WETENSKAPLIKE BYDRAES VAN DIE PU VIR CHO
Reeks H: Inougurele Redes Nr. 32

WISKUNDE EN WERKLIKHEID

J.J. Grobler

Potchefstroomse Universiteit vir CHO
1976

WISKUNDE EN WERKLIKHEID

Een van die wesenstrekke van wiskunde is die verhouding waarin dit staan tot die werklikheid. Enersyds staan die wiskunde los daarvan in die sin dat 'n wiskundige teorie nie gebonde is aan 'n enkele vaste interpretasie nie en die ongedefinieerde terme in 'n wiskundige teorie van alle betekenis ontdaan word. Andersyds is die feit nie weg te redeneer nie dat wiskunde baie nou betrokke is by die werklikheid, dat vele wiskundige idees direk afkomstig is uit die werklikheid, en dat wiskunde daarom ook op haas elke terrein van die wetenskap toepassings vind.

Ek wil in hierdie rede met u gedagtes wissel oor hierdie aspekte van wiskunde en vir u aantoon hoe die abstrakte wiskunde tog baie sterk leun op die werklikheid; nie alleen as 'n bron van nuwe idees vir wiskundige teorievorming nie maar ook as 'n stimulant in die ontwikkeling en uitbouing daarvan.

Om die abstrakte aard van wiskunde duidelik te belig skenk ons aandag aan die aksiomaties deduktiewe opbou van die wiskunde, volgens A.P.J. van der Walt (1970, p. 8) een van die drie uitstaande kenmerke van wiskunde.

In die aksiomatiese metode word uitgegaan van 'n paar ongedefinieerde begrippe en 'n aantal aksiomas of grondstellings wat 'n verband vaslê tussen die ongedefinieerde begrippe. Volgens sekere logiese reëls word dan op deduktiewe wyse stellings afgelei en in die bewyse van die stellings word slegs gebruik gemaak van die aksiomas en reeds bewese stellings. Verder word nuwe begrippe gedefinieer in terme van die ongedefinieerde begrippe. So 'n opbou van 'n teorie heet dan 'n aksiomaties deduktiewe opbou. As illustrasie beskou ons die bekende Euklidiese meetkunde. Hier word *punt* en *reguit lyn* ongedefinieerd gelaat en die volgende aksiomas lê 'n verband tussen die begrippe.

A(i) Elke lyn is 'n versameling punte.

A(ii) Daar bestaan ten minste twee punte.

A(iii) As p en q twee verskillende punte is, dan bestaan daar een en slegs een lyn wat p en q bevat.

A(iv) As L 'n lyn is, is daar ten minste een punt wat nie op L lê nie.

Definisie

Twee lyne L_1 en L_2 heet ewewydig as en slegs as daar geen punt behoort tot beide L_1 en L_2 nie.

A(v) As L 'n lyn is en p is 'n punt wat nie op L lê nie, dan bestaan daar een en slegs een lyn wat p bevat en wat ewewydig is aan L.

Stelling

Daar bestaan ten minste ses lyne.

Hierdie aksiomas is geensins genoeg om al die stellings van die Euklidiese meetkunde te bewys nie, maar dit gee u 'n aanduiding van hoe die metode verder verloop.

Word daar nou gevra na die betekenis van die ongedefinieerde begrippe, dan antwoord die wiskundige dat die enigste betekenis wat daar aan die terme geheg mag word, dit is wat deur die aksiomas daaraan gegee word. Die woorde *punt* en *reguit lyn* word as't ware in ons voorbeeld beskou as vrye veranderlikes waaraan, in 'n toepassing, enige betekenis geheg mag word. Heg ons so 'n betekenis aan die ongedefinieerde begrippe, dan kry ons 'n interpretasie of model van die teorie.

