskied binne die gemodelleerde wêreld en het ten doel om voorspellings te genereer wat verwant is aan die oorspronklike probleemoplossingsituasie in die werklikheid. Hierdie fase kan ook met Freudenthal se proses van vertikale matematisering vergelyk word (kyk 2.3.4);
- Voorspelling dra belangrike inligting vanuit die gemodelleerde proses terug na die werklikheid; en
- Verifikasie lewer uitspraak oor die bruikbaarheid van die voorspelling.

Die HNKV (2003:10) asook die *Principles and Standards* (NCTM, 2000) plaas nie alleen 'n groot premie op probleemoplossing nie, maar ook op monitering en beheer tydens die probleemoplossingsproses (kyk 2.5.7). Suksesvolle kognitiewe prestasie word nie slegs deur voldoende kennis bepaal nie, maar ook deur 'n bewustheid van en beheer oor daardie kennis (Lester & Kehle, 2003:508; Wilson *et al.*, 1993:64; Garofalo & Lester, 1985:163). Hierdie aktiewe monitering en konsekwente regulering van denkprosesse staan bekend as **metakognisie** (Mohamed & Ten Nai, 2005:1; Schraw & Dennison, 1994:460; Flavell, 1976:232).

2.5.7 Metakognisie

Metakognisie kan kortweg beskou word as denke oor jou denke. Flavell (1976:232) definieer metakognisie as 'n persoon se kennis aangaande sy eie kognitiewe prosesse. Schraw en Dennison (1994:460) voeg ook die dimensie van refleksie by hierdie definisie: metakognisie verwys na 'n persoon se vermoë om oor sy leer te reflekteer, dit te verstaan en te reguleer. Alhoewel daar baie definisies en teoretiese modelle vir metakognisie bestaan, tref die meeste daarvan 'n belangrike onderskeid tussen (a) metakognitiewe kennis en (b) metakognitiewe beheer of selfreguleringsprosesse (Paris & Winograd, 1990:17; Schoenfeld, 1992:334; Lucangeli & Cornoldi, 1997:122; Pintrich, 2002:219)(kyk Fig 2.5).



FIGUUR 2.5 : 'n Voorstelling van metakognisie (Ertmer & Newby, 1996:11; Schraw & Dennison,1994:460)

Metakognisie bestaan uit:

i) *Metakognitiewe kennis* (statiese bron van kennis), oftewel kennis aangaande die leerder se denkprosesse en word deur Schraw en Dennison (1994:460) en Peirce (2003:2-3) in drie soorte kennis verdeel wat die reflektiewe aard van metakognisie ondersteun, naamlik *verklarende kennis*, wat insluit kennis oor strategieë, die taak en die persoon (selfkennis) (Flavell, 1979:907; Pintrich, 2002:219), *prosedurele kennis* (kennis oor hoe om daardie strategieë te gebruik) (Peirce, 2003:2) en *voorwaarde-kennis* (kennis oor die "wanneer" en "hoekom" ten opsigte van die toepaslike gebruik van verskillende vaardighede of strategieë (Peirce, 2003:3) (kyk 2.5.5). *Strategie kennis* is kennis van algemene strategieë wat vir verskillende take gebruik kan word, insluitende probleemoplossingstrategieë. *Selfkennis* sluit in kennis aangaande die leerder se sterk en swak punte (Paris & Winograd, 1990:17; Pintrich, 2002:221), asook oortuigings aangaande motivering (Pintrich, 2002:222). Dit behels onder andere die leerder se oordeel oor sy eie vermoë om 'n taak uit te voer (selfdoeltreffendheid)(kyk 2.5.1).

ii) *Metakognitiewe beheer*, oftewel selfregulering, word beskou as die implementering van beplanning voordat 'n probleem opgelos word, voortgaande monitering en evaluering gedurende probleemoplossing en leer (Ertmer & Newby, 1996:10) en word gesien as metakognisie in aksie. Metakognitiewe kennis aktiveer metakognitiewe ervarings, wat weer metakognitiewe strategieë aktiveer (Garner, 1987:17). Monteith (1994:91) sien die proses as volg: beplanningstrategieë word aangewend om die leerhandeling te beplan en sluit in die leerder se ontleding van sy vermoë om te leer, die eise wat deur die leertaak aan hom gestel word, die oplossingstrategieë waarvoor hy beskik en die uiteindelijke effektiwiteit van hierdie leerstrategieë. As die leerder met die monitering van sy leerhandeling vind dat die leerstrategie of probleemoplossingstrategie wat hy gebruik het, nie geskik is nie, moet hy sy leerhandeling herbeplan. Lucangeli en Cornoldi (1997:122) voeg egter nog 'n fase voor die beplanningsfase in, naamlik dié van voorspelling: in watter mate 'n leerder sy eie vlak van prestasie in 'n bepaalde taak kan voorspel. Ertmer en Newby (1996:14) sien refleksie as 'n belangrike skakel tussen metakognitiewe kennis en selfregulering, wat leerders in staat stel om hulle metakognitiewe kennis (rondom taak-, persoon- en strategieveranderlikes) gedurende elke fase van die selfreguleringsproses te gebruik. Hoe meer leerders bewus word van hulle denkprosesse wanneer hulle leer, hoe meer beheer het hulle oor hulle doelwitte, oortuigings en aandag.

'n Leerder se metakognitiewe bewustheid van sy leerprosesse is net so belangrik as die monitering van die leer van inhoud self. Deur middel van refleksie word kennis wat tydens probleemoplossing opgedoen is, getransformeer na kennis wat vir 'n volgende taak gebruik kan word (Ertmer & Newby, 1996:18). Navorsing dui daarop dat metakognitiewe en affektiewe faktore die korrekte gebruik van kennis waarvoor die leerder reeds beskik, kan inhibeer. Affektiewe faktore, soos houding teenoor wiskunde (kyk 2.5.2) en emosies (kyk 2.5.3) is nou verwant aan die keuse van strategieë en selfregulering (McLeod, 1992:589). Metakognisie word deur Hartman (2001:63) as 'n noodsaaklike voorvereiste vir selfgerigte en selfgereguleerde leer gesien. Die implementering van hervormingswiskunde-onderrig maak die ontwikkeling van selfgereguleerde leerders moontlik en terselfdertyd noodsaaklik die ontwikkeling van daardie soort leerders (Pape & Smith, 2002:1). Selfregulering is nie 'n verstandelike vermoë of 'n akademiese vaardigheid nie, maar eerder die selfgerigte proses waardeur leerders hulle verstandelike vermoëns in akademiese vaardighede transformeer (Zimmerman, 2002:65). Zimmerman (1995:5) beweer dat daar drie eienskappe of komponente van selfgereguleerde leer is: eerstens poog 'n selfgereguleerde leerder om sy

gedrag, motivering en affek en kognisie te beheer. 'n Tweede belangrike komponent van selfgeregleerde leer is dat daar 'n doel is wat die leerder wil bereik, en die derde eienskap is dat die leerder self in beheer van sy handeling moet wees. Kortweg gesien: selfgeregleerde leer behels die aktiewe, doelgerigte selfbeheer van gedrag, motivering en kognisie vir akademiese take deur 'n individuele leerder.