Natuurlik, as ons aan die ruimte dink en aan 'n *punt* in die ruimte as 'n *afgestorwe kol*, soos H.J. Schutte dit uitgedruk het, en aan 'n *reguit lyn* as 'n streep wat met 'n liniaal getrek is en onbegrens na weerskante verleng is, dan sien ons dat die bogenoemde aksiomas ware bewerings word. Hier het ons dus te doen met 'n interpretasie vir die teorie. Daar bestaan egter ook ander interpretasies, sommige nogal ver verwyder van die ruimtelike interpretasie hierbo genoem. Ons kan byvoorbeeld 'n versameling persone beskou, minstens vier in getal, wat paarsgewys aan klubs verbonde is. Punt kan nou beteken *persoon* en *reguit lyn* kan beteken *klub*, en dan kan die aksiomas (i) tot (v) steeds geldige, sinvolle bewerings wees. Nog 'n interpretasie wat vry algemeen voorkom is om *punt* te interpreteer as 'n paar reële getalle $(x; y)$ en reguit lyn te interpreteer as die versameling van alle pare $(x; y)$ wat voldoen aan die betrekking $y = mx + c$. Hierdie interpretasie lewer ook geldige beweringe op vir die aksiomas en dan wel geldig binne die teorie van die reële getalle.

Een feit wat duidelik deur die voorgaande geillustreer word, is dat die wiskundige aksiomastelsels en stellings wat daaruit afgelei kan word bestudeer. In die opbou van sy teorie mag hy geen appèl maak op enigiets uit die werklikheid nie. Alleen dit wat in sy aksiomas gestel word mag gebruik word. M. Pasch (1952, p. 7) het die saak met betrekking tot die meetkunde só uitgedruk: „Indeed if geometry is to be deductive, the deduction must everywhere be independent of the meanings of geometrical concepts, just as it must be independant of the diagrams; only the relations specified in the propositions and definitions employed may legitimately be taken into account ... it is useful and legitimate, but in no way necessary to think of the meanings of the terms."

Die stellings in 'n abstrakte wiskundige teorie, aksiomaties deduktief opgebou, is ook as gevolg van die van-betekenis-ontdaande ongedefinieerde begrippe nie sonder meer waar nie. Trouens, die wiskundige vra slegs na die geldigheid van die stelling en nie na die waarheid daarvan nie. 'n Stelling kan slegs 'n ware bewering word binne die konteks van 'n bepaalde interpretasie van die teorie. Hierdie insig word baie goed uitgedruk in die nou reeds klassieke uitspraak van Russell: ,,Pure mathematics consists entirely of such asseverations as that, if such and such a proposition is true of *anything*, then such and such another proposition is true of that thing. It is essential not to discuss whether the first proposition is really true, and not to mention what the anything is of which it is supposed to be true... Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about nor whether what we are saying is true" (Wilder, 1958, p. 7).

Nie alleen is die wiskundige metode dus uiters abstrak en los van alle interpretasie nie, maar ook in die *ontwikkeling* van 'n teorie word die wiskundige gelei deur 'n estetiese kriterium vir sukses. So stel M. Morse (1958, p. 21) dit: ,,Out of an infinity of designs a mathematician chooses one pattern for beauty's sake and pulls it down to earth". Die grootste kompliment wat een wiskundige 'n ander kan gee, is om sy werk te bestempel as elegant. Volgens G. Polya is die elegansie van 'n stelling „direk eweredig met die aantal idees wat daarin te sien is en omgekeerd eweredig met die inspanning wat dit neem om dit raak te sien" (Boehm, 1958, p. 21). Om esteties 'n sukses te wees moet 'n teorie diepliggende verbande oopvlek op 'n maklik verstaanbare eenvoudige wyse. Bogenoemde onderstreep die uitspraak van Van der Walt (1970, p. 10) dat „estetiese waarde in wiskunde byna altyd gepaard gaan met groot ekonomie in daarstelling".

Die aksiomas van 'n bepaalde teorie heet onafhanklik indien geeneen van die aksiomas uit die andere afgelei kan word nie. Die Grieke het reeds vermoed dat aks (5), die sogenaamde ewewydigheidsaksioma, nie 'n onafhanklike aksioma van die Euklidiese meetkunde is nie. Pogings om die aksioma uit die ander af te lei, was vrugteloos; uiteindelik besluit Bolyai, Lobachevski en Gauss om dié aksioma te vervang met sy teëspraak, naamlik:

Aks (5'): As L 'n lyn is en p is 'n punt wat nie op L lê nie dan bestaan daar minstens twee lyne deur p ewewydig aan L.