In lyn met die konstruktivistiese onderrig- en leerbenadering stel metakognisie leerders in staat om aktiewe deelnemers in hulle eie prestasie te word eerder as passiewe ontvangers van onderrig-ervarings wat op hulle afgedwing word (Paris & Winograd, 1990: 18). Metakognisie is ook uitgewys as 'n relevante voorspeller van leer (Flavell, 1979: 910; Swanson, 1990:306). 'n Moontlike verklaring hiervoor mag wees dat metakognitiewe bewustheid leerders in staat stel om hulle leer op so 'n manier te beplan, te orden en te monitor dat prestasie direk daardeur beïnvloed word (Schraw & Dennison, 1994:460). Metakognisie moet nie as 'n einddoel van onderrig en leer op sigself gesien word nie. Dit is eerder 'n intrinsieke deel van denk- en probleemoplossingsprosesse en kan leerders toerus met die nodige kennis en selfvertroue wat hulle in staat stel om hulle eie leer te reguleer en hulle te bemagtig om ondersoekende, ywerige wiskundeleerders te word (Paris & Winograd, 1990:22).

2.5.8 Leeromgewing en -milieu

Die beleefde milieu van die leerder, wat insluit die klaskameratmosfeer, het ook 'n belangrike invloed op leerderprestasie. In 'n effektiewe leeromgewing gebruik die onderwyser strategieë om 'n positiewe, produktiewe leerervaring daar te stel (Slavin, 2003:367). Dit sluit die effektiewe gebruik van tyd en die skep van 'n ondersteunende klaskameromgewing en leergeleenthede deur onderwysers in, wat leerders aanmoedig om betrokke te raak in die leerproses (Bergeson *et al.*, 2000:52). Grouws en Cramer (1989:160) het in hierdie verband gevind dat sodanige leeromgewings leerders aanmoedig om entoesiasies te wees en om probleemoplossing te geniet (kyk 2.5.6). Beide die sosiale klaskamernorme en sosio-wiskundige norme bepaal die interaksiepatrone wat leerders en onderwysers onderling volg, waarin implisiete definisies vasgelê is oor wat wiskunde is en oor hoe 'n probleem opgelos behoort te word (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000:175). Leerders ontwikkel 'n sin van wat dit beteken om wiskunde te doen, en wat van hulle en ander in die wiskundeklas verwag word, uit hulle werklike ervarings en interaksie gedurende die klaskameraktiwiteite waarin hulle betrokke is (Henningesen & Stein, 1997:525).

Die soort leerervarings wat onderwysers bied, speel duidelik 'n belangrike rol in die gehalte van leerders se leer. Leerders se wiskundebegrip word uitgebrei namate hulle in wiskundetake en leerervarings betrokke raak wat daarop gerig is om hulle kennis te verdiep en begrippe met mekaar in verband te bring (NCTM, 2000:21). In hierdie verband kan tegnologie 'n belangrike rol speel om leergeleenthede te skep waarin leerders wiskundige verwantskappe kan voorstel, identifiseer en ondersoek (NCTM, 2002; Moreno-Armella & Trigo, 2001:57) en waarin hulle hulle eie kennis kan konstrueer (Skouras, 2006:948; Jones, 2000:6) (kyk 2.3.3). 'n Tegnologiese leeromgewing lei tot meer betekenisvolle leer, aangesien leerders meer gemotiveer is om aandag aan onderrigdoelwitte te skenk, nuwe feite aan bestaande kennis te koppel en aan onafhanklike leer deel te neem (Jones, 2000:4; Mayer, 2002b:6-7). Een van die belangrikste aspekte is egter dat tegnologie veronderstelling regverdiging en veralgemening aanmoedig deur vinnige, akkurate berekenings, die ontleding van data en die ondersoek van verskillende voorstellingsvorme, soos numeriese, simboliese en grafiese voorstellings (Goos *et al.*, 2003:5) wat uiteindelik tot betekenisvolle leer lei (Carpenter & Romberg, 2004:4) (kyk 2.4).

Olive (2000:18) stel dit dat, alhoewel daar heelwat persoonlike getuienis rondom die kragtige leer is wat in 'n dinamiese tegnologies-verrykte leeromgewing plaasvind, daar nog betreklik min navorsing bestaan oor die effek wat sulke omgewings op leer het. Volgens die *Principles and Standards* (NCTM, 2000:24) is tegnologie noodsaaklik in die onderrig en leer van wiskunde, veral tydens onderwyseropleiding, want dit beïnvloed die wiskunde wat geleer word, betekenisvol én verbeter voornemende onderwysers se leer. Een voorbeeld van interaktiewe programmatuur wat groot veld in wiskundeklaskamers wen, is die Geometer's Sketchpad® (Jackiw, 1995). Geometer's Sketchpad® is 'n kragtige dinamiese rekenaarprogram wat die meetkundige konstruksie en manipulasie van figure, die meet daarvan, berekeninge en selfs die skets van grafieke insluit. Dit voorsien 'n kragtige leerkonteks vir ondersoek wat begrip van meetkundige en algebraïese verwantskappe kan bevorder (Weaver & Quinn, 1999:84), asook 'n leeromgewing waarin voornemende onderwysers die geleentheid gebied word om soortgelyke wiskundige ondersoeke te doen as wat hulle eie leerders in die toekoms sal doen (Flores *et al.*, 2002:7). Aangesien hierdie tegnologie interaktief is, is dit maklik om leeromgewings te skep waarin leerders in hulle eie leerproses betrek word (Yushau, Mji & Wessels, 2005:19), deurdat hulle kan leer deur te doen, onmiddellike terugvoer ontvang en voortdurend hulle begrip verfyn en sodoende tot nuwe begrip kom (Bransford *et al.*, 1999:206). 'n Tegnologies-verrykte leeromgewing

bevorder leerderbetrokkenheid deur leerdergesentreerde leeraktiwiteite (Hannafin, aangehaal deur Hannafin & Land, 1997:168) en verryk die inhoud van leerders se leerervaring (Yushau *et al.*, 2005:19). Sodanige leeromgewing fasiliteer begrip van abstrakte konsepte deur middel van konkrete ervarings en lei daartoe dat leerders abstrakte wiskundekonsepte hul eie maak (Hannafin & Land, 1997:176; NCTM, 2000:25). Wanneer die tegnologie as 'n hulpmiddel in die klas gebruik word, kry leerders nie net die geleentheid om te leer *hoe* om daarmee te leer nie, maar hulle leer beter en leer ook nuwe wiskundevaardighede aan (Sherry & Jesse, 2000:3).

Die berekeningskapasiteit van tegnologiese hulpmiddels maak 'n veel wyer reeks van probleme toeganklik vir leerders, en sodoende word meer tyd vir konseptualisering en modellering toegelaat (NCTM, 2000:25; O'Callaghan, 1998:22), eerder as om vas te val in ingewikkelde berekeninge of die tydrowende skets van grafieke met die hand. Leerders kan dus op hoër-orde denke soos besluitneming, redenering en probleemoplossing fokus deurdat langdradige en tydsame berekeninge vinniger gedoen kan word en resultate wat met die hand verkry is, geverifieer kan word (Goos *et al.*, 2003:5). Die gebruik van dinamiese tegnologie laat leerders toe om die eienskappe van 'n hele paar grafieke binne 'n relatief kort tydjie te ondersoek. Behalwe vir hierdie aspekte kan tegnologiese hulpmiddels in die vorm van rekenaarsagteware leerders dinamiese verwantskappe tussen verskillende voorstellingsvorme laat raaksien (Pierce & Stacey, 2002:625), byvoorbeeld die verwantskap tussen 'n algebraïese en grafiese voorstelling van 'n funksie. Dit is belangrik om daarop te let dat tegnologie nie die aanleer van wiskundevaardighede vervang nie, maar eerder uitbrei (NCTM, 2000:25) en wiskundedenke vir alle leerders, ongeag hulle vaardigheidsvlakke, toeganklik maak (Erbas *et al.*, 2005: 603).