Met behulp van hierdie aksioma, wat, indien dit in die gewone ruimtelike sin geïnterpreteer word, duidelik vals is, is daar nou probeer om 'n teëspraak af te lei. Die pogings was egter vrugteloos; trouens, 'n hele nuwe wiskundige teorie is langs hierdie weg ontwikkel, naamlik die hiperboliese meetkunde.

Die genoemde aksioma kan ook vervang word met die bewering dat vir 'n punt wat nie op L lê nie, daar geen lyn deur p is wat ewewydig is aan L nie. Ook dié aksioma tesame met die ander aksiomas lei tot 'n nie-strydige teorie, die sogenaamde Riemannse sferiese meetkunde. Dit is interessant om daarop te let dat laasgenoemde meetkunde 'n eenvoudige interpretasie het as ons alle punte beskou as punte op 'n sfeer en reguit lyne beskou as groot sirkels op die sfeer.

By die aanskouing van so 'n abstrakte wetenskap waarin aksiomas blykgeldigheid van die stelling en nie na die waarheid daarvan nie. 'n Stelling kan slegs 'n ware bewering word binne die konteks van 'n bepaalde interpretasie van die teorie. Hierdie insig word baie goed uitgedruk in die nou reeds klassieke uitspraak van Russell: „Pure mathematics consists entirely of such asseverations as that, if such and such a proposition is true of *anything*, then such and such another proposition is true of that thing. It is essential not to discuss whether the first proposition is really true, and not to mention what the anything is of which it is supposed to be true... Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about nor whether what we are saying is true" (Wilder, 1958, p. 7).

Nie alleen is die wiskundige metode dus uiters abstrak en los van alle interpretasie nie, maar ook in die *ontwikkeling* van 'n teorie word die wiskundige gelei deur 'n estetiese kriterium vir sukses. So stel M. Morse (1958, p. 21) dit: „Out of an infinity of designs a mathematician chooses one pattern for beauty's sake and pulls it down to earth". Die grootste kompliment wat een wiskundige 'n ander kan gee, is om sy werk te bestempel as elegant. Volgens G. Polya is die elegansie van 'n stelling „direk eweredig met die aantal idees wat daarin te sien is en omgekeerd eweredig met die inspanning wat dit neem om dit raak te sien" (Boehm, 1958, p. 21). Om esteties 'n sukses te wees moet 'n teorie diepliggende verbande oopvlek op 'n maklik verstaanbare eenvoudige wyse. Bogenoemde onderstreep die uitspraak van Van der Walt (1970, p. 10) dat „estetiese waarde in wiskunde byna altyd gepaard gaan met groot ekonomie in daarstelling".

Die aksiomas van 'n bepaalde teorie heet onafhanklik indien geeneen van die aksiomas uit die andere afgelei kan word nie. Die Grieke het reeds vermoed dat aks (5), die sogenaamde ewewydigheidsaksioma, nie 'n onafhanklike aksioma van die Euklidiese meetkunde is nie. Pogings om die aksioma uit die ander af te lei, was vrugteloos; uiteindelik besluit Bolyai, Lobachevski en Gauss om dié aksioma te vervang met sy teëspraak, naamlik:

Aks (5'): As L 'n lyn is en p is 'n punt wat nie op L lê nie dan bestaan daar minstens twee lyne deur p ewewydig aan L.

Met behulp van hierdie aksioma, wat, indien dit in die gewone ruimtelike sin geïnterpreteer word, duidelik vals is, is daar nou probeer om 'n teëspraak af te lei. Die pogings was egter vrugteloos; trouens, 'n hele nuwe wiskundige teorie is langs hierdie weg ontwikkel, naamlik die hiperboliese meetkunde.

Die genoemde aksioma kan ook vervang word met die bewering dat vir 'n punt wat nie op L lê nie, daar geen lyn deur p is wat ewewydig is aan L nie. Ook dié aksioma tesame met die ander aksiomas lei tot 'n nie-strydige teorie, die sogenaamde Riemannse sferiese meetkunde. Dit is interessant om daarop te let dat laasgenoemde meetkunde 'n eenvoudige interpretasie het as ons alle punte beskou as punte op 'n sfeer en reguit lyne beskou as groot sirkels op die sfeer.

By die aanskouing van so 'n abstrakte wetenskap waarin aksiomas blykbaar na willekeur gewysig kan word, begrippe vry van betekenis is en die ontwikkelingsgang grootliks bepaal word deur estetiese oorwegings, kom daar verskeie vrae na vore.

Eerstens: Het wiskundige stellings betrekkings op realiteite? anders gestel is wiskundige objekte soos versamelings, getalle en punte realiteite?

U voel waarskynlik aan dat hierdie probleem van wysgerige aard is en gevolglik is die antwoord hierop, in die goeie tradisie van die wysbegeerte, wyd uiteenlopend. Gesien die uiteensetting hierbo waarin die abstrakte aard van wiskunde beklemtoon is, is ons geneig om met J. Heidema (1970, p. 16) saam te stem as hy sê: „Daar bestaan geen wiskundige entiteite of relasies nie... Wat wel bestaan is wiskundige teorieë, en binne die konteks van so 'n teorie word die bestaan van sekere individue of relasies geponeer. Die objekte en relasies waaraan in die konteks van die teorie bestaan toegeskryf word, verwys egter hoegenaamd nie op eenduidige wyse na realiteite wat buite die konteks van die teorie en onafhanklik daarvan bestaan nie".

Hierteenoor kry ons 'n realistiese of platoniese siening van die wiskunde, waarvolgens die wiskundige waarhede oor werklik eksisterende wiskundige objekte ontdek. Hierdie objekte bestaan onafhanklik van fisiese ruimte en tyd en onafhanklik van die menslike denke. Laasgenoemde standpunt is nogal populêr onder wiskundiges en het aanhangers soos K. Gödel en G. Hardy.

Miskien is dit insiggewend om hierby E.W. Beth se siening te betrek, naamlik dat bogenoemde vraag „indiscutabel" is in die sin dat geen antwoord alle partye sal bevredig nie. Die meeste wiskundiges se standpunt is dat hulle tog 'n „wiskundige werklikheid" *ervaar*. J. Dieudonné (1968) praat van „the feeling each mathematician has that he is working with something real. This sensation is probably illusion, but it is very convenient". Hierdie wiskundige werklikheid bestaan vir die wiskundige uit alle wiskundige teorieë soos dit tot op datum ontwikkel is. Alle wiskundige objekte wat binne 'n teorie bestaan, kry vir die wiskundige 'n reële karakter en hy probeer deur studie en navorsing steeds meer insig in hulle eienskappe en onderlinge verbande verkry. Soos 'n Rembrandtskildery vir die kunskenner iets reëel is, so is alle bestaande wiskunde reëel en deel van die wiskundige werklikheid.

Tweedens die vraag: Hoe is dit moontlik dat 'n vak wat so abstrak bedryf word, soveel toepassings kan vind in die wetenskappe?

Hierdie vraag het baie aandag van beide wiskundiges en filosowe gekry. In die opbou van 'n wiskundige teorie het die wiskundige altyd een of ander model in gedagte, of somtyds 'n hele paar verskynsels met sekere gemene eienskappe. Die teorievorming kan dan vergelyk word met die maak van 'n kaart waarop hierdie eienskappe dan abstrak op een of ander wyse voorgestel word.