Tegnologie bied 'n ryker verskeidenheid en kwaliteit van ondersoekende aktiwiteite deurdat wiskundekonsepte vanuit verskillende perspektiewe ondersoek kan word (Skouras, 2006:951). Tegnologie beïnvloed nie alleen die wyse waarop wiskunde onderrig word nie, maar ook die inhoud wat onderrig word (NCTM, 2000:26). Die leer van algebra, en spesifiek funksies, hoef nie tot eenvoudige situasies beperk te word waarin simboliese manipulasie gedoen word nie. Die inkorporering van tegnologie in algebra ondersteun en komplementeer ryk probleemoplossingsomgewings (O'Callaghan, 1998:22). Komplekse probleme kan gemodelleer en opgelos word, wat andersins nie moontlik sou wees nie (NCTM, 2000:25). 'n Dinamiese tegnologies-verrykte leeromgewing kan tot meer lewenswerklike probleemoplossing lei, wat uiteindelik daartoe lei dat wiskunde meer relevant vir leerders

word, en moontlik tot 'n verbetering in leerders se houding teenoor wiskunde mag lei (Pierce *et al.*, 2007:287)(kyk 2.5.2).

Die gebruik van tegnologie bied 'n stewige basis vir kommunikasie in wiskunde. Wanneer leerders wiskunde-objekte op die rekenarskerm ondersoek, het hulle 'n gemeenskaplike verwysing vir bespreking rondom die wiskunde wat hulle ondersoek en verskillende probleemoplossingsmetodes (Knuth & Hartman, 2005:151; Skouras, 2006:951). Deur kommunikasie leer hulle wiskunde, maar terselfdertyd leer hulle ook om op 'n wiskundige manier te kommunikeer (NCTM, 2000:60; DoE, 2003:9). Die gebruik van tegnologie, saam met die nodige onderrig en fasilitering deur die onderwyser, kan leerders help om grafieke en hul verwante vergelykings voor te stel deur leerders aan te moedig om met hierdie wiskunde-entiteite te werk en daaroor te praat (Kieran, 1992:410).

Hoe die tegnologie gebruik word, is van kardinale belang as dit werklik die voornemende onderwysers moet help in hul kognitiewe groei en verstaan van wiskundekonsepte (Flores *et al.*, 2002:2). 'n Tegnologies-verrykte omgewing op sigself verseker nie noodwendig 'n verbetering in leer nie (Shuell & Farber, 2001:120; Kieran, 1992:410). Dit is eerder die ingeligte en oordeelkundige gebruik daarvan wat tot betekenisvolle leer sal lei (Barabash *et al.*, 2003:148). Alhoewel Geometer's Sketchpad 'n effektiewe en oortuigende hulpmiddel is vir die afleiding van verwantskappe, sal die leerdoel van betekenisvolle leer nie bereik word sonder die nodige beskrywing en regverdiging nie (Weaver & Quinn, 1999:84). Uiteindelik lei die gebruik van tegnologie tot 'n kognitiewe reorganisasie wanneer leerders se interaksie met tegnologie hulle denkwyse kwalitatief transformeer. Leer word 'n proses van die toepaslike en verantwoordelike gebruik van tegnologiese hulpmiddels wat die manier verander waarop leerders probleme formuleer en oplos (NCTM 2000: 25; Goos *et al.*, 2003:5). Pierce *et al.* (2007:2) beweer verder dat algemene metakognitiewe vaardighede soos beplanning en monitering aangemoedig word (kyk 2.5.7). Die gebruik van tegnologie in wiskunde lei tot 'n toename in selfvertroue in die doen van wiskunde. Hierdie faktore kombineer om leerders se studiegewoontes, en uiteindelik leer, te verbeter (kyk 4.4.1.3.1)(Pierce *et al.*, 2007:286).

Goos *et al.* (2003:10-14) beskryf vier maniere waarop tegnologie in die leeromgewing gebruik kan word deur die volgende vier metafore te gebruik:

- *tegnologie as gesagvoerder/ meester*: as leerders en onderwysers se kennis en gebruik van tegnologie tot 'n eng verskeidenheid van bewerkings beperk is waaroor hulle tegniese bevoegdheid openbaar. In leerders se geval kan onderdanigheid aan tegnologie in afhanklikheid oorgaan as 'n gebrek aan wiskundebegrip hulle daarvan weerhou om die akkuraatheid van die antwoord te evalueer;
- *tegnologie as dienskneg*: tegnologie word as 'n vinnige, betroubare plaasvervanger vir hoofrekene of pen-en-papierbewerkings gebruik, maar die take in die klaskamer bly onveranderd. Tegnologie word as 'n aanvullende hulpmiddel gebruik wat kognitiewe prosesse versterk, maar word nie op 'n kreatiewe manier gebruik om die aard van aktiwiteite in die klaskamer te verander nie;
- *Tegnologie as vennoot*: tegnologie word op 'n kreatiewe manier gebruik om leerders toegang tot nuwesootige take te gee, of nuwe maniere om bestaande take te benader. Hierdie kognitiewe reorganisasie mag insluit die gebruik van tegnologie om begrip te fasiliteer of om verskillende perspektiewe te ondersoek;
- *Tegnologie as 'n verlenging van die leerder* is die mees gesofistikeerde manier waarop tegnologie in die leeromgewing funksioneer, deurdat leerders hulle tegnologiese kundigheid as 'n natuurlike deel van hulle wiskunde-mondering gebruik. Dit behels dat leerders 'n verskeidenheid van tegnologiese hulpbronne in die vorming van 'n wiskunde-argument kan gebruik sodat die kragtige gebruik van tegnologiese hulpmiddels, hetsy dinamiese sagteware of grafiese sakrekenaars, 'n verlenging van die leerder se wiskundevaardighede word.

2.5.9 Onderrig

"What students learn is greatly influenced by how they are taught" (NCTM, 1991:21, NRC, 1996:28). Hierdie stelling het verreikende implikasies vir wiskunde-onderrig: die manier waarop onderrig plaasvind, dra belangrike inligting aan die leerders oor aangaande die vak (Kennedy, 1998:252; Shulman, 1987:9). Na aanleiding van die TIMSS-R ondersoek (1999) kom Howie (2001:154-155) tot die gevolgtrekking dat die kwaliteit van wiskunde-onderrig een moontlike faktor is wat Suid-Afrikaanse leerders se wiskundeprestasie kan beïnvloed. Die onderrig van wiskunde op skoolvlak is dikwels nie 'n eerste keuse vir die wiskundig-begaafde gegradueerde nie (Moloi, 2005:3). Gevolglik word wiskunde dikwels deur onvoldoende gekwalifiseerde onderwysers onderrig, en dit lei tot die bose kringloop van swak onderrig,

swak leerderprestasie, en 'n konstante ondervoorsiening in die behoefte aan bevoegde wiskunde-onderwysers (DoE, 2004: 10).

Ball, Hill en Bass (2005:14) en Fennema en Franke (1992:147) beweer dat die kwaliteit van wiskunde-onderrig van die onderwyser se kennis van die inhoud van wiskunde afhang. 'n Onlangse studie deur Hill, Rowan en Ball (2005:371) het ook getoon dat daar 'n betekenisvolle (positiewe) verwantskap tussen onderwyser se wiskundekennis vir onderrig (kyk 2.5.9.1) en leerderprestasie is. Leerders leer wiskunde deur die ervarings wat die onderwysers voorsien. Leerders se begrip van wiskunde, hulle vermoë om probleme op te los, hulle vertroue in wiskunde en houding teenoor wiskunde word dus gevorm deur die onderrig wat hulle op skool ontvang (NCTM, 2000:16-17). Die keuse van take is weer afhanklik van die onderwyser se kennis van wiskunde, pedagogiese inhoudskennis en kennis van die leerders in die algemeen (Bransford *et al.*, 1999:171). Effektiewe onderrig verg dus 'n deeglike begrip van wiskunde, leerders en pedagogiese strategieë (kyk 2.5.9.1) asook 'n uitdagende en ondersteunende leeromgewing (kyk 2.5.8)(NCTM, 2000:16-18).