So word dit in *The new world of mathematics* (Boehm, 1958, p. 21) gestel: „What a theoretical physicist is actually doing is making mathematical maps of the physical world". H.J. Schutte (1969) vergelyk dan ook die toepassing van wiskunde op empiriese data met die passing van 'n „konseptuele kaart" op hierdie data. Hierdie „passing" kom daarop neer dat sekere fisiese interpretasies geheg word aan ongedefinieerde begrippe in die wiskundige model. In hierdie koppeling tussen wiskundige begrippe en fisiese begrippe moet die toepasser natuurlik seker wees dat die aksiomas van die wiskundige teorie ware bewerings uit sy vakgebied word. Aangesien geen empiriese wetenskaplike ooit heeltemal seker kan wees van so iets nie, vind ons die volgende uitspraak van Einstein wat die verhouding van wiskunde tot die empiriese wetenskappe raakvat: „In soverre as wat die stellings van wiskunde verwys na die realiteit is hulle nie seker nie; en in soverre as wat hulle seker is, verwys hulle nie na die realiteit nie" (Boehm, 1958). Dit gebeur dan ook inderdaad soms dat die een wiskundige teorie in 'n bepaalde situasie nie ooreenstem met eksperimentele bevindings nie, terwyl 'n ander teorie wel die gevraagde resultate voorspel. So byvoorbeeld gebruik fisici die Bose-Einstein-teorie om die beweging te voorspel van sekere atomiese deeltjies, terwyl vir andere die Fermi-Dirac-teorie gebruik moet word. Beide hierdie teorieë is ewe geldige wiskundige teorieë en wiskundig is albei konsistent.

Die vraag waarom die wiskunde soos dit vandag bestaan soveel toepassings vind in die empiriese wetenskappe, is dus maklik te beantwoord. Die wiskundiges deur die eeue was steeds baie nou betrokke by die empiriese wetenskappe se ontwikkeling. Veral die fisika het geweldig gebaat by hierdie betrokkenheid van wiskundiges by die wetenskappe. Hierdeur is oor 'n tydperk van eeue vele idees die wiskunde binnegedra wat ontwerp is om verskynsels uit die realiteit te beskryf. Vandag nog vind ons hierdie betrokkenheid van wiskundiges by die fisiese werklikheid. Sulke abstrakte begrippe soos topologiese semigroepe is volgens een van sy skeppers, naamlik A.D. Wallace (1974, p. 21) ontwerp om die werklikheid te beskryf. Hy sê: „There is no question in my mind but that topological semigroups must, by sheer necessity play a dominant role in *describing reality*... the great majority of phenomena are irreversible, ergo, one must have semigroups". Die wiskundiges is dus al eeue lank besig om die werklikheid op sy eie abstrakte wyse te karteer.

Die aanvanklike indruk wat 'n mens kry dat wiskunde met die werklikheid niks te doen het nie, is dus veelal skyn. Die idee dat 'n wiskundige na willekeur aksiomas kan opstel, of bestaande aksiomas kan wysig of weglaat en dan 'n logiese spel verder speel is, om dit sagkens te stel, blote illusie. Die wiskundige se arbeid word deur die wiskundige werklikheid en die fisiese werklikheid bepaal en gerig. Alle wiskundige arbeid, om van waarde te wees en nie as triviaal en irrelevant verwerp te word nie, moet werklikheidsgetrou wees. Daar is geen plek vir irrelevante wiskunde nie. Daarom is Wiskunde 'n ernstige saak; hoeveel elemente van spel daar ook al teenwoordig mag wees in die bedryf van die vak.

In die res van my betoog wil ek my beperk tot die betrokkenheid van die wiskundige by die werklikheid. Natuurlik is alle wiskundiges nou betrokke by die wiskundige werklikheid. Hier val die hoofklem op interne strukturele probleme. Steeds vind daar op die terrein nuwe teorievorming plaas — ooreenkomste in wyduiteenlopende teorieë word opgemerk en aksiomaties bestudeer en steeds word daarna gestreef om eenheid te skep uit 'n wye verskeidenheid. Die wiskundige werklikheid is op die stadium so ryk aan struktuur dat J. Dieudonne van mening is dat: ,,Even if mathematics were to be forcibly separated from all other channels of human endeavour, there would remain food for centuries of thought in the big problems we still have to solve within our own science. Dieudonné mag reg wees, maar ek meen tog dat wiskunde sonder prikkels van *buite* sal stagneer. Die geskiedenis van die Grieke se prestasies op die gebied van wiskunde lewer vir my 'n goeie voorbeeld van wat met wiskunde gebeur wat die naasbestaan van 'n lewendige wetenskap moet ontbeer.