Verskeie navorsers het gedurende die afgelope paar jaar probeer om die wiskundekennis waaroor 'n onderwyser moet beskik, te definieer deur verskillende soorte wiskundekennis te omskryf. Shulman (1986) het 'n belangrike bydrae in die veld van onderwyser-opleiding in die algemeen gelewer. Sy bespreking van onderwyserkennis gaan van die veronderstelling uit dat onderwysers besluite neem wat op hul kennis en oortuigings gebaseer is. Hierdie kennis vir onderrig behels meer as net vakinhoudelike kennis. Shulman (1986:9-10) onderskei tussen vakinhoudelike kennis, pedagogiese inhoudskennis en kennis van die kurrikulum. Vakinhoudelike kennis, of kortweg vakkennis, verwys na die hoeveelheid en organisering van 'n onderwyser se kennis. Pedagogiese inhoudskennis (Shulman, 1986:9) behels daardie vakinhoudelike kennis wat nodig is *vir* onderrig en verwys na die vermoë om belangrike begrippe op so 'n manier voor te stel wat dit verstaanbaar vir leerders maak (Ernest, 1989b:17; Brown & Borko, 1992:212; Meredith, 1993:2). Die derde kategorie, kurrikulumkennis, verwys na vakkennis soos dit voorgestel word deur die volledige spektrum van programme ontwerp vir die onderrig van spesifiek vakke en onderwerpe op 'n bepaalde vlak, asook die onderrigmateriaal wat daarmee saamgaan, insluitende alternatiewe materiaal en tegnologie.

Fennema en Franke (1992:148) is dit eens dat onderwyserkennis 'n komplekse geïntegreerde sisteem is wat dit moeilik maak om die onderskeie komponente te isoleer. Volgens

hulle is die meeste aandag deur navorsers aan die volgende komponente gegee: inhoudskennis, kennis van die leerders, kennis van wiskundige voorstellings en pedagogiese kennis. Inhoudskennis sluit in kennis van konsepte, prosedures en probleemoplossingsprosesse (Fennema & Franke, 1992:162). Ten einde betekenisvolle leer (leer met begrip) te fasiliteer moet onderwysers weet hoe om wiskundekonsepte te interpreteer en voor te stel (p.154), wat impliseer dat die wyse waarop die onderwyser self verwantskappe tussen wiskundekonsepte gevorm het, van kardinale belang is (p. 152). Pedagogiese inhoudskennis sluit in kennis van effektiewe onderrigstrategieë en beplanning van onderrig en motiveringstegnieke. Kennis van leerders sluit in kennis oor hoe leerders dink en spesifieke wiskunde-inhoud leer (Fennema & Franke, 1992:162).

Die konteks waarin onderrig plaasvind (kyk 2.3.5), is die struktuur wat die komponente van kennis en oortuigings definieer wat in die klaskamer betrokke is. Binne 'n gegewe konteks is die onderwyser se inhoudskennis in interaksie met pedagogiese kennis en kennis van leerders, en word dit met oortuigings gekombineer om 'n unieke sisteem te skep waardeur onderrigpraktyke gerig word (Fennema & Franke, 1992:162). Namate navorsers probeer om die besondere aard van kennis wat nodig is vir onderrig te beskryf, het benewens die aard van onderwyser se wiskundekennis, ook hulle houdings en oortuigings teenoor wiskunde 'n beduidende hoeveelheid aandag ontvang (Kennedy, 1998:253). Kennedy (1998:249) onderskei tussen konseptuele begrip van die vak (vakinhoudelike kennis), pedagogiese inhoudskennis, kennis aangaande die aard van die vak (oortuigings) en houding teenoor die vak as belangrike komponente van 'n onderwyser se wiskundekennis.

Die aanname word dikwels gemaak dat die neem van gevorderde wiskunde-modules onderwysers met hoë vlakke van kennis en vaardighede sal toerus wat relevant is vir die effektiewe onderrig van wiskunde (Davis & Simmt, 2006:294), alhoewel daar min bewyse in die literatuur daarvoor is (Ball, Hill & Bass, 2005:16; Matthews & Semana, 2007:3). Deur net die aantal wiskundemodules te vermeerder sal nie waarborg dat voornemende onderwysers die nodige vakinhoudelike kennis opdoen wat nodig is vir onderrig nie (Borko *et al.*, 1992: 219). Quinn (1998:113) kom tot die gevolgtrekking dat die sukses in hervormingswiskunde-onderwys van onderwysers se betekenisvolle wiskunde-inhoudskennis asook 'n positiewe houding teenoor wiskunde afhang. Die vraag wat na vore kom is: Wat is dan hierdie wiskundekennis waaroor 'n onderwyser moet beskik? Ball *et al.* (2001: 441) voer aan dat daar nie konsensus daaroor bestaan nie. In die volgende twee paragrawe gaan die wiskundekennis wat nodig is vir onderrig, verder ondersoek en bespreek word.

2.5.9.1 Wiskundekennis vir onderrig

Gedurende die afgelope 20 jaar is daar wêreldwyd gefokus op wiskunde-onderwysers se kennis en oortuigings. Veral in Suid-Afrika het die kwessie van wiskunde-onderwyserkennis en dié van onderwyser-opleiding sedert die publikasie van die Presidential Education Initiative (PEI)-verslag (Taylor & Vinjevold, 1999) sterk na vore getree (Brodie, 2004:65). Die inhoudskennis waarvoor wiskunde-onderwysers moet beskik, geniet groot prioriteit in die veld van wiskunde-onderrig gedurende die laaste paar jare. Die vlak van 'n onderwyser se wiskundekennis staan sentraal in sy vermoë om onderrigmateriaal oordeelkundig te gebruik, om leerders se vordering te assesseer, en om grondige besluite te neem aangaande die aanbod van nuwe inhoud, die klem wat op sekere onderwerpe gelê word, en die volgorde van aanbieding (Ball, Hill & Bass, 2005:14). Navorsingsverslae uit die PEI (Taylor & Vinjevold, 1999:142) toon ook dat onderwysers se swak greep op die kennisstrukture van onder ander wiskunde 'n inhiberende faktor vir die onderrig en leer van wiskunde is, en dat dit 'n algemene probleem in Suid-Afrikaanse skole is. Onderwysers beskik nie oor genoegsame konseptuele vakkennis nie en is nie in staat om hierdie kennis vir leerders toeganklik te maak nie (Taylor & Vinjevold, 1999:230; Goulding, Rowland & Barber, 2002: 689). Dit is te wagte, aangesien hierdie onderwysers juis die produk is van die sisteem wat verbeter moet word (Ball *et al.*, 2005:14). Ball *et al.* (2001:435) beweer in hierdie verband dat baie onderwysers wiskunde as 'n versameling feite, terme en prosedures aanbied sonder om die verwantskap daartussen aan te toon. Verder word hierdie feite en prosedures so aangebied asof dit selfverklarende feite en prosedures is wat leerders maar net moet aanvaar en onthou. Dit blyk egter dat die meeste onderwysers se wiskunde-inhoudskennis kennis is wat op skool aangeleer is. Onderwysers moet wiskunde in 'n veel breër konteks leer as wat in tradisionele onderrig die geval was (kyk 2.3.1) sodat onderwysers se kennis die aard van wiskunde weerspieël (Fennema & Franke, 1992:160).