Ek wil my trouens vereenselwig met die teenoorgestelde standpunt, soos onder andere uitgespreek deur B.L. van der Waerden (1973, p. 33-41), dat wiskunde alleen kan floreer indien die wiskundige steeds nou betrokke bly by die fisiese werklikheid. Die Franse wiskundige Fourier het dit in die vorige eeu so gestel: ,,Diepgaande studie van die natuur is die vrugbaarste bron van wiskundige ontdekking''. Probleme en die verskynsels in die fisika, chemie, sterrekunde, ekonomie, taalkunde, rekenaarwetenskap en biologiese wetenskappe, ja, uit haas elke terrein van die wetenskap, suggereer nuwe wiskundige idees. Nie alleen word nuwe idees verkry nie maar ook word nuwe probleme gestel wat lei tot onontdekte stellings in ou teorieë. 'n Goeie voorbeeld om laasgenoemde bewering mee te illustreer is die volgende stelling:

,,'n Ruimtelike vyfhoek waarvan alle sye ewe lank is en alle hoeke ewe groot is, is geleë in 'n plat vlak''. Hierdie stelling klink na een wat in Euklides se *Elemente* opgeteken kan wees en tog is die stelling en sy bewys eers in 1970 deur B.L. van der Waerden ontdek, en wel na aanleiding van 'n probleem wat aan hom gestel is deur die chemici A. Dreiding en J.D. Dunitz. Hierdie twee wetenskaplikes het navorsing gedoen oor ringvormige verbindings soos siklo-heksaan, siklo-oktaan en siklo-pentaan. Na aanleiding van die gedrag van laasgenoemde verbinding het Dunitz 'n vermoede gehad dat die stelling moet geld. Dit is baie waarskynlik dat hierdie stelling onontdek sou gebly het as dit nie was dat die probleem deur die chemikus aan die wiskundige gestel is nie.

In sy betrokkenheid by die fisiese werklikheid ondervind die hedendaagse wiskundiges 'n probleem, naamlik dat die wiskundige werklikheid van so 'n geweldige omvang is dat daar weinig wiskundiges is wat die tyd het om 'n diepgaande studie van die natuur te maak. Daarby is die natuurwetenskappe self so gespesialiseer dat 'n nie-spesialis waarskynlik nooit met nietriviale vrae uit die natuurwetenskap te doen sal kry nie. Die gevolg hiervan is 'n groot gevaar tot kommunikasieverbreking. Hierdie gevaar word die hoof gebied indien die natuurwetenskaplike self goed onderlê is in wiskunde. In dié geval hanteer hy die wiskundige kennis tot sy beskikking so goed moontlik. Somtyds stuit hy egter op onoorkomelike wiskundige probleem: Hy vind dat sy wiskundige hulpmiddele ontoereikend is om 'n bepaalde situasie te hanteer. Wat in die praktyk dikwels gebeur is dan dat hy, gelei deur sy vak-intuïsie, die wiskunde op *ongeoorloofde* wyse aanwend. Hierin lê dan dikwels die aanknopingspunt met die wiskundige. Laasgenoemde, synde uiters jaloers op die korrekte gebruik van sy vak, neem dan kennis van die probleem en probeer, desnoods deur die ontwerp van nuwe teorieë, die leemtes te vul en die foute uit te stryk. Dit is klaarblyklik welke belangrike rol die natuurwetenskaplike gespeel het in so 'n nuwe teorievorming. Hy het as't ware die rigting aangedui waarin daar gewerk moet word.

'n Baie goeie voorbeeld van 'n teorie in wiskunde wat op bogenoemde wyse ontstaan het, is die sogenaamde teorie van distribusies. Dirac, die bekende fisikus, het op 'n sekere stadium ongeoorloofde gebruik gemaak van die begrip differensieerbare funksie. Die Diracse funksie δ (x) het volgens wiskundige definisies glad nie bestaan nie. Boonop het Dirac op 'n formele wyse die afgeleide van δ (x) gevind, wat ook 'n funksie was wat nie bestaan het nie. Om die saak nog ingewikkelder te maak het hy in sy berekenings bewys dat die eenheidstrapfunksie van Heaviside, wat diskontinue is in die oorsprong 'n afgeleide het en dat dié afgeleide presies die Dirac-funksie δ(x) is. Aanvanklik is in wiskundige kringe gevoel dat wiskunde geweld aangedoen word, maar die feit dat die fisici definitiewe fisiese betekenis kon heg aan hierdie *funksies* en die feit dat die resultate verkry deur hulle formele berekenings geklop het met die praktyk, het duidelik onderstreep dat hier ruimte is vir 'n nuwe teorie. Die probleem vir die wiskundige was om 'n teorie te vind wat die differensiaalrekene bevry van moeilikhede wat ontstaan as gevolg van die feit dat nie-differensieerbare funksies bestaan, en om die begrip funksie só uit te brei dat die nuwe klas objekte Dirac se *nie-bestaande* funksies bevat. L. Schwartz het so onlangs as 1955 daarin geslaag om so 'n teorie te ontwikkel. 'n Mens kan die uitbreiding van die begrip *funksie* wat hier plaasgevind het, vergelyk met die uitbreiding van die getalsbegrip van reële na komplekse getalle, en net soos in die geval van die teorie van komplekse getalle vind hierdie nuwe teorie nou toepassings op allerlei onverwagse terreine binne die wiskunde. Fourier-transformmetodes kan nou aangewend word in teorie van parsiële differensiaalvergelykings waar dit voorheen onmoontlik was; Harish-Chandra gebruik die nuwe teorie in die representasieteorie van Lie-groepe waarin 'n sintese plaasvind van Lie-algebras, harmoniese analise en parsiële differensiaalvergelykings. Laasgenoemde werk word deur J. Dieudonne soos volg besing: „The series of papers by Harish-Chandra on representation of Lie groups can hardly be matched by any contemporary mathematical work in depth and originality". Ten slotte dui hierdie voorbeeld vir ons ook op die rol wat teorieë wat ontwikkel is na aanleiding van idees wat voorkom in die wiskundige werklikheid, speel by die uitbou van wiskunde. Die teorie van topologiese vektorruimtes is 'n teorie wat hoofsaaklik ontstaan het na aanleiding van vele voorbeelde uit die wiskunde, los van die fisiese werklikheid. Tog was hierdie teorie juis die raamwerk waarbinne L. Schwartz sy teorie van distribusies kon formuleer.

So kan ons voortgaan om voorbeelde te gee, afkomstig uit byna elke afdeling van wiskunde, van nou bekende en aanvaarde wiskundige idees en begrippe wat langs die weg van die natuurwetenskappe, veral die fisika, die wiskunde binnegedra is. Om 'n paar te noem: Die Vektoranalise en Differensiaalrekene wat ontstaan het om verplasing, snelheid en versnelling te beskryf; Riemann se teorie van Abelse integrale waar idees uit die potensiaalteorie van die fisika gebruik word om 'n funksieteoretiese probleem op te los; John von Neumann se teorie van selftoegevoegde onbegrensde operatore in Hilbert-ruimtes met sy spektraalstellings wat volg uit die kwantiummeganika; die teorie van semigroepe van operatore wat gebruik word om evolusieprosesse te beskryf; die storingsteorie van Rellichs, Friedrichs, Kato en Wightman wat sy ontstaan het in die kwantiummeganika, ens. Ons kan ons volledig vereenselwig met B.L. van der Waerden (1973, p. 33-41) as hy sê: „Jeder Zweig der Mathematik kann als logisches System für sich allein bestehen. Wenn man aber die Mathematik als lebendige, wachsende Wissenschaft betrachtet, so kan man sie nur in der Symbiose mit der Physik und Astronomie verstehen. Nur in dieser Symbiose kann unsere geliebte Wissenschaft blühen und gedeihen und immer jung bleiben".