Die klem op die verbetering van onderwysers se vakkennis is gebaseer op die oortuiging dat dit wiskundeprestasie by leerders sal verbeter. Daar is egter 'n uitdaging aan hierdie siening verbonde: dit is nodig om wiskunde te ken, maar dis nie voldoende nie: onderwysers moet meer van die aspekte van wiskunde weet wat wiskunde vir meer leerders toeganklik maak (Long, 2003:194; Ball *et al.*, 2005:17). Ball *et al.* (2005:17) gebruik die term “wiskundekennis vir onderrig” en stel dit gelyk aan 'n soort professionele kennis van wiskunde wat verskil van ander wiskunde-intensiewe vakgebiede soos ingenieurswese of fisika. Wiskundeprosedures

wat "outomaties" vir die volwasse onderwyser is, kom nie noodwendig vir leerders as vanselfsprekend nie. Brophy (1991:352) maak die gevolgtrekking dat, wanneer onderwysers oor 'n ryk, gekonnekteerde netwerk van kennis (vakinhoudelike kennis) beskik, hulle sal neig om wiskunde meer dinamies te onderrig (pedagogiese inhoudskennis), op meer maniere voor te stel en beter op leerders se vrae en kommentaar te reageer. As hulle kennis egter beperk is, sal hulle geneig wees om meer op die handboek te fokus vir inhoud en die vak as 'n versameling statiese feite aanbied (Brophy, 1991:352). Ma (1999:70) beskryf byvoorbeeld hoe 'n spesifieke wiskunde-onderwyser se gebrekkige begrip van deling met breuke bygedra het tot haar onvermoë om 'n geskikte voorstelling te vind. Pedagogiese kennis kon nie vir 'n gebrekkige konseptuele begrip vergoed nie. Brophy (1991:353) beweer dat onderwysers se pedagogiese inhoudskennis, oortuigings en ingesteldheid in netwerke georganiseer is wat nie slegs ondersteunend is vir hulle onderrigpraktyk nie, maar ook beperkend kan wees ten opsigte van veranderinge. Die komplekse interverweefdheid van die verskillende aspekte van 'n onderwyser se wiskundekennis vir onderrig word deur De Villiers (2006) met die volgende opmerking geïllustreer: "In teaching mathematics, no amount of pedagogical, psychological or philosophical knowledge can compensate for lack of insight into mathematical concepts and procedures."

Volgens Brodie (2001:18) verskil die wiskundekennis wat 'n onderwyser nodig het en gebruik, van die wiskunde wat 'n wiskundige nodig het en gebruik. Dit blyk dat daar 'n baie spesifieke soort wiskundekennis bestaan wat met wiskunde-onderrig geassosieer word (Davis & Simmt, 2006:294; Adler & Davis, 2006:271). Ball *et al.* (2005:21) som dit op met die woorde: "knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably". 'n In-diepte kennis van die wiskunde-inhoud is 'n voorvereiste is vir goeie onderrig, maar sonder pedagogiese inhoudskennis met betrekking tot die vak is onderrig minder effektief (Von Minden *et al.*, 1998:1, Southwell & Penglase, 2005:215; Shulman, 1987:9). Plotz (2007:15) noem hierdie soort wiskundekennis "wiskunde-inhoudskennis vir onderrig" (WIKvO)(Mathematical content knowledge for teaching), wat deel van wiskundevakkennis en pedagogiese inhoudskennis vorm. Plotz voer aan dat daar 'n klemverskuiwing moet wees van watter wiskundekennis onderwysers besit, na hoe hierdie kennis gestruktureer is. WIKvO verskil van die wiskunde-inhoudskennis waaroor 'n wiskundige beskik. Terwyl 'n wiskundige oor hoë vlakke van wiskundekennis beskik, behels WIKvO komplekse vakinhoud relevant tot skoolwiskunde en die omskakeling daarvan na voorstellings wat deur leerders verstaan kan word. Die

omskakeling van wiskunde in verstaanbare voorstellings is wat 'n wiskunde-onderwyser van 'n wiskundige onderskei (Fennema & Franke, 1992:153). WIKvO is die manier waarop die wiskunde-onderwyser se wiskunde-inhoudskennis gestruktureer is en maak deel uit van wiskunde-inhoudskennis en pedagogiese inhoudskennis en behels ook kennis van hoe leerders leer. Verder behels dit ook kennis van die skoolwiskundekurrikulum (Plotz, 2007:17).

Vakinhoudelike kennis, of ook wiskunde-inhoudskennis, behels kennis van die inhoud van die vak, naamlik konsepte en prosedures, onderliggende beginsels, asook verwantskappe daartussen (Shulman, 1986:9; Ball, 1990:458; Ernest, 1989b:16). Fennema en Franke (1992:147) stel dit dat 'n mens nie dit wat jy nie ken nie, kan onderrig nie, en daarom moet onderwysers nie net 'n diepgaande kennis hê van die wiskunde wat hulle onderrig nie, maar ook van die wiskunde wat hulle leerders nog in die toekoms gaan leer. Hierdie betekenisvolle kennis van wiskunde-inhoud verwys na 'n konseptuele en intuïtiewe begrip van wiskunde en is veel meer as die toepassing van algoritmes en die memorisering van feite om by die regte antwoord uit te kom (Quinn, 1997:108-109). Volgens Quinn sal onderwysers met onvoldoende betekenisvolle wiskunde-inhoudskennis dikwels eerder die probleme wat leerders in die leer van wiskunde mag ervaar, vererger. Die ontwikkeling van leerders se kritiese denke, en hulle vermoë om te ontdek en te ondersoek, sal afhang van die vermoë van onderwysers om die kurrikulum van eenvoudige, prosedurele probleme na meer komplekse, konseptuele probleme uit te brei (Reinke, 1997:3). Die onderwyser se kennis van wiskunde voorsien 'n noodsaaklike basis vir die onderrig van wiskunde, en sal die onderwyser se verduidelikings, identifisering van wankonsepte deur leerders en aanvaarding van leerders se eie metodes ondersteun.

Kennedy (1998:254) verwys na vakinhoudelike kennis as konseptuele begrip van wiskunde. Shulman (1987:7) se bewering: "*To teach is first to understand*" impliseer dat onderrig begin met die onderwyser se begrip van wat geleer moet word en hoe dit onderrig behoort te word. Dit behels die *raaksien van verwantskappe* tussen verskillende velde in 'n dissipline. Die onderwyser behoort in staat te wees om meer as net bepaalde verskynsels of waarhede te definieer - hy moet ook kan verduidelik *waarom* 'n sekere wiskundige beginsel geld, en ook hoe dit aan ander verskynsels- binne en buite die vakdissipline verwant is (Shulman, 1986:9). Ma (1999:109) voer aan dat hierdie "*waarom*"-vraag die eerste tree na konseptuele begrip van wiskunde is.

Kennedy (1998:255) voer ook aan dat konseptuele begrip gekenmerk word deur kennis wat *hoogs uitgebrei* moet wees. Dit is op hierdie uitgebreide veld van kennis dat die hoër-orde kognitiewe prosesse van begrip, redenering en probleemoplossing gebou word. Ma (1999:83) sluit hierby aan met die bewering dat, ten einde kragtige voorstellings van 'n bepaalde onderwerp te maak, 'n onderwyser 'n omvattende begrip daarvan moet hê. Konseptuele begrip word verder ook gekenmerk deur die vermoë om oor verskynsels te redeneer, argumente te ontwikkel, lewenswerklike probleme op te los en jou oplossing te kan regverdig (Kennedy, 1998:256). Kilpatrick *et al.* (2001:116) voer aan dat 'n onderwyser oor *wiskundige bevoegdheid* moet beskik, wat 'n samevoeging van konseptuele en prosedurele kennis is (kyk 2.5.5). Die wiskunde-onderwyser is in die unieke posisie om leerders se kennis noukeurig te ondersoek, te interpreteer, te korrigeer en daarop uit te brei (Ball *et al.*, 2005:17). Hy moet in staat wees om vanuit die leerder se perspektief te dink, en agterkom wat dit vir iemand wat vir die eerste keer daarmee te doen kry, verg om 'n wiskunde-idee te verstaan. Volgens Ball *et al.* (2005:21) verg dit ook van wiskunde-onderwysers wiskundige redenering: om uit te vind waar 'n leerder 'n fout gemaak het (fout-analise), om te verduidelik waarom 'n bepaalde algoritme of verskynsel geld en die gebruik van wiskundige voorstellings. Elk van hierdie onderrigtake vereis eweseer wiskundige redenering en pedagogiese denke. As onderwysers leerders betrokke wil kry in redenering oor belangrike wiskundekonsepte en -beginsels, moet hulle self 'n grondige wiskundekennis hê (Kennedy, 1998:252). Die teendeel is egter in baie gevalle waar: leerders word al te dikwels deur die kurrikulum en onderrigmetodes toegegooi onder vaardighede en prosedures sonder dat hulle 'n waardering vir die krag van wiskunde as 'n produk van menslike aktiwiteit en denke ontwikkel (Ball *et al.*, 2001:435).

Die belangrikheid van onderwysers se konseptuele begrip is onder andere ook deur die PEI-navorsingsprojekte uitgelig en verbind onderwysers se kennis van (of gebrek aan) hulle vakkdisipline aan hulle pedagogiese kennis en –praktyke. Swak konseptuele kennis gaan hand aan hand met 'n oppervlakkige begrip van wat goeie onderrig en leer is. Die gevolg is onderwyser-gesentreerde praktyke en 'n oppervlakkige bemoeienis met leerders se konseptuele ontwikkeling (Taylor & Vinjevoold, 1999:143).

'n Belangrike element van vakkennis vir 'n wiskunde-onderwyser is die rol van wiskundetaal en die behoefte aan 'n bepaalde vloeiendheid en gemaklikheid met wiskundeterme en gesprekvoering (Ball *et al.*, 2005:21). Die wiskundetaal wat 'n onderwyser gebruik, moet juis nie wankonsepte by leerders laat ontstaan nie. Leerders het definisies nodig wat sinvol en

bruikbaar is, en wat op terme en idees steun wat hulle reeds verstaan. Dit vereis van onderwysers om meer te weet as die definisies wat hulle in wiskundemodules op tersiêre vlak teëgekom het.

Pedagogiese inhoudskennis verwys ook na onderwysers se interpretasie en transformasie van vakinhoudelike kennis in die konteks van leerder-fasilitering (Shulman, 1987:7, 16). Shulman (1986:9) en Ball *et al.* (2005:17) verwys na die keuse van gepaste voorstellings-vorme vir die onderrig van bepaalde onderwerpe, soos illustrasies, voorbeelde, verduidelikings - die manier waarop die inhoud voorgestel en geformuleer word sodat dit toeganklik vir die leerders is. Om dit te kan doen verg van die onderwyser addisionele wiskunde-insig en konseptuele begrip (Kennedy, 1998:256; Shulman, 1987:9) ten einde leerders se antwoorde te verstaan en te beoordeel (Ball, 1990:458). Dit is meer as "metakognitiewe bewustheid" van die prosesse wat gebruik word in die oplos van 'n probleem of die uitvoer van 'n prosedure; dit sluit die vermoë in om oor die konsepte en prosedures te praat en dit te modelleer (Ball, 1990:459).

Pedagogiese inhoudskennis sluit ook onderwysers se kennis van die leerders se kennis, naamlik intuïtiewe kennis, kennis van hoe leerders dink (Hiebert *et al.*, 1997:35) en leerders se begrip in (Peterson, Fennema & Carpenter, 1991:50). Pedagogiese inhoudskennis verteenwoordig die samesmelting van inhoudskennis en pedagogiese kennis tot 'n begrip van hoe spesifieke onderwerpe en probleme georganiseer, voorgestel en aangepas word by die behoeftes van verskillende leerders en vir onderrig aangebied word (Shulman, 1987:8; Penso, 2002:25). 'n Transformasie van vakinhoudelike kennis vir die doel van onderrig lê daarom aan die kern van pedagogiese inhoudskennis (Meredith, 1995: 1). Een van die kenmerke van 'n kundige onderwyser is juis 'n interverweefde netwerk van pedagogiese inhoudskennis, 'n ryk arsenaal van verduidelikings, 'n bewustheid van algemene foute en wankonsepte, en 'n begrip van die maniere waarop die leerders in die klas leer (Livingston & Borko, 1990:384).

Pedagogiese inhoudskennis verskil duidelik van die soort memoriseringskennis wat op skoolvlak aangetref word. Die feit dat voornemende onderwysers bepaalde feite en eienskappe kan opnoem, of bepaalde prosedures kan uitvoer, beteken nog nie dat hulle dit op so 'n manier aan leerders kan verduidelik dat die leerders konseptuele begrip sal ontwikkel nie (Kennedy, 1998:257). Shulman (1987:13) beweer verder dat pedagogiese inhoudskennis van gewone konseptuele begrip verskil in die opsig dat die keuse van 'n

voorstellingsvorm nie slegs van die korrektheid daarvan afhang nie, maar ook van die verstaanbaarheid daarvan vir die leerder. Selfs al het 'n onderwyser 'n sterk konseptuele begrip van 'n vak en kan hy probleme oplos en abstrak oor bepaalde onderwerpe redeneer, is hy nie noodwendig in staat om leerders te help om hierdie konsepte te verstaan nie, tensy hy sy kennis kan verduidelik (Kennedy, 1998:257).

Effektiewe onderrig vereis van die onderwyser aanpasbaarheid en die vermoë om met gemak tussen verskillende voorstellingsvorme te beweeg (Ball & Bass, 2000:98). Ma (1999:123) beweer dat 'n onderwyser in staat moet wees om sy kennis binne 'n bepaalde konteks te reorganiseer. Ten einde dit te kan doen moet hy sy eie wiskundekennis kan "dekonstrueer" of "ontrafel" (Ball & Bass, 2000:98). Hierdie vermoë is een van die noodsaaklike en onderskeidende kenmerke daarvan om wiskunde vir onderrig te ken. Dit word gekontrasteer met die eienskap wat wiskunde het om gekompakteer of "verdig" te word in abstrakte en bruikbare formaat, soos wat wiskundiges doen (Adler, 2005:4). Ironies genoeg is die "kompaktering" van vakinhoudelike kennis, wat dit nuttig maak vir toepassing, juis onvoldoende vir die onderrig daarvan (Ball & Bass, 2000:98). Omdat onderwysers met wiskunde omgaan soos wat dit geleer word, behoort hulle met die dekonstruksie of ontrafeling van idees te werk (Adler, 2005:4). Plotz (2007:28) beskou hierdie dekonstruksie of ontrafeling van idees as 'n belangrike deel van WIKvO. Adler (2005:10) beweer tereg dat voornemende onderwysers in baie onderwyser-opleidingsprogramme nie geassesseer word ten opsigte van die soort wiskundekennis wat deur hierdie "ontrafeling" geïmpliseer word nie. Die volgende voorbeelde illustreer die verskil in fokus ten opsigte van assessering waar van leerders 'n gekompakteerde oplossing verwag word (Voorbeeld 1) en 'n oplossing waar hulle hul kennis moet "dekonstrueer" of "ontrafel" (Voorbeeld 2).

Voorbeeld 1:

Los die volgende algebraïese ongelykheid op:

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{2} \leq \frac{1}{6}$$

Voorbeeld 2:

Beskou die volgende ongelykheid asook die oplossing daarvan. Skryf by elke stap die toepaslike algebraïese eienskap van reële getalle neer wat gebruik is.