Hierdie betrokkenheid van wiskunde by haas elke wetenskap het 'n baie belangrike gevolg, naamlik dat wiskunde toepassings vind op terreine wat voorheen vir die wiskunde as't ware verbode terrein was. Meer en meer wetenskaplikes bedien hulle van wiskundige taal in die beskrywing van hulle wetenskappe. Die gevolg hiervan is dat al hoe meer mense kennis moet neem van wiskunde. Selfs op die tradisionele toepassingsgebiede van wiskunde, soos fisika, word van die beoefenaar verwag om al hoe meer moderne wiskunde te ken anders verstaan hy weldra nie meer sy vakgenote nie. So byvoorbeeld stel G. Ludwig (1954, p. VII-IX) in die voorwoord van sy *Grundlagen der Quanten mechanic* as voorvereiste vir die lees van die boek 'n indrukwekkende lys van wiskundige voorkennis soos byvoorbeeld Teorie van Hilbert-ruimte, Groepteorie en Lebesgue-maat- en integrasieteorie. Al hierdie onderwerpe kom in die nagraadse opleiding van wiskundestudente eers ter sprake en dit is onmoontlik om dit binne drie jaar aan 'n student te bied. Dit is in elk geval vir my duidelik dat die opleiding van 'n student in wiskunde in sy driejarige B.Sc.-kursus ontvang vir baie wetenskappe ontoereikend is, en ek meen dat daar op hierdie punt 'n sterk saak uit te maak is vir 'n vierjarige B.Sc.-kursus sonder spesialisering op te 'n vroeë stadium.

Dieselfde argument geld ook vir die wiskundige. 'n Te vroeë spesialisering in sy opleiding sny hom as't ware af van die fisiese werklikheid en rig hom vir sy toekomstige arbeid alleen op die wiskundige werklikheid. Ook hier kan gevorderde kursusse in een of meer van die empiriese wetenskappe alleen goeie gevolge hê vir sy latere wetenskaplike loopbaan.

Ek het gepoog om aan u te toon dat die wiskundige 'n abstrakte wetenskap beoefen wat nogtans gebonde is aan die werklikheid, en dat u wetenskappe vir die groei en bloei van wiskunde onontbeerlik is. Die wiskunde bied aan u baie en staan in diens van die wetenskap en so wil ons as wiskundiges ook ons kultuuropdrag, 'n Godgegewe roeping, uitvoer.

VERWYSINGS

BOEHM, G.A.W. 1958. The new word of mathematics. London, Faber & Faber.

DIEUDONNÉ, J. 1968. The work of Nicholas Bourbaki. Bucharest. Address before the Roumanian Institute of Mathematics.

DIEUDONNÉ, J. Recent developments in mathematics.

HEIDEMA, J. 1970. Grense vir die wiskundige denke. Johannesburg. Publikasiereeks van die Randse Afrikaanse Universiteit. A. 40.

LUDWIG, G. 1954. Grundlagen der Quantenmechanic. Berlin, Springer Verlag.

MORSE, M. 1958. Aangehaal deur Boechm, G.A.W. 958. The new world of mathematics. London, Faber & Faber.

PASCH, M. 1952. Aangehaal deur Wilder, R.L. 1952. Introduction to the foundations of mathematics. New York, Wiley.

SCHÜTTE, H.J. 1969. Ontological commitment and mathematics. Grahamstown, Rhodes University. Inougurele rede – Rhodes Universiteit, Grahamsstad.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1973. Über die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik. Abschiedsrede gehalten am 12 Juli 1972. *Elemente der Mathematik,* 28 (2):33-41.

VAN DER WALT, A.P.J. 1970. Rekenaarwetenskap en wiskunde. Johannesburg. Publikasiereeks van die Randse Afrikaanse Universiteit, A 33.

WALLACE, A.D. 1974. Aangehaal deur Hofman, K.H., Koch, R.J. & Mostert, P.S. 1974. Alexander Doniphan Wallace on his 68th birthday. *Semigroup forum*, 7:21.

WILDER, R.L. 1952. Introduction to the foundations of mathematics. New York, Wiley.

Gedruk deur PU