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{2} \leq \frac{1}{6}$$

$$\therefore 2(x+1) - 3(x+2) \leq 1$$

$$\therefore 2x + 2 - 3x - 6 \leq 1$$

$$\therefore -x - 4 \leq 1$$

$$\therefore -x \leq 5$$

$$\therefore (-1)(-x) \geq (-1).5$$

$$\therefore x \geq -5$$

2.5.9.2 Oortuigings en houdings van onderwysers ten opsigte van wiskunde

Vakinhoudelike kennis en pedagogiese inhoudskennis maak slegs deel van die mondering van 'n onderwyser se wiskundekennis uit (Ball, 1990:459). Daar is genoegsame bewyse in die literatuur wat aantoon dat 'n onderwyser se onderrigpraktyke deur sy oortuigings ten opsigte van die aard van wiskunde en die onderrig en leer daarvan beïnvloed word (Thompson, 1984:105, 125; Thompson, 1992:131; Stodolsky & Grossman, 1995:228; Clark & Peterson, 1986:290; Cooney, 1988:356; Ball, 1990:459; Brophy, 1991:351-352; Philippou & Christou, 1998:189; Charalambous, Philippou & Kyriakides, 2002:217). Volgens Wood, Cobb en Yackel (1991:611) impliseer die verwantskap tussen oortuigings en onderrigpraktyke dat, wanneer oortuigings in die praktyk gestalte kry, probleme opduik wat die reorganisasie van oortuigings vereis, en as gevolg van hierdie interafhanklikheid word

klaskamers nie slegs leeromgewings vir die leerders nie, maar ook vir die onderwysers (Foss & Kleinsasser, 1996:431).

Aangesien onderwysers se oortuigings 'n belangrike rol in die vorming van leerders se oortuigings en houdings aangaande wiskunde (Carter & Norwood, 1997:63; Ponte *et al.*, 1992:8) (kyk 2.5.1 en 2.5.2), asook hulle motivering speel (Eccles *et al.*, 1993:568), is dit van kardinale belang om aandag aan die oorsake van negatiewe oortuigings wat deur onderwysers gekoester word, te gee omdat positiewe oortuigings ten opsigte van wiskunde uiteindelik hulle onderrigvaardighede en die leerervaringe van die wiskundeleerders wat hulle onderrig en gaan onderrig, sal verbeter (Uusimaki & Nason, 2004:369). Onderwysers met negatiewe houdings en oortuigings aangaande wiskunde, ontlok byvoorbeeld 'n respons van aangeleerde hulpeloosheid by leerders, terwyl leerders van onderwysers met positiewe oortuigings aangaande wiskunde, suksesvolle wiskunde-ervarings geniet, wat uiteindelik ook daartoe lei dat hulle wiskunde as die moeite werd ervaar (Karp, 1991:266-267). Hierdie oortuigings mag ook 'n invloed hê op hoe voornemende onderwysers aan wiskunde deelneem en wiskunde verstaan (Foss & Kleinsasser, 1996:431). Negatiewe oortuigings kan 'n direkte gevolg van bepaalde "wiskunde-mites" wees, soos beskryf deur Kogelman en Warren (1978:30-43) en kan in uiterste gevalle tot wiskunde-angs lei (kyk 2.5.3).

Ernest (1989b:20) definieer 'n onderwyser se oortuigings ten opsigte van wiskunde ook as die beskouings wat 'n onderwyser ten opsigte van wiskunde en die onderrig daarvan huldig. Drie beskouings word onderskei (Ernest, 1989b:21), wat deur verskillende onderriguitkomstes gekenmerk word. Eerstens is daar die dinamiese probleem-gedrewe siening van wiskunde as 'n voortdurend-groeiende veld van menslike ondersoek. Wiskunde is nie 'n afgehandelde produk nie, en die bevindinge bly oop vir bespreking. So 'n probleemoplossingbeskouing van wiskunde kan tot die aanvaarding van leerders se metodes en benaderings lei. Tweedens is daar die siening dat wiskunde 'n statiese liggaam van kennis is, bestaande uit interverwante strukture en waarhede. Wiskunde is ontdek, nie geskep nie (Platonistiese siening) en derdens is daar die siening dat wiskunde 'n nuttige, maar onverwante versameling feite, reëls en vaardighede is (instrumentalistiese siening). 'n Platonistiese of instrumentalistiese siening lei daartoe dat die onderwyser op 'n enkele korrekte antwoord aandring. Afhangende dus van die onderwyser se oortuigings sal sommige leerders wiskunde byvoorbeeld sien as 'n georganiseerde liggaam van kennis, terwyl ander mag dink dat wiskunde 'n versameling prosedures is wat gememoriseer moet word. Benewens die feit dat 'n onderwyser se keuse van onderrigdoelwitte, -metodes en -aktiwiteite sy kennis en ingesteldheid teenoor die vak

reflekteer, reflekteer dit ook sy oortuiging ten opsigte van hoe leerders leer (Brophy, 1991: 351-352).

Nou verwant aan beide die vakinhoudelike kennis en die pedagogiese inhoudskennis, asook onderwysers se oortuigings, is die houding teenoor wiskunde wat onderwysers na die klaskamer bring (Kennedy, 1998:259; Quinn, 1997:108). Volgens Southwell, White, Way en Perry (2005:1) word houdings algemeen beskou as iets wat aangeleer is. Selfs al het onderwysers 'n aanvaarbare kennis ten opsigte van die aard van wiskunde, beteken dit nog nie hulle het 'n positiewe houding teenoor die vak nie. Die ervarings van voornemende wiskunde-onderwysers beïnvloed die vorming van houdings teenoor wiskunde, en dit beïnvloed weer hulle onderrigpraktyke (Ruffel, Mason & Allen, 1998:1; Southwell *et al.*, 2005:1). Navorsing aangaande voornemende onderwysers se houding teenoor wiskunde is betekenisvol in die lig van die potensiële invloed wat dit weer op leerders het (Southwell *et al.*, 2005:2). Hierdie houdings en praktyke mag dikwels in stryd wees met die rigting wat tersiêre onderrigmetodes inslaan. Dit is dus noodsaaklik dat voornemende onderwysers hulle houding ten opsigte van wiskunde-onderrig en -leer duidelik maak om uiteindelik tersiêre modules by die behoeftes van die studente aan te pas (Southwell *et al.*, 2005:2)(kyk 6.3.2.4). Daar is bewyse dat positiewe onderwyser-houdings tot die vorming van positiewe leerder-houdings bydra (Sullivan, 1989, aangehaal deur Southwell *et al.*, 2005:2). Ander studies toon dat onderrigstrategieë deur onderwyser-houding beïnvloed word, wat op hulle beurt weer leerder-houding beïnvloed (Fennema, Peterson, Carpenter & Lubinski, 1990:56).

In die lig van hervormingsinisiatiewe (kyk 2.1) wat op die verbetering van die kwaliteit van wiskunde-onderwyseropleiding en klaskamerpraktyke gemik is, is dit belangrik om te verstaan hoe onderwysers se inhoudskennis en houdings ook hulle oortuigings, en uiteindelik hulle onderrigpraktyke, beïnvloed (Wilkins, 2002:1579). Daar blyk 'n positiewe verwantskap tussen onderwysers se houding teenoor wiskunde en hulle oortuigings aangaande effektiewe onderrig, en die uiteindelijke gebruik van hervormingsgeoriënteerde onderrig te wees (Wilkins, 2002:1585). Verder kom Wilkins tot die gevolgtrekking dat hoë vlakke van inhoudskennis alleen nie noodwendig tot onderrigpraktyke lei wat ten doel het om leerders se wiskunde-kennis te bevorder nie. Onderwysers met 'n positiewe houding teenoor wiskunde dra waarskynlik positiewe oortuigings aan leerders oor, wat nie net tot leerders se wiskundekennis bydra nie, maar ook die idee by hulle tuisbring dat wiskunde ondersoek-gebaseerd is, dat dit 'n denkwyse is en 'n belangrike deel van die alledaagse lewe uitmaak (Wilkins, 2002:1585).

Navorsing deur Southwell *et al.* (2005:11,12) het aangetoon dat voornemende onderwysers oorwegend positiewe houdings jeens wiskunde en die onderrig daarvan openbaar het, ten spyte van swak prestasie in wiskunde. Hierdie swak prestasie mag dalk teenstrydig klink in die lig van die meer positiewe ingesteldhede. Dit dui egter daarop dat die voornemende onderwysers se vertroue in hulle wiskundevermoëns nie noodwendig hoë prestasie verseker nie. 'n Beter voorspeller vir prestasie in wiskunde is die leerder se vlak van vertroue in die onderrig van wiskunde, eerder as sy vertroue in sy eie vermoëns. Dit dui daarop dat diegene wat wiskunde-onderwysers oplei, voornemende wiskunde-onderwysers in staat moet stel om sukses in wiskunde te ervaar, terwyl hulle terselfdertyd goeie opvoedkundige metodes en praktyke modelleer.

2.5.9.3 Sintese

Die wiskundekennis waaroor 'n onderwyser moet beskik, het verreikende implikasies vir voordiens-onderwyseropleiding. Volgens Ball *et al.* (2001:437) het voordiens-onderwyseropleiding 'n swak uitwerking op onderwysers se kennis en oortuigings en wat ook al voornemende onderwysers op universiteit leer, neig om in die niet te verdwyn wanneer hulle hul onderwysloopbaan betree (Zeichner & Tabachnick, 1981:7). Wanneer voornemende onderwysers hulle formele onderwyseropleiding betree, het hulle reeds 12 jaar in wiskundeklaskamers in 'n sogenaamde "leerlingskap van waarneming" spandeer (Lortie, 1975:81), wat ook hulle begrip van wiskunde vorm (Ball, 1988:40). Omdat hierdie begrip van wiskunde dié wiskunde is wat hulle gaan onderrig, is dít wat hulle op skoolvlak aangaande wiskunde geleer het, 'n bepalende komponent van hulle voorbereiding as onderwysers. Voornemende onderwysers se kennis omtrent wiskunde-onderrig is grootliks gevorm deur hulle eie ervarings as wiskundeleerders (Wilcox, Lanier, Schram & Lappan, 1992:1). Wilkins (2002:1585) beweer in aansluiting hierby dat onderwysers neig om te onderrig op die manier waarop hulle onderrig is.

Dit blyk dus dat die wiskundekennis waaroor voornemende onderwysers beskik, onvoldoende is om wiskunde met begrip te onderrig. Die feit dat hulle wiskunde bestudeer, beteken nie noodwendig dat hulle die wiskundekennis het waaroor onderwysers moet beskik om te onderrig nie (Ball, 1990:464-465). Alhoewel baie navorsers, onderwysers, beleidmakers en onderwyser-opleiers die belangrikheid van 'n onderwyser se wiskundekennis erken, bly begrip rondom die aard en die rol van wiskundekennis vir onderrig 'n

onopgeloste probleem vir die verbetering van wiskunde-onderrig en -leer (Ball *et al.*, 2001:440). Die PEI-verslag pleit ten sterkste dat onderwysers beter konseptuele kennis nodig het ten einde leerders in staat te stel om toegang tot 'n grondige kennis van wiskunde te hê. Daarmee saam is pedagogiese inhoudskennis net so belangrik. Nietemin moet hierdie konseptuele kennis waarvoor onderwysers moet beskik, en die pedagogiese inhoudskennis wat hiermee saamgaan, nog presies gedefinieer word in terme van die leergeleenthede wat onderwyser-opleidingprogramme aan voornemende onderwysers bied (Brodie, 2004:65). Brodie (2004:71) beweer verder dat wiskundekennis deur spesifieke onderrigpraktyke bepaal, maar ook beperk word. Onderrigpraktyke vereis nie net sekere wiskundekennis van onderwysers nie; dit vorm ook dit wat beskou word as onderwysers se kennis, en uiteindelik ook die kennis van die leerders.

Ma (1999:149) kom tot die gevolgtrekking dat voordiens-onderwyseropleiding 'n strategies kritiese periode is waartydens verandering aan onderwyserkennis gemaak kan word en dat die bese kringloop van swak onderrig, swak leerderprestasie, en 'n konstante ondervoorsiening in die behoefte aan bevoegde wiskunde-onderwysers (DoE, 2004:10) deur onderwyseropleiding gebreek kan word. Jegede, Taplin en Chan (2000:290) sluit hierby aan met die bewering dat effektiewe hervorming in die onderwys bereik kan word met die omvattende en voldoende ontwikkeling van onderwysers se wiskundekennis. Dit is in hierdie verband waar Plotz (2007) se beskrywing van wiskunde-inhoudskennis vir onderrig 'n belangrike bydrae lewer.

Dikwels wanneer onderwyseropleiding-modules ontwerp word, word min aandag gegee aan die oortuigings wat voornemende onderwysers met hulle saamdra, en dit is waarskynlik om hierdie rede dat voornemende onderwysers meer geneig is om wiskunde te onderrig op die manier waarop hulle onderrig is (Ball, 1988:40; Meredith, 1993:8). Meer spesifiek beïnvloed vorige ervarings van voornemende onderwysers die vorming van *oortuigings* aangaande wiskunde en die onderrig daarvan, en die *oortuigings* beïnvloed weer hulle gedrag as onderwyser en hulle idees oor wiskunde-onderrig en -leer (Ernest, 1989a: 251-252; Cooney, Shealy & Arvola, 1998: 306; Wilcox *et al.*, 1992:1). Schuck (1996:126) sien hierdie vorige ervarings van voornemende onderwysers as 'n ketting wat gebreek moet word. Wanneer voornemende onderwysers die tersiêre leeromgewing betree, het hulle reeds 'n bepaalde interverweefde netwerk van idees aangaande vakinhoud en die onderrig en leer van wiskunde gevorm (Ball, 1988:460), aangesien die standaard wiskundekurrikulum wat die meeste voornemende onderwysers gevolg het, wiskunde aangebied het asof dit uit

losstaande deeltjies van prosedurele kennis bestaan (Ball, 1990:459). Die belangrikheid van onderwyseropleidingsprogramme strek verder as die ontwikkeling van vakinhoudelike kennis en pedagogiese inhoudskennis - dit help voornemende onderwysers ook om 'n positiewe houding teenoor wiskunde te ontwikkel (Quinn, 1997:113), wat volgens Wilkins heel waarskynlik op positiewe onderrig-oortuigings en -praktyke sal uitloop.

2.6 Samevatting

Uit die voorafgaande behoort dit duidelik te wees dat verskillende faktore 'n invloed op die leer van wiskunde uitoefen. Onderwysers se konseptuele kennis van, en houdings en oortuigings ten opsigte van wiskunde, speel 'n belangrike rol in die onderrig en leer van wiskunde. Omdat voornemende onderwysers se houdings, oortuigings en konseptualisering 'n wedersydse invloed op mekaar het, asook op die betekenisvolle leer van wiskunde, is daar in hierdie hoofstuk spesifiek ondersoek ingestel na faktore wat 'n rol in die leer van wiskunde speel. Die vraag wat ontstaan, en hierdie studie lei, is: Hoe kan 'n dinamiese tegnologiese verrykte leeromgewing tot die verbetering van die konseptuele kennis van voornemende wiskunde-onderwysers, asook hul houdings en oortuigings aangaande die onderrig en leer van wiskunde bydra